BOLLETTINO

DI

BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA

DI

GINO LORIA

ANNO III. - 6

1900

TORINO

CARLO CLAUSEN

LIBRAIO DELLE LL. MM. IL RE E LA REGINA

1900

Genova. — Tipografia Sordomuti

GENNAIO, FEBBRAIO E MARZO 1900.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA

E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. 6, per l'estero Fr. 7.50. Numeri separati L. 2 caduno. — Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

Il *Bollettino* esce questa volta in abito di lutto per l'irreparabile perdita fatta dalle Scienze matematiche con la morte di **Eugenio Beltrami**. Non è nel momento in cui scompare dalla scena del mondo un tal Uomo che è possibile di redigere freddamente un bilancio di tutto quello che a Lui deve la Geometria, l'Analisi e la Fisica matematica. In questo istante di ineffabile cordoglio non è al passato, ma all'avvenire che la nostra mente si volge. Ed un senso di invincibile scoramento, di profonda tristezza ci assale pensando che ci mancherà d'ora innanzi la collaborazione di uno fra i più insigni matematici del Secolo e l'illuminato consiglio di Chi, con la vastità dell'alto intelletto e la serenità del retto giudizio, era sempre pronto a favorire tutte le imprese concepite nell'interesse della Scienza e condotte con serietà di propositi.

Se il ricordo di **Eugenio Beltrami** rimarrà indelebile nella coorte di giovani che ammirarono in Lui il Professore insuperabile, le opere Sue ne tramanderanno il nome, circondato di gloria, alla posterità più remota.

BIBLIOGRAFIA
sui Fondamenti della Geometria in relazione alla Geometria Non-Euclidea

compilata da ROBERTO BONOLA

INDIRIZZO VETTORIALE.

In questo gruppo abbiamo raccolto quei pochi lavori, venuti a nostra conoscenza, che hanno per iscopo di esprimere le relazioni fondamentali della geometria, secondo la notazione vettoriale.

I primi tentativi, per introdurre una tale notazione nello studio delle proprietà delle figure, risalgono al Grassmann (1809-1877): l'applicazione sistematica della notazione vettoriale alla deduzione delle principali proprietà della geometria non-euclidea è principalmente dovuta a W. Clifford (1854-1879). Il quale, in due importanti memorie, seguendo un simbolismo non perfettamente identico a quello del Grassmann, trasformò in linguaggio vettoriale la metrica proiettiva di Cayley; ed in altre pubblicazioni si dedicò in particolar modo allo studio dello spazio ellittico.

BURALI FORTI, C. — *Il metodo di Grassmann nella Geometria proiettiva*, Nota 1.ª (Palermo, Rend. X, 1896). Nota 2.ª (Id. XI, 1897).

Id. — *Introduction à la géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann* (Paris, 1897).

CARVALLO, E. — *Exposition d'une méthode de M. Caspary pour l'étude des courbes gauches.* (Bull. S. M. F., 1887).

Id. — *La méthode de Grassmann* (Nouv. Ann. (3), XI, 1892).

CAYLEY, A. — *On multiple Algebra* (Quart. Journal, XXII, 1887).

CLIFFORD, W. — *On the Theory of Distance* (Mathematical Papers, n.º XVI; London, Macmillan, 1882).

Id. — *Preliminary Sketch on Biquaternions* Math. Papers, n.º XX, 1882).

Id. — *Application of Grassmann's extensive Algebra* (Am. Jour., I; oppure: Math. Papers, n.º XXX).

Id. — *Further note on Biquaternions* (Math. Papers, n.º XLII).

Id. — *Notes on Biquaternions* (Math. Papers: segue la precedente nota).

Id. — *On the classification of Geometric Algebras* (Proc. L. M. S., VII; opppure: Math. Papers, n.º XLIII).

COX, H. — *On the application of quaternions and Grassmann's Ausdehnungslehre to different kinds of uniform space* (Cambridge Trans., XIII, 1882).

FEHR. — *Application de la méthode vectorielle de Grassmann à la géométrie infinitesimale* (Paris, 1897).

GRASSMANN, H. — *Die lineale Ausdehnungslehre* (Leipzig, 1844; 2.ª ediz. 1878).

Id. — *Geometrische Analyse*. Gekrönte Preischrift (Leipzig, 1847).

Id. — *Die Ausdehnungslehre* (Berlin, 1862).

Id. — *Die neuere Algebra und die Ausdehnungslehre* (Math. Ann. VII, 1874).

Id. — *Ueber das Verhältniss der nichteuklidischen Geometrie zur Ausdenungslehre* (Nota a *Die Ausdehnungslehre von 1844*, 2ª Aufl., Leipzig 1878).

HANKEL — *Vorlesungen über die Complexen Zahlen.* (Leipzig, 1867).

MULLER, E. — *Die Geometrie der Punktepaare und Kreise, nach Grassmann'schen Principien* (Monatsh. f. Math. T. VII, 1896).

Id. — *Die Geometrie orientierter Kugeln, nach Grassmann'sche Methoden* (T. IX, 1898).

NÉDÉLEC. — *Le calcul vectoriel et ses applications en géometrie et en mécanique*. T. I (Paris, 1897).

PEANO. — *Calcolo geometrico secondo l'Ansdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva* (Torino, 1888).

Id. — *Gli elementi di calcolo geometrico*. (Torino, 1891).

SCHENDEL. — *Grundzüge der Algebra, nach Grassmann'schen Prinzipien* (Halle, 1885),

SCHLEGEL V. — *System der Raumlehre, nach der Prinzipien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre* (Leipzig, 1872 e 1875).

RECENSIONI ED ANNUNZI

Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals herausgegeben von dem Fest-Comitee. Leipzig, Teubner, 1899, 8.º, p. II+91+112. (Prezzo Mk. 6).

PARTE I.

D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie.*

Nello studio delle questioni relative ai principii della Geometria, i più importanti risultati sembrano dovuti all'applicazione delle elevate teorie della moderna Matematica; onde l'ultima metà del secolo nostro ha visto *Riemann* ed i suoi continuatori spingere la critica, aiutata da istrumenti analitici possenti, ad un'altezza non mai innanzi raggiunta.

Per parlare soltanto dei progressi di questi ultimi anni, è a tutti noto quello conseguito da *Sophus Lie* (nell' indirizzo filosofico di *Helmholtz*) colla determinazione delle proprietà che caratterizzano i movimenti come formanti un certo gruppo continuo di trasformazioni; al quale si può forse, per l'importanza, ravvicinare il progresso, portato nel problema dello spazio, dalla considerazione delle così dette « forme di *Clifford-Klein* », legate alle funzioni automorfe.

Oggi è la teoria più astratta dei sistemi di numeri complessi, che, col lavoro del sig. *Hilbert*, riceve una sistematica applicazione nello studio dei principii della Geometria; non, invero, a gettare nuova luce sui problemi filosofici che qui si riattaccano; ma piuttosto ad illuminare i rapporti fra i principali gruppi di proposizioni che stanno a fondamento dell'ordine matematico, in cui la nostra scienza si è svolta.

L'A. movendo dai concetti fondamentali di « punto », « retta », « piano » e « congruenza », riferisce ad essi 5 gruppi di postulati (o assiomi) concernenti le relazioni di:

I) appartenenza (determinazione di rette e piani e loro mutue intersezioni);

II) ordinamento (proprietà segmentarie, inclusa la proposizione di *Pasch* « se, in un piano, una retta incontra un lato d'un triangolo, essa incontra anche un altro lato del medesimo »);

III) parallelismo (postulato d'*Euclide*);

IV) congruenza o uguaglianza (proprietà della congruenza segmentaria ed angolare e relazione fra i due concetti);

V) continuità, la quale invero figura solo parzialmente ed in modo subordinato alla congruenza segmentaria, col postulato d'*Archimede*.

A dilucidazione d'un punto che potrebbe rimanere oscuro, avvertiamo qui che il vero significato di tale proposizione è indipendente dalla nozione di congruenza, esprimendo essa la condizione necessaria e sufficiente perchè la retta si possa riguardare contenuta in una classe di elementi *continua*, nel senso ordinario di *Dedekind*.

Dopo avere sviluppato le più elementari conseguenze delle ipotesi introdotte (notevole lo sviluppo dato alla teoria della congruenza), il sig. Hilbert intraprende la dimostrazione della compatibilità e dell'indipendenza dei vari gruppi di postulati, e ricorre per ciò alla costruzione di convenienti sistemi di numeri.

Qui rileveremo che l'indipendenza del gruppo IV non ci sembra stabilita in modo soddisfacente. L'A. prova soltanto che l'ultima proposizione IV (enunciante, in sostanza, la congruenza di due triangoli aventi uguali due lati a due lati, e gli angoli compresi) non può dedursi dal complesso delle rimanenti proposizioni; onde egli stabilisce la necessità di legare con un postulato i concetti della congruenza segmentaria ed angolare. Invece si potrebbe domandare un'altra cosa, cioè se l'introduzione dei concetti della congruenza, coll'intiero gruppo di proposizioni IV, tragga seco nuove proprietà degli altri concetti fondamentali, indipendenti da quelle per essi postulate.

L'A. si propone di fondare l'ordinaria teoria delle proporzioni fra segmenti, prescindendo dal postulato d'Archimede; e si appoggia per ciò al teorema di *Pascal*, o meglio a quel suo caso particolare, che già si trova in *Pappo*, concernente l'esagono iscritto in una coppia di rette, prendendo inoltre come retta di Pascal la retta all'infinito. Dal detto teorema deriva un calcolo sui segmenti, i quali appariscono così (astrattamente considerati) come formanti un sistema di numeri reali; si è quindi condotti all'ordinaria Geometria analitica.

È notevole l'applicazione del menzionato calcolo segmentario alla teoria delle aree. L'A. pone a riscontro due definizioni dell'equivalenza: Flächengleiche o *equivalenti* (in senso ristretto) sono due figure piane somme di parti uguali; Inhaltsgleiche o d'*ugual contenuto*, due figure differenze di figure Flächengleiche.

Le due definizioni sono indipendenti quando si prescinda dal postulato d'Archimede; così, in tali ipotesi, due parallelogrammi di ugual base ed altezza sono sempre d'ugual contenuto, ma possono non essere equivalenti. Ora il calcolo segmentario fondato sul teorema di Pascal permette di definire l'*area* d'un triangolo (prodotto della base per la metà dell'altezza) e quindi di un poligono qualsiasi: poligoni equivalenti hanno ugual area, ma la cosa non è invertibile; poligoni d'ugual area hanno ugual contenuto e viceversa. Risulta quindi stabilita la proposizione fondamentale della teoria dell'equivalenza, che permette di considerare le superficie dei poligoni come *grandezze;* la quale proposizione presa come postulato (esplicitamente o no) da *Euclide* fino a *De Zolt*, a *De Paolis* e a *Stoltz*, è stata recentemente dimostrata dai signori *Schur, Rausenberger, Gerhardt, Lazzeri, Veronese, Killing.* Ma la dimostrazione del sig. Hilbert, a differenza delle precedenti, non dipende dal postulato d'Archimede. Resta così acquisito che la teoria delle aree sussiste anche nella Geometria non-Archimedea, fondata, come è noto, nella grande opera del sig. *Veronese.*

Seguendo sempre il nostro A., troviamo ora due resultati che costituiscono la parte essenziale del lavoro in esame.

Il primo si riferisce al teorema di *Desargues*, dei triangoli omologici. È noto come questo teorema, della Geometria piana, si dimostri con una semplice costruzione spaziale, fondata sopra i postulati grafici I, II, III. ... piano (prendendo dal gruppo I il solo ... determinazione della retta per mezzo di due punti), ... *metrica* del medesimo teorema, ricor... postulati IV che la caratterizzano.

E ... teorema del Desargues, in modo *grafico* ...

... una regione piana limitata, la dimo... Lo ha osservato il sig. *Klein*, notando ... superficie convenientemente limitata, soddi... che costituiscono i postulati della ... d'altronde il teorema di Desargues, ... tali curve con equazioni lineari, vale ... curvatura costante (*Beltrami*).

... il dubbio relativamente al caso in cui ... concedendo il postulato delle parallele; ... quando si consideri l'intero *piano proiettivo* ... sempre un punto comune ».

... Hilbert risolve il dubbio in senso negativo, dimo... *teorema di Desargues non si può dimostrare* ... *senza uscire dal piano stesso, e senza* ... *metrici) della congruenza.*

... è fondato, non sopra le considerazioni di teoria dei ... nelle altre parti del lavoro, ma sopra la costru... opportuno sistema di linee piane, per il quale restano ... postulati grafici della retta (incluso quello delle ... non sussiste la proprietà espressa dal teorema di ... risultato anzidetto vale dunque (è bene avvertirlo) anche ... la continuità della retta, nella sua più ampia ...

... il teorema di Desargues sostituisce completamente l'uso ... spaziali, nella Geometria proiettiva del piano. Infatti ... tale teorema (prendendo p. es. come asse d'omologia la ...) si può fondare un calcolo sui segmenti, e quindi una ... analitica del piano, la quale permette (astrattamente) di ... il piano stesso come parte di uno spazio (analitico) a tre ...

Secondo il calcolo menzionato, i segmenti appariscono formare come un sistema di numeri complessi (*sistema ... desarguesiano* o *di Desargues*), ... alcune delle proprietà appartenenti al sistema dei numeri ... addizione gode delle stesse proprietà associativa e com... moltiplicazione delle proprietà associativa e distributiva. ... proprietà commutativa di quest'ultima operazione, si tro... desarguesiani di numeri per cui essa sussiste, e sistemi per cui non sussiste, cadendo allora anche la proposizione d'Archimede. Ora la proprietà commutativa della moltiplicazione, in un sistema arguesiano, esprime la validità del teorema di Pascal. Scaturisce quindi, di qui, un secondo resultato:

Il teorema di Pascal può essere dimostrato quando, accanto ai postulati grafici dello spazio I, II, III, si ponga la continuità, oppure si aggiungano i postulati (IV) della congruenza. Invece *non è possibile dimostrare il teorema di Pascal in base ai postulati grafici* I, II, III *dello spazio, senza ricorrere alla congruenza oppure alla continuità* (almeno parziale).

A complemento dei due resultati si noti, coll'A., che: ogni proposizione della Geometria piana, concernente una proprietà di appartenenza fra punti e rette, ossia una proprietà figurativa, si può riguardare come una combinazione dei teoremi di Desargues e di Pascal.

L'ultimo capitolo del lavoro in esame è dedicato all'interessante questione delle costruzioni geometriche, effettuabili in base ai postulati I-V. Tali costruzioni si eseguiscono colla *riga* (indefinita) e col *regolo trasportatore* di segmenti. Analiticamente esse dipendono da operazioni razionali, e da estrazioni di radicali quadratrici portanti su numeri esprimibili come somme di due quadrati (operazioni da effettuarsi successivamente a partire da alcuni numeri *dati*. e da quelli via via ottenuti). L'A. determina completamente la classe d'irrazionali algebrici che così resta definita, la quale è soltanto una parte di quella ottenuta colla più generale estrazione di radicali quadratici. In corrispondenza, ottiene una classe di problemi risolubili colla riga e col regolo trasportatore, rientrante nella più ampia classe dei problemi risolubili colla riga e col compasso.

Taceremo dell'applicazione elegante relativa ai poligoni regolari, e rileveremo soltanto come i resultati anzidetti rischiarino una questione concernente i principii della Geometria elementare. Se, come si fa d'ordinario nell'insegnamento, non s'introduce subito la continuità della retta, è necessario assumere come un postulato (per le usuali costruzioni) una qualche proposizione relativa alle intersezioni di rette e circoli; giacchè vi è qui una nuova ipotesi, indipendente da quelle che esprimono le proprietà della congruenza.

Terminiamo questo breve cenno dell'importante lavoro che abbiamo sott'occhio, con un'ultima osservazione: Studiando, coi metodi più astratti, questioni astratte d'ordine puramente logico, l'A. mostra ovunque d'intendere, così nella scelta dei postulati di una lucida evidenza, come nelle finali applicazioni tecniche, tutto il valore dell'intuizione geometrica. Vi è in ciò un grande ammaestramento pei giovani che vogliono studiare utilmente le questioni interessanti i principii della Geometria!

F. Enriques.

PARTE II.

E. WIECHERT, *Grundlagen der Elektrodynamik.*

Ogni studioso di filosofia naturale leggerà con intenso interesse questa bella monografia. Vi si passano in rassegna le diverse teorie elettrodinamiche, tratteggiandone in modo perspicuo le linee fondamentali e rilevando con sobri accenni le mutue dipendenze.

Ecco il disegno generale dell' opera.

Il primo capitolo costituisce una breve introduzione matematica, il secondo è dedicato alla elettrodinamica classica.

L' a. ce la presenta come un organismo sistematico, svolgendo successivamente la legge di Coulomb, la equazione di continuità pel flusso elettrico, le leggi di Ampère, di Biot-Savart e di Faraday. Egli introduce con criteri suoi propri le polarizzazioni elettrica e magnetica (che chiama induzioni, secondo le antiche teorie di Poisson e Mossotti) e formula la legge di Faraday in modo da abbracciare anche il caso dei circuiti aperti.

Alla legge elementare di Ampère sulle azioni ponderomotrici di due elementi di corrente si riannodano il potenziale mutuo di due circuiti chiusi di F. Neumann e una legge elementare di Grassmann.

Più innanzi l' autore mette in risalto la perfetta equivalenza fra le due leggi di induzione elettromagnetica di Faraday e di F. Neumann. Vi compare un fattore di proporzionalità. Come ha osservato Helmholtz, si può fissarne il valore, applicando il principio di conservazione dell' energia.

Cerchiamo di farci un' idea (riferendoci naturalmente ad un caso semplice) della teoria, corrispondente a questo complesso di leggi.

Consideriamo un mezzo isotropo, non polarizzabile ed in quiete. Comunque si combinino le leggi classiche (quindi in particolare secondo la trattazione del Wiechert) le azioni elettromagnetiche sono rette dalle stesse equazioni indefinite. Coi simboli vettoriali esse assumono l' aspetto semplicissimo:

$$(\mathrm{E}) \begin{cases} \dfrac{1}{V}\dfrac{d\mathbf{K}^*}{dt} = -\operatorname{Curl}\mathbf{H} - \dfrac{4\pi\gamma}{V} \\[2ex] \dfrac{1}{V}\dfrac{d\mathbf{H}}{dt} = \operatorname{Curl}\mathbf{K} \end{cases}$$

$\mathbf{K}^*$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{H}$, γ rappresentano rispettivamente la forza elettrica di origine elettrostatica, la forza elettrica totale, la forza magnetica e la corrente; V la velocità della luce nel vuoto (1).

Le (E) esprimono relazioni tra quantità, che dipendono esclusivamente dallo stato elettromagnetico del mezzo nell'intorno del punto considerato. Perciò esse si prestano bene al confronto fra l'elettrodinamica classica e quella di Maxwell. Si riconosce infatti che tali equazioni hanno forma analoga alla hertziana. Il divario consiste unicamente in questo che nella prima di esse compare la forza elettrostatica $\mathbf{K}^*$, anzichè la forza elettrica totale.

Ma riprendiamo la nostra rivista.

Nel terzo capitolo è riassunta l'opera di Maxwell: vi trovan posto il teorema di Poynting sul flusso di energia e le equazioni fondamentali della teoria elettromagnetica della luce.

Seguono alcune considerazioni sul significato fisico delle ipotesi di Maxwell, sulla portata e limiti delle sue teorie.

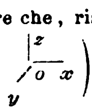
Non a caso in questo stesso capitolo sono riferiti i lavori di Helmholtz, chè vi si risente l'influenza di Maxwell. Helmholtz infatti, pur attenendosi alla tradizione classica delle azioni a distanza (tanto che, nella sua teoria, pel caso semplice sopra considerato, valgon sempre le equazioni (E)), ne allargò i confini in modo da rendere ad essa pure possibile una spiegazione elettromagnetica dei fenomeni luminosi.

Dopo Helmholtz, lo scolare, non meno insigne del maestro, Enrico Hertz. Nel frattempo però non c'è soluzione di continuità. Una valorosa schiera di fisici perfeziona le teorie di Maxwell, ne fa applicazioni, ne costruisce modelli dinamici.

L'a. non può soffermarvisi e passa ad analizzare le due celebri memorie di Hertz.

Alla prima memoria (equazioni fondamentali pei mezzi in quiete) si collega l'interpretazione intrinseca delle costanti, dovuta a Cohn, e la possibilità di dedurre le equazioni di Hertz dalle leggi elementari della elettrodinamica classica, aggiungendo l'ipotesi di un tempo di propagazione finito.

Nella seconda memoria Hertz estende la teoria ai mezzi in movimento, in base ad un principio, che chiamerei di conservazione delle

(1) È appena necessario avvertire che, rispetto a un sistema cartesiano ortogonale (orientato come in figura 

), se $\mathbf{H}_x$, $\mathbf{H}_y$, $\mathbf{H}_z$ sono le componenti di un vettore $\mathbf{H}$, quelle di Curl $\mathbf{H}$ sono le definite dalle espressioni

$$\frac{d\mathbf{H}_z}{dy}-\frac{d\mathbf{H}_y}{dz},\quad \frac{d\mathbf{H}_x}{dz}-\frac{d\mathbf{H}_z}{dx},\quad \frac{d\mathbf{H}_y}{dx}-\frac{d\mathbf{H}_x}{dy}$$

linee di forza. L'a. ricorda una espressione matematica di questo principio, assegnata dal Prof. Volterra, e ne propone una egli stesso.

Con Hertz l'elettrodinamica pura consegue il suo assetto definitivo. Ma il fisico non può interamente appagarsene. Come già avvenne per la meccanica dei fluidi ideali, alcuni fenomeni non possono, nemmeno approssimativamente, venir spiegati colle equazioni pure. Bisogna allargare la teoria, contemplando qualche nuovo elemento: la viscosità in idrodinamica, qui il movimento dell'ètere.

Si riconobbe infatti ben presto che i fenomeni di dispersione e di assorbimento, l'esperienza di Fizeau, la deviazione magnetica della luce polarizzata, ecc. trascendono le equazioni hertziane. Per farli rientrare nella teoria, convenne, come aveva previsto lo stesso Hertz, rinunciare all'ipotesi dell'ètere immobile (rispetto alla materia) e considerare separatamente lo stato dell'uno e dell'altra.

Da ciò le recenti teorie di Lorentz e dello stesso Wiechert. A diverso concetto è invece inspirata un'estensione della elettrodinamica pura, dovuta a Voigt.

Questo sommariamente il contenuto del quarto ed ultimo capitolo, che s'intitola « Teoria della elettrodinamica con riguardo alla costituzione molecolare della materia ».

Merita speciale menzione la circostanza che la teoria di Wiechert ci riporta, sotto nuovo punto di vista, all'antica distinzione dei due fluidi elettrici.

Così gli ultimi risultati dell'indagine fenomenologica accennano a rimettere in onore la semplice ed espressiva immagine, donde la concezione atomistica aveva preso le mosse.

T. Levi-Civita.

J. Boyer. — *Histoire des mathématiques.* Illustrée de fac-similés et de portraits. Paris, G. Carré et C. Naud, 1900, 8.° p. XI + 260 (Prezzo del vol. legato fr. 5).

Esporre in poco più di duecento paginette la storia di una scienza la cui letteratura si estende per non meno di quaranta secoli, è impresa irta di gravissime difficoltà, tanto più quando l'autore, intendendo di interessare il pubblico dei dilettanti, preferisce l'aneddoto alla teoria, il dato biografico all'esposizione di concetti astrusi. L'A. del volume che annunciamo non è riuscito a superarle, forse perchè non ha cominciato a fare in sè stesso una rassegna critica di tutto il patrimonio matematico odierno, nell'intento di fare una rigorosa cernita in base alla quale escludere tutte quelle investigazioni i cui risultati non sono di capitale importanza. In conseguenza gli accadde di occupare con nomi oscuri e opere insignificanti (pag. 80-82) uno spazio che avrebbe dovuto essere occupato piuttosto da notizie intorno alla fondamentale questione dell' introduzione in Europa delle nostre cifre (cf. p. 72, ove tale questione è appena sfiorata); in conseguenza accadde che lo Steiner venne trattato con imperdonabile ingiustizia — non ne è narrata la vita, e ne è citata soltanto (p. 260) l' opera meno originale e redatta da discepoli —, che dal Lie vennero segnalate le investigazioni sulla geometria non-euclidea invece delle teorie generali di cui queste sono semplici applicazioni, e che una turba di mediocri occupa i posti che spettavano a scienziati quali Plücker e Staudt, Clebsch e Aronhold, Betti e Brioschi. La stessa cagione ha forse la presenza di giudizì che non tutti saranno pronti ad accogliere; come, ad es., accettare per vere le notizie sulla vita di Euclide partorite dalla fantasia degli Arabi (p. 23), e come ritenere, coll' A., che i più cospicui successori del Galois sono il Cayley, il Poincaré e C. Sturm, e non piuttosto A. Serret e C. Jordan in Francia, E. Betti, L. Kronecker, H. Weber e S. Lie all' estero?...

Malgrado siffatte mende, non ci meraviglieremmo che alla nuova storia fosse riserbato un buon successo e larga diffusione, grazie allo stile semplice e non privo di eleganza in cui è scritta, grazie anche alla signorilità dell' edizione, alla bellezza e curiosità delle illustrazioni (1), cose tutte ben note a coloro che ebbero già occasione di consultare la *Bibliothèque de la Revue générale des sciences*, della quale essa fa parte. Appunto perciò ci sembra opportuno additare all' A. ed ai lettori almeno alcune asserzioni che, essendo disformi dal vero od almeno oscure ed imprecise, esigono qualche rettificazione:

Pag. 44, linea 11ª dal basso, si tratta del V non del I Libro di Euclide.

» 21 » 1.ª Teofrasto da Lesbo, non d' Erese.

» 23 » 3.ª Archimede non consta insegnasse nel Museo d'Alessandria.

Pag. 17 » 3.ª dal basso. L' attribuzione a Platone della scoperta dei luoghi geometrici è ormai abbandonata da tempo.

Pag. 35, linea 14ª. Pure è abbandonata l' opinione che Conone sia stato il primo ad occuparsi della spirale detta d' Archimede.

Pag. 52, linea ultima del testo. Come patria di Sereno si inclina oggi ad ammettere piuttosto Antinoeia in Egitto, che Antissa nell' isola di Lesbo.

Pag. 154, linea 15ª dal basso. Le formole che danno la somma delle potenze simili delle radici d' un' equazione furono date da Girard, prima che da Newton.

---

(1) Una sola osservazione ci permettiamo. Perchè venne riprodotto un brutto ritratto di Eulero (p. 173) piuttosto che quello splendido che trovasi di fronte al T. I degli *Opera postuma* (Petrop. 1862)?

Pag. 208, linea 15-16 dall' alto;..?..

» 209 » 3.ª dal basso. Invece di *somma* deve leggersi *prodotto*.

» 212 » 15. Hermite non ha dimostrata l' impossibilità della quadratura del cerchio, ma ha provato che e non può essere radice di alcuna equazione algebrica, con un metodo, il quale venne adattato poi dal Lindemann a dimostrare l' analoga proprietà di π.

Pag. 215, linea 3.ª del testo dal basso. Cauchy non ha *tentato di determinare*, ma *determinate* effettivamente le condizioni necessarie e sufficienti per la sviluppabilità in serie di Taylor di una funzione di variabile complessa.

Pag. 222, linea 19ª. Weiertrass non fu rettore dell' Università di Berlino dal 1873 *sino alla morte;* per es. *Minerva* insegna che nell'anno 1895-96 tale posto era occupato da A. Wagner.

Pag. 220, linea 15-16;...?...

Termineremo esprimendo la speranza che il sig. Boyer voglia darci ulteriori informazioni intorno a certi manoscritti interessanti della Biblioteca Nazionale di Parigi (v. p. es. pag. 88) di cui egli ci fece gustare qualche ghiotto boccone. G. L.

H. Weber. *Lehrbuch der Algebra.* Zweite Auflage. Zweiter Band., p. XVI + 856. Braunschweig, F. Vieweg und Sohn (Prezzo Mk. 12).

Col volume che noi annunciamo resta completata l' opera egregia su cui un anno fa fissammo l' attenzione dei nostri lettori (v. *Bollettino,* T. I, 1898, p. 151-152). Come nell' approntare la nuova edizione della I parte della sua opera, così nel rivedere la II, l' A. ha conservato al suo antico lavoro i lineamenti caratteristici che gli assicurarono una prima volta il successo. Ma introdusse quei miglioramenti consigliati dai progressi che l' algebra ha compiuto nel periodo che corre dal Luglio 1896 al Gennaio 1899; esercitarono specialmente una beneficazione riformatrice le investigazioni recenti del Frobenius, dell' Hilbert e del Minkowski. Così il trattato del Weber è oggi, come era al suo primo apparire, l' opera a cui deve ricorrere chiunque aspiri a formarsi un concetto esatto dello stato presente delle nostre cognizioni algebriche e delle applicazioni che esse trovarono alla geometria delle curve del 3.º ordine e del 4.º G. L.

Annuaire pour l' an 1900 publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. 18.°, p. v + 713, con 2 carte magnetiche. Paris, Gauthier-Villars (Prezzo 1 fr. 50; franco 1 fr. 85).

La casa Gauthier-Villars ha testè pubblicato il nuovo volume (per l' anno 1900) dell' ottimo *vade-mecum* degli scienziati, che viene compilato dall'Ufficio delle longitudini di Parigi. Oltre alle solite informazioni, contiene interessanti notizie scientifiche del Cornu, del Lippmann e del Janssen, nonchè i discorsi pronunciati il 15 ottobre 1899 in occasione dello scoprimento della statua innalzata a F. Tisserand. Un'innovazione va notata: a partire dal 1900 tutte le date sono espresse in tempo medio civile da 0 a 24 ore. Nè va taciuto che i compilatori dell'*Annuaire,* quasi per far cenno di una questione che da tempo si dibatte, dichiarano (p. 3) « l'an 1900, dernière année du XIX siècle », il che confermano due volte poco dopo asserendo (p. 5): Le XIX siècle finira le 31 décembre 1900. Le XX siècle commencera le 1er janvier 1901 ». G. L.

E. Goursat. *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes.* — T. I, p. VIII-226, T. II, p. v-344 Paris, Hermann, 1896, 1898. 8.°

In questa eccellente opera l'autore si è proposto, non solo di riassumere quanto si conosce finora sull'argomento, ma di dare alla materia un'impronta, per quanto fosse possibile, uniforme, ed ancora — sulle tracce di Darboux, Lie ed altri — di introdurre sistematicamente quale istrumento di ricerca e di dimostrazione l'intuizione geometrica.

Noi tenteremo di darne un'idea ai nostri lettori, esaminandone il contenuto capitolo per capitolo.

C. I. *Studio d'una classe particolare d'equazioni. Problema di Cauchy.* — Seguendo la via che si presenta alla mente più spontanea, l'autore cerca di estendere alle equazioni a derivate parziali del 2.° ordine i concetti che figurano nella teoria delle equazioni del 1.° ordine.

Un integrale di un'equazione del 1.° ordine è costituito, se l'equazione è lineare, dalla superficie generata da una famiglia qualunque semplicemente infinita di curve d'una congruenza; se non è lineare, dall'inviluppo d'una famiglia semplicemente infinita di superficie d'una congruenza. Analogamente può stabilirsi, che tutte le superficie generate da famiglie semplicemente infinite di curve di un complesso, o tutti gl'inviluppi delle famiglie semplicemente infinite di superficie di un complesso, soddisfanno ad una medesima equazione del 2.° ordine, la quale ha, rispettivamente nei due casi, la forma di Monge:

$$Hr + 2Ks + Lt + M = 0, \qquad (1)$$

o quella di Ampère:

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N\,(rt - s^2) = 0. \qquad (2)$$

L'insieme delle superficie poc'anzi definite costituisce l'*integrale generale* dell'equazione considerata, in questo senso, che esso rappresenta la totalità degl'integrali di essa, astrazion fatta da certi integrali detti *singolari*, definiti da un' equazione a derivate parziali del 1.° ordine (*integrale singolare del 1.° ordine*).

Tale carattere, di potersi cioè racchiudere in un' unica espressione analitica tutti gl' integrali (fatta sempre eccezione per gl' integrali singolari), non appartiene a tutte le equazioni del 2.° ordine; e questa osservazione, unitamente alla forma delle (1), (2), mostra come l' estensione tentata dall' autore non riesca se non incompletamente, come cioè le considerazioni che si riferiscono a *qualunque* equazione del 1.° ordine possano trasportarsi soltanto a certi *tipi particolari* di equazioni del 2.° ordine. Ma, come bene osserva l' autore, lo studio di questi tipi conduce a risultati importanti per la teoria generale.

Conviene a questo punto ricordare alcune delle nozioni introdotte da Lie nella teoria delle equazioni differenziali.

Per *elemento a due dimensioni* (x, y, z, p, q) s' intende l' insieme del punto di coordinate x, y, z e del piano di coseni direttori proporzionali a $p, q, -1$ passante per esso.

Una *varietà doppiamente infinita* M_2 d' elementi a due dimensioni è un insieme di elementi dipendenti da due parametri arbitrari in modo da soddisfare all' equazione:

$$dz = pdx + qdy.$$

Essa può essere costituita:

a) Da un punto associato a tutti gli ∞^2 piani passanti per esso;

b) Dagli ∞^1 punti d' una linea, associati ciascuno cogli ∞^1 piani passanti per la tangente in esso;

c) Dagli ∞^2 punti d' una superficie associati coi rispettivi piani tangenti.

Un integrale d' un' equazione a due variabili indipendenti è una M_2 i cui elementi soddisfanno all' equazione.

Ciò premesso, si domanda anzitutto che cosa debba intendersi per *integrale generale* d' un' equazione del 2.° ordine:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0. \qquad (3)$$

L' autore comincia collo stabilire di designare col nome di *Problema di Cauchy* il problema di determinare un integrale passante per una data curva C e tangente lungo la stessa ad una data sviluppabile D; tale problema è risolubile, e in modo unico, fatta eccezione per le linee per cui:

$$R\,dx^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 = 0,$$

essendo:

$$R = \frac{dF}{dr},\ S = \frac{dF}{ds},\ T = \frac{dF}{dt}.$$

Adotta poi la seguente definizione, dovuta a Darboux: *Un integrale è generale, se si possono determinare le costanti o le funzioni arbi-*

trarie da cui esso dipende in modo da rendere soddisfatto il problema di Cauchy, o, ciò che è equivalente, *in modo da far prendere alla funzione e ad una delle sue derivate parziali del 1.° ordine una serie continua di valori dati lungo una curva.*

Dall' integrale generale così definito possono dedursi tutti gli integrali dell' equazione, eccetto quelli *(integrali singolari)* per cui R, S e T sono nulle.

La definizione di integrale generale data pei tipi considerati in principio rientra come caso particolare in quella di Darboux.

Il capitolo finisce con un'osservazione, la quale mette in chiaro un nuovo carattere speciale delle equazioni particolari al cui studio esso è in gran parte dedicato.

Se traduciamo in linguaggio analitico la definizione geometrica di integrale generale data per tali equazioni, vediamo come l' integrale generale risulti da un integrale completo, in modo perfettamente analogo a quanto avviene per le equazioni del 1.° ordine, col metodo detto della *variazione delle costanti.* Orbene, tale analogia non sussiste più per le equazioni del 2.° ordine più generali (3). Infatti, volendo stabilire le condizioni perchè il metodo accennato, applicato all' integrale completo d' un' equazione del 2.° ordine (contenente 5 costanti arbitrarie), conduca ad un nuovo integrale di essa, si giunge, salvo casi particolari, ad un sistema di equazioni incompatibili.

C. II. *Le equazioni di Monge e d'Ampère.* — Le equazioni considerate in modo particolare nel precedente capitolo appartengono, come si è detto, al tipo di Monge-Ampère:

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N\,(rt - s^2) = 0, \qquad (4)$$

dove H, K, L, M, N, sono funzioni qualunque di x, y, z, p, q. Allo studio dell' equazione (4) è dedicato il 2.° capitolo.

Per la risoluzione del problema di Cauchy l' autore si vale del soccorso d' una geniale interpretazione geometrica. Sieno:

$$x = x\,(\lambda),\ y = y\,(\lambda),\ z = z\,(\lambda),\ p = p\,(\lambda),\ q = q\,(\lambda)$$

le equazioni che definiscono la curva C e la sviluppabile D, ossia la varietà semplicemente infinita M_1 che deve essere contenuta nell' integrale (varietà doppiamente infinita) da determinarsi. I valori di r, s, t lungo la curva C dovranno soddisfare alla (4) ed alle:

$$p'\,(\lambda) = rx'\,(\lambda) + sy'\,(\lambda),\ q'\,(\lambda) = sx'\,(\lambda) + ty'\,(\lambda). \qquad (5)$$

Considerando le r, s, t come le coordinate d'un punto dello spazio, le (5), per ogni valore fisso di λ, rappresentano una retta Δ parallela ad una generatrice del cono T:

$$s^2 - rt = 0, \qquad (6)$$

la (4) (per $N \neq 0$) una quadrica le cui generatrici sono parallele a quelle del cono stesso. In generale la Δ incontra la Σ in un solo punto a distanza finita, e però r, s, t, quindi anche le derivate successive, sono determinate in modo unico. Può avvenire tuttavia che la Δ giaccia sulla Σ; allora le equazioni (4), (5) si riducono a due sole, ed una delle r, s, t può esser presa ad arbitrio. In questo caso si dice che la M_1 è una *varietà caratteristica* dell'equazione (4). Poichè sulla Σ giacciono in generale due sistemi di generatrici parallele a quelle del cono T, ogni equazione della forma (4) ammette in generale due sistemi di varietà caratteristiche. Ogni M_2 che costituisce un integrale della (4) è un luogo di varietà caratteristiche; ed ogni varietà caratteristica appartiene ad infiniti integrali. La determinazione delle caratteristiche costituisce l'essenza del metodo di Monge, che qui si trova svolto in tutti i suoi particolari col sussidio dell'accennata interpretazione geometrica. Se $N \neq 0$, i due sistemi di caratteristiche sono rappresentati dai sistemi d'equazioni:

$$\left.\begin{aligned} dz - pdx - qdy &= 0 \\ Ndp + Ldx + \lambda_1\, dy &= 0 \\ Ndq + \lambda_2\, dx + Hdy &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} dz - pdx - qdy &= 0 \\ Ndp + Ldx + \lambda_2\, dy &= 0 \\ Ndq + \lambda_1\, dx + Hdy &= 0 \end{aligned}\right\},$$

dove λ_1, λ_2 sono le radici dell'equazione:

$$\lambda^2 + 2K\lambda + HL - MN = 0.$$

Se $N = 0$, $H \neq 0$, $L \neq 0$, si ha invece:

$$\left.\begin{aligned} dz - pdx - qdy &= 0 \\ dy - \lambda_1\, dx &= 0 \\ H\lambda_1\, dp + Ldq + M\lambda_1\, dx &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} dz - pdx - qdy &= 0 \\ dy - \lambda_2\, dx &= 0 \\ H\lambda_2\, dp + Ldq + M\lambda_2\, dx &= 0 \end{aligned}\right\},$$

dove λ_1, λ_2 sono le radici della:

$$H\lambda^2 - 2K\lambda + L = 0;$$

e queste equazioni si modificano lievemente se una delle H, L, od ambedue, sono nulle..

Una trasformazione di contatto muta un'equazione (4) in una della stessa forma, e le caratteristiche dell'una in quelle dell'altra. Ora, poichè dalle equazioni d'uno dei sistemi di caratteristiche si può risalire all'equazione del 2.° ordine (ponendo $rdx + sdy$, $sdx + tdy$ in luogo di dp, dq ed eliminando $\frac{dy}{dx}$), per applicare ad un'equazione del 2.° ordine una trasformazione di contatto, basterà applicarla alle equazioni di uno dei suoi sistemi di caratteristiche.

Se $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ sono le equazioni d'un sistema di caratteristiche, e se possono determinarsi coefficienti λ, μ, ν tali che

$\lambda A + \mu B + \nu C$ sia un differenziale esatto du, allora ogni integrale dell'equazione del 1.° ordine $u =$ cost. è un integrale dell' equazione proposta. Se può trovarsi anche un' altra combinazione integrabile dv, allora ogni integrale dell' equazione:

$$u = \varphi(v), \tag{7}$$

dove φ è una funzione arbitraria, è un integrale della (4), e l'integrale generale dell' una è pure l'integrale generale dell'altra. La (7) dicesi *integrale intermedio*. In generale essa non può integrarsi senza prima fissare la forma della funzione φ. Però, se si ha a risolvere il problema di Cauchy, la conoscenza della M_1 che deve appartenere all' integrale cercato permette di determinare la forma della φ, dopodichè il problema è ridotto alla determinazione dell' integrale di un' equazione del 1.° ordine che passa per una curva data.

I sistemi d'equazioni a differenziali totali che definiscono le caratteristiche possono trasformarsi in sistemi d'equazioni lineari a derivate parziali del 1.° ordine. Così p. e. per $N \neq 0$ si hanno i due sistemi seguenti, dove V rappresenta la funzione incognita (integrale intermedio):

$$\left.\begin{aligned} N\left(\frac{dV}{dx} + p\frac{dV}{dz}\right) - L\frac{dV}{dp} - \lambda_1\frac{dV}{dq} = 0 \\ N\left(\frac{dV}{dy} + q\frac{dV}{dz}\right) - \lambda_2\frac{dV}{dp} - H\frac{dV}{dq} = 0 \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} N\left(\frac{dV}{dx} + p\frac{dV}{dz}\right) - L\frac{dV}{dp} - \lambda_2\frac{dV}{dq} = 0 \\ N\left(\frac{dV}{dy} + q\frac{dV}{dz}\right) - \lambda_1\frac{dV}{dp} - H\frac{dV}{dq} = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Due integrali qualunque dei due sistemi corrispondenti ad una medesima equazione del 2.° ordine sono in involuzione. Se uno dei due sistemi ammette 3 integrali distinti, ossia è jacobiano, esso è identico all'altro sistema. In questo caso l'equazione appartiene all' uno o all'altro dei due tipi studiati nel C. I, e il suo integrale generale si ottiene con semplici eliminazioni quando si conoscano i tre integrali dell'accennato sistema jacobiano. Non è vero però reciprocamente che, ogniqualvolta i due sistemi sono identici, esistano 3 integrali distinti; soltanto può dimostrarsi che in questo caso se non vi sono 3 integrali, non può esservene tutt'al più che uno solo.

Segue l'esame dettagliato di tutti i casi possibili, e cioè:

Equazioni a caratteristiche coincidenti $\left\{\begin{array}{l}\text{Tre integrali.}\\ \text{Un integrale.}\\ \text{Nessun integrale.}\end{array}\right.$

Equazioni a caratteristiche distinte:
- Ciascun sistema ha 2 integrali.
- Un sistema ha 2 integrali e l'altro 1.
- Un sistema ha 2 integrali e l'altro 0.
- Ciascun sistema ha 1 integrale.
- Un sistema ha 1 integrale e l'altro 0.
- Nessun sistema ha integrali.

Il metodo di Ampère conduce agli stessi calcoli di quello di Monge, ma si applica a certe equazioni a cui quest' ultimo non è applicabile, come dimostra l'autore sviluppando, oltre l'esempio delle superficie d' area minima dato da Ampère, un altro esempio più generale.

C. III. *Applicazioni diverse.* — In questo capitolo sono esposte varie interessanti applicazioni delle precedenti teorie. Ricordiamone alcune: Superficie di Joachimsthal (di cui le linee di curvatura d'un sistema giacciono in piani passanti per una retta fissa), superficie di Monge (di cui le linee di curvatura d'un sistema giacciono su sfere concentriche), superficie a linee di curvatura piane, superficie con data imagine sferica, equazioni di cui le caratteristiche sono le asintotiche, le linee di curvatura, o linee coniugate, delle superficie integrali.

C. IV. *Teoria generale delle caratteristiche.* — Conviene ora estendere il concetto di caratteristica alle equazioni del 2.° ordine di forma qualunque:

$$\mathrm{F}\,(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0. \tag{8}$$

Chiamando *elemento del secondo ordine* ogni insieme di valori (x, y, z, p, q, r, s, t), si dice *caratteristica del secondo ordine* ogni varietà semplicemente infinita:

$$x = x\,(\lambda),\ y\,(\lambda),\ \ldots\ldots,\ t = t\,(\lambda)$$

di elementi del 2.° ordine che soddisfanno alle equazioni:

$$\mathrm{F} = 0,\ \left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right) dx\, dy + \mathrm{R}\, dr\, dy + \mathrm{T}\, ds\, dx = 0,$$

$$\left(\frac{d\mathrm{F}}{dy}\right) dx\, dy + \mathrm{R}\, ds\, dy + \mathrm{T}\, dt\, dx = 0,$$

$$dz = pdx + qdy,\quad dp = rdx + sdy,\quad dq = sdx + tdy,$$

$$\mathrm{R}\, dy^2 - \mathrm{S}\, dx\, dy + \mathrm{T}\, dx^2 = 0,$$

dove:

$$\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right) = \frac{d\mathrm{F}}{dx} + p\,\frac{d\mathrm{F}}{dz} + r\,\frac{d\mathrm{F}}{dp} + s\,\frac{d\mathrm{F}}{dq},$$

$$\left(\frac{d\mathrm{F}}{dy}\right) = \frac{d\mathrm{F}}{dy} + q\,\frac{d\mathrm{F}}{dz} + s\,\frac{d\mathrm{F}}{dp} + t\,\frac{d\mathrm{F}}{dq},$$

$$R = \frac{dF}{dr}, \quad S = \frac{dF}{ds}, \quad T = \frac{dF}{dt}.$$

Esistono in generale due sistemi distinti di caratteristiche del 2.° ordine.

Introducendo il concetto di *elemento d'ordine n*, si possono analogamente definire le *caratteristiche d'ordine n.*

Supposto $S^2 - 4RT \neq 0$, ogni caratteristica d'ordine n è contenuta in infinite caratteristiche d'ordine $n + 1$ dipendenti da una costante arbitraria. Tutti gli elementi d'una caratteristica del 2.° ordine appartengono ad infinite superficie integrali dipendenti da infinite costanti arbitrarie. Due caratteristiche del 2.° ordine, appartenenti a sistemi diversi e aventi comune un elemento del 2.° ordine, determinano una ed una sola superficie integrale.

Il lettore avrà già notato come, mentre le *caratteristiche* delle equazioni di Monge-Ampère erano varietà di elementi del primo ordine, quelle attualmente definite sieno varietà di elementi del 2.° ordine. Però l'autore, prendendo di nuovo in considerazione la proprietà fondamentale delle caratteristiche delle equazioni di Monge-Ampère, di appartenere cioè ad una infinità di integrali, o più esattamente che il valore d'una delle derivate del 2.° ordine può su di esse scegliersi ad arbitrio, si chiede se vi sieno altre equazioni del 2.° ordine per cui esistano varietà di elementi del 1.° ordine aventi tale proprietà; e a queste varietà, se esistono, dà il nome di *caratteristiche del primo ordine*. Ogni caratteristica del 1.° ordine appartiene ad infinite caratteristiche del 2.° ordine.

Perchè una varietà M_1:

$$x = x(\lambda), \ y = y(\lambda), \ z = z(\lambda), \ p = p(\lambda), \ q = q(\lambda)$$

sia una caratteristica del 1.° ordine per l'equazione (8), le equazioni:

$$F = 0, \ dp = rdx + sdy, \ dqx = sdx + tdy$$

devono ridursi a due sole relazioni distinte fra le r, s, t. Colla rappresentazione geometrica già adottata, dove r, s, t si considerano come le coordinate d'un punto dello spazio, la superficie Σ avente per equazione la (8) deve contenere delle rette parallele alle generatrici del cono T di equazione (6). Si possono quindi distinguere le equazioni del 2.° ordine in quattro specie:

1. Le equazioni generali, che ammettono due sistemi di caratteristiche del 2.° ordine;

2. Le equazioni per cui Σ è una rigata d'ordine superiore al secondo, colle generatrici parallele a quelle del cono T; esse hanno due sistemi di caratteristiche, l'uno del 1.° e l'altro del 2.° ordine;

3. Le equazioni di Monge-Ampère, per cui Σ è una quadrica o

un piano; esse hanno due sistemi, distinti o no, di caratteristiche del 1.º ordine;

4. Le equazioni per cui Σ è una sviluppabile avente T per cono direttore; esse hanno due sistemi coincidenti di caratteristiche del 1.º ordine.

Le equazioni della 1.ª specie non possono ammettere integrali intermedi dipendenti da due costanti arbitrarie.

Riguardo agl' integrali intermedi, si presenta il problema di determinare tutte le equazioni tali, che le due equazioni a cui deve soddisfare un integrale intermedio formino un sistema in involuzione. Tali equazioni sono a caratteristiche coincidenti, e risultano dall'eliminazione del parametro m fra le:

$$r + 2sm + tm^2 + 2\psi = 0, \qquad s + tm + \frac{d\psi}{dm} = 0,$$

dove ψ è una funzione di x, y, z, p, q, m che soddisfa ad una certa equazione a derivate parziali del 2.º ordine.

C. V. *Il metodo di Laplace.* — Questo metodo è troppo noto perchè abbiamo a trattenervici a lungo. Dopo averne esposti i principii e i risultati, l'autore, seguendo le tracce di Darboux, tratta il problema di determinare tutte le equazioni integrabili con tale metodo. È pure importante, per la teoria di cui si tratta, il seguente teorema: Se fra $n + 1$ integrali dell'equazione:

$$s + ap + bq + cz = 0$$

v' ha una relazione lineare omogenea i cui coefficienti non sono tutti costanti, ma sono funzioni di una sola delle variabili indipendenti, la relativa serie di Laplace termina dopo $n - 1$ trasformazioni al più, e reciprocamente.

Si deve a Legendre un processo di trasformazione, analogo a quello di Laplace, per le equazioni della forma:

$$Ar + 2\,Bs + Ct + Dp + Eq + Fz + G = 0,$$

dove A, B,....., G sono funzioni di x, y, e $B^2 - AC \neq 0$. L'autore espone questo processo seguendo la via indicata da Imschenetsky, e si arresta particolarmente sul caso in cui i coefficienti dell' equazione sono funzioni reali e si vogliono usare soltanto trasformazioni reali.

C. VI. *I sistemi in involuzione.* — In questo capitolo l'autore si propone di studiare i sistemi simultanei formati da un'equazione del 2.º ordine e da una o più equazioni d'ordine qualunque.

Cominciando dal sistema d' una equazione del 2.º ordine e d'una del 1.º, si trova che, quando quest' ultima non è un integrale intermedio della prima, l'integrale generale del sistema contiene tutt'al più due costanti arbitrarie.

Se si hanno ora due equazioni del 2.º ordine, il loro integrale, se esiste, dipende tutt' al più da 5 costanti arbitrarie. Fa eccezione il caso in cui le 4 equazioni che si ottengono derivando le due equazioni date rispetto ad x ed a y si riducono a tre sole distinte. In questo caso il sistema si dice, secondo Lie, *in involuzione*. Le condizioni perchè ciò avvenga assumono aspetto particolarmente semplice quando il sistema si pone sotto la forma:

$$r + f(x, y, z, p, q, s) = 0, \quad t + \varphi(x, y, z, p, q, s) = 0,$$

il che è sempre possibile; esse divengono allora:

$$1 - \frac{df}{ds}\frac{d\varphi}{ds} = 0, \quad \left(\frac{df}{dy}\right) - \frac{df}{ds}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = 0,$$

dove:

$$\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d}{dx} + \frac{d}{dz}p - \frac{d}{dp}f + \frac{d}{dq}s,$$
$$\left(\frac{d}{dy}\right) = \frac{d}{dy} + \frac{d}{dz}q + \frac{d}{dp}s - \frac{d}{dq}\varphi.$$

L' integrazione d' un sistema in involuzione può ridursi a quella d' un sistema d' equazioni differenziali ordinarie. Ogni superficie integrale è un luogo di certe varietà semplicemente infinite d'elementi del 2.° ordine, che diconsi *varietà caratteristiche* del sistema, e il cui insieme dipende in generale da 5 costanti arbitrarie.

Il concetto di sistema in involuzione, e i risultati che vi si connettono, possono estendersi ai sistemi formati da un' equazione del 2.° ordine e da una d' ordine qualunque. Detta *orientazione* ogni infinità semplice d' elementi *uniti* d' ordine n (cioè tale che per essi sieno soddisfatte la:

$$dz = pdx + qdy$$

e le sue analoghe sino all' ordine $n - 1$), si trova come proprietà fondamentale dei sistemi in involuzione d' un' equazione del 2.° ordine e d' una d' ordine n, che ogni orientazione d' elementi d' ordine n appartenente a queste due equazioni — cioè, i cui elementi soddisfanno ad esse ed, eventualmente, a quelle che se ne deducono per derivazioni successive — determina un integrale del sistema. Perchè il sistema:

$$r + f(x, y, z, p, q, s) = 0, \quad \varphi = 0,$$

dove $\varphi = 0$ è un' equazione d'ordine n, ammetta infiniti integrali dipendenti da infinite costanti arbitrarie, è necessario, o che esso sia in involuzione, o che ammetta tutti gl' integrali d' uno o più sistemi in involuzione:

$$r + f = 0, \quad \psi = 0,$$

dove $\psi = 0$ è un' equazione d' ordine inferiore ad n.

L' autore studia poscia il sistema d' un' equazione del 2.° ordine e di due equazioni d' ordine qualunque.

Il punto essenziale della teoria dei sistemi in involuzione è questo, che ogni integrale d'un tale sistema è un luogo di varietà d'elementi dipendenti da un numero finito di costanti arbitrarie, e quindi determinabili mediante l'integrazione d'un sistema d'equazioni differenziali ordinarie.

C. VII. *Il metodo di Darboux.* — Questo metodo si fonda sull'osservazione seguente: Se $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ sono 2 integrali delle equazioni delle caratteristiche d'ordine qualunque n della (8), il sistema:

$$F = 0, \ u - \varphi(v) = 0,$$

dove φ è una funzione arbitraria, è in involuzione, e quindi ogni integrale della 1.ª equazione soddisfa anche alla seconda, che dicesi talvolta un suo *integrale intermedio*; e reciprocamente, se $u - \varphi(v) = 0$ è un integrale intermedio della (8), le u, v sono integrali, o, come li chiama l'autore, *invarianti,* delle equazioni d'un sistema di caratteristiche.

È da osservarsi, che può avvenire che le equazioni delle caratteristiche d'un certo ordine h non ammettano alcun integrale, e che ne ammettano invece quelle delle caratteristiche d'ordine $h + 1$.

Se si possono trovare due integrali intermedi:

$$u - \varphi(v) = 0, \ u_1 - \psi(v_1) = 0, \qquad (9)$$

l'integrale generale del sistema (8), (9) dipende da un numero finito di costanti arbitrarie, e però può ottenersi mediante l'integrazione d'un sistema di equazioni differenziali ordinarie.

Se uno solo dei sistemi di caratteristiche conduce ad un integrale intermedio, la risoluzione del problema di Cauchy può ridursi all'integrazione di equazioni differenziali ordinarie.

Sono da notarsi le seguenti proprietà degli invarianti.

Se u, v sono due invarianti distinti d'ordine n d'un sistema di caratteristiche, allora $\frac{dv}{dx} : \frac{du}{dx}$ e $\frac{dv}{dy} : \frac{du}{dy}$, il cui valore comune può denotarsi con $\frac{dv}{du}$, rappresentano un nuovo invariante del medesimo sistema distinto da u, v, e in generale d'ordine $n + 1$.

Ne segue, che, se un sistema ammette due invarianti distinti, esso ne ammette infiniti. Reciprocamente, se un sistema ammette infiniti invarianti distinti, questi possono tutti dedursi da due di essi u, v mediante derivazioni successive come segue:

$$v_1 = \frac{dv}{du}, \ v_2 = \frac{dv_1}{du}, \ldots\ldots$$

Ciascun sistema di caratteristiche ammette tutt'al più un invariante d'ordine n per ogni n maggiore di 2.

Se un sistema ammette un invariante del 1.º ordine, esso può avere tutt'al più un invariante del 2.º ordine.

Il numero massimo degli invarianti distinti del 1.º ordine è 2 per ciascun sistema; e tale numero non può essere raggiunto se non nel caso delle equazioni di Monge-Ampère.

Il numero massimo degli invarianti distinti d'ordine non superiore ad n è di $n + 1$ per ciascun sistema; e tale numero è raggiunto per uno dei sistemi sempre e soltanto quando l'equazione ammette un integrale intermedio del 1.º ordine con due costanti arbitrarie.

La ricerca degli invarianti si riduce all'integrazione d'un sistema di equazioni differenziali ordinarie.

I risultati esposti non sussistono più integralmente quando i due sistemi di caratteristiche coincidono. Si trova che le sole equazioni a caratteristiche coincidenti che ammettono invarianti d'ordine > 1, e a cui quindi è applicabile il metodo di Darboux, sono quelle — già considerate nel C. IV — per cui le equazioni che determinano gli integrali intermedi formano un sistema in involuzione.

Mediante la teoria dei gruppi di trasformazioni si possono costruire equazioni del 2.º ordine integrabili col metodo di Darboux.

Il capitolo termina coll'esposizione del metodo d'integrazione di König (Math. Ann., T. XXIV), che non differisce essenzialmente da quello di Darboux, sebbene il punto di partenza ne sia alquanto diverso.

C. VIII. *Le equazioni della prima classe,* — o, più precisamente, le equazioni che ammettono un integrale della 1.ª classe. Questa denominazione, che è dovuta ad Ampère, dà luogo a parecchie considerazioni. Anzitutto la definizione di *integrale generale* di Ampère non coincide con quella di Darboux adottata dall'autore; un integrale può essere generale nel senso di Ampère senza esserlo nel senso di Darboux, non però all'opposto. Quanto al significato di *integrale generale di prima classe*, che non è ben precisato da Ampère, l'autore lo fissa come segue: Si dice che un'equazione (8) *ammette un integrale generale di 1.ª classe*, o che *è della 1.ª classe*, se si può rappresentare il suo integrale generale colle formole:

$$\left.\begin{aligned} x &= V_1[\alpha, \beta, f_1(\alpha), f_1'(\alpha), \ldots, f_2(\alpha), f_2'(\alpha), \ldots, \varphi_1(\beta), \varphi_1'(\beta), \ldots, \varphi_2(\beta), \varphi_2'(\beta), \ldots] \\ y &= V_2[\alpha, \beta, f_1(\alpha), f_1'(\alpha), \ldots, f_2(\alpha), f_2'(\alpha), \ldots, \varphi_1(\beta), \varphi_1'(\beta), \ldots, \varphi_2(\beta), \varphi_2'(\beta), \ldots] \\ z &= V_3[\alpha, \beta, f_1(\alpha), f_1'(\alpha), \ldots, f_2(\alpha), f_2'(\alpha), \ldots, \varphi_1(\beta), \varphi_1'(\beta), \ldots, \varphi_2(\beta), \varphi_2'(\beta), \ldots] \end{aligned}\right\}, (10)$$

dove le V_1, V_2, V_3 sono funzioni determinate di 2 variabili ausiliarie α, β, di p funzioni di α, $f_1(\alpha), \ldots, f_p(\alpha)$, di q funzioni di β, $\varphi_1(\beta), \ldots, \varphi_q(\beta)$, e delle loro derivate in numero finito, essendo le $f_i(\alpha)$ legate da $p - 1$ equazioni differenziali d'ordine qualunque, le $\varphi_i(\beta)$ legate da $q - 1$ equazioni differenziali d'ordine qualunque, — per modo che le

x, y, z dipendono, in sostanza, da una funzione arbitraria di α e da una di β.

Il metodo di Darboux è applicabile a tutte le equazioni della 1.ª classe.

Il problema di determinare tutte le equazioni il cui integrale ha la forma (10) è stato trattato da Moutard e da Cosserat per $p = 1$, $q = 1$.

C. IX. *Trasformazioni delle equazioni del 2.º ordine.* — Come si è veduto, il metodo di Darboux è il mezzo più potente finora conosciuto per ridurre l'integrazione d'un'equazione a derivate parziali del 2.º ordine a quella d'un sistema d'equazioni differenziali ordinarie. Ora, se si applica ad un'equazione del 2.º ordine una trasformazione di contatto, l'equazione risultante è o non è integrabile col metodo di Darboux secondochè lo era o no la primitiva. Quindi, mentre le trasformazioni di contatto bastano, in sostanza, a risolvere il problema dell'integrazione delle equazioni del 1.º ordine, esse non porgono, almeno teoricamente, alcun aiuto per l'integrazione delle equazioni del 2.º ordine. V'hanno però altre trasformazioni che possono servire utilmente in certi casi, e lo studio di esse costituisce l'oggetto del presente capitolo.

Una delle più semplici trasformazioni è la:

$$z' = \frac{dz}{dy}, \tag{11}$$

e si presenta la questione di determinare le equazioni la cui trasformata mediante la (11) è ancora del 2.º ordine. La forma generale di tali equazioni è:

$$\mathrm{X}r + \mathrm{X}_1 p + \mathrm{X}_2 z + \mathrm{F}(x, y, q, s, t) = 0,$$

dove X, X_1, X_2 sono funzioni della sola x.

Altre trasformazioni d'apparenza meno semplice si riducono, o colla applicazione d'una trasformazione di contatto o in altro modo, alla (11).

La considerazione seguente permette di costruire nuove e interessanti trasformazioni. Abbiansi due equazioni del 1.º ordine con due funzioni incognite z, z':

$$\mathrm{F}_1(x, y, z, z', p, q, p', q') = 0, \quad \mathrm{F}_2(x, y, z, z', p, q, p', q') = 0. \tag{12}$$

Eliminando una delle funzioni, per es. z, si ottiene *in certi casi* un'equazione (A) del secondo ordine in z', ed analogamente può avvenire che eliminando z' si giunga ad un'equazione (B) del 2.º ordine in z. Se queste due circostanze si avverano insieme, le equazioni A, B possono considerarsi come la trasformata l'una dell'altra. L'autore studia più particolarmente il caso in cui le (12) sono lineari rispetto alle funzioni incognite ed alle loro derivate.

Più generalmente si può considerare il sistema di 4 equazioni:

$$F_i (x, y, z, p, q, x', y', z', p', q') = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

che coincide col precedente quando due delle equazioni si riducono a $x' = x$, $y' = y$. Se, eliminando da questo sistema x, y, z oppure x', y', z', si ottiene in ambi i casi un'equazione del 2.° ordine, le due equazioni possono considerarsi come la trasformata l'una dell'altra. La trasformazione così definita dicesi *trasformazione di Bäcklund.* Un'equazione risultante da una trasformazione di Bäcklund ammette almeno un sistema di caratteristiche del 1.° ordine.

Invece di due sole equazioni, se ne può considerare un numero qualunque con un egual numero di funzioni incognite; ciò conduce a trasformazioni più generali delle precedenti.

C. X. *Generalizzazioni diverse.* — Qui l'autore estende il problema di Cauchy e il concetto di caratteristica alle equazioni d'ordine qualunque n; dimostra che una caratteristica d'ordine n appartiene ad infiniti integrali dipendenti da infinite costanti arbitrarie; studia le equazioni d'ordine n con caratteristiche d'ordine $n - 1$; estende il metodo di Darboux alle equazioni d'ordine qualunque. Passa poi a studiare i sistemi di n equazioni del 1.° ordine con due variabili indipendenti ed n funzioni incognite, e specialmente i sistemi lineari; e finisce con un cenno sulle equazioni a più di 2 variabili indipendenti.

Note. — Chiudono l'opera due note: una *Sull'equazione ausiliaria* d'un'equazione del 2.° ordine, la cui introduzione è dovuta a Darboux, l'altra *Sulle caratteristiche delle equazioni simultanee.*

L'analisi dettagliata che abbiamo fatto dell'opera di Goursat ci dispensa dal pronunciare un giudizio su di essa. Diremo solo che riteniamo tale opera una guida preziosa ed indispensabile per chiunque voglia tentare di far progredire la teoria, ancora assai incompleta, delle equazioni a derivate parziali del secondo ordine. G. VIVANTI.

E. TORROJA. — *Tratado de geometría de la posición y sus aplicaciones a la geometría de la medida.* Madrid, G. Juste, 1899, 8.° gr., p. VIII+813. (Prezzo 18 Pesetas).

Prefazione. *Cap. I.* Preliminari. *Cap. II.* Parallelismo ed elementi all'infinito. *Cap. III.* Relazioni metriche fra segmenti ed angoli; perpendicolarità. *Cap. IV.* Punteggiate e fasci prospettivi. *Cap. V.* Poligoni e poliedri. *Cap. VI.* Figure prospettive nel piano o nella stella. *Cap. VII.* Generalizzazione di concetti precedenti: linee poligonali e superficie poliedriche, multivertici, multilateri e poliedri completi. *Cap. VIII.* Relazioni metriche nei poligoni, negli angoli poliedri e nei poliedri ordinari. *Cap. IX.* Figure armoniche. *Cap. X.* Punteggiate e fasci proiettivi. *Cap. XI.* Curve, coni e fasci di second' ordine. *Cap. XII.* Circonferenza. *Cap. XIII.* Relazioni proiettive tra figure del second' ordine. *Cap. XIV.* Figure omografiche e correlative. *Cap. XV.* Omografie particolari: 1.º omologia, 2.º omografia biassiale. *Cap. XVI.* Figure correlative nel piano e nello spazio. *Cap. XVII.* Serie e fasci in involuzione. *Cap. XVIII.* Sistemi in involuzione. *Cap. XIX.* 1.º Elementi immaginarì, 2.º punteggiate e fasci di second' ordine degeneri. *Cap. XX.* Superficie di second' ordine. *Cap. XXI.* 1.º Polarità rispetto ad un triangolo, triedro o tetraedro. 2.º Figure inverse rispetto a un triangolo, triedro o tetraedro. *Cap. XXII.* Relazioni metriche in figure proiettive od in involuzione. *Cap. XXIII.* Relazioni metriche in poligoni o poliedri. *Cap. XXIV.* Aree e volumi. *Cap. XXV.* Superficie poliedriche e poliedri regolari. *Cap. XXVI.* Polarità nel piano e nella stella. *Cap. XXVII.* Curve e coni di second'ordine fra loro coniugati. *Cap. XXVIII.* Diametri e centri delle curve di second' ordine. *Cap. XXIX.* Piani diametrali e diametri dei coni del second' ordine. *Cap. XXX.* Sistemi di circonferenze e di sfere ortogonali. *Cap. XXXI.* Fuochi e direttrici delle curve di second'ordine. *Cap. XXXII.* Rette focali e piani ciclici nei coni del second' ordine. *Cap. XXXIII.* Omologia di due curve o coni del second' ordine. *Cap. XXXIV.* Elementi coniugati comuni a due curve o due coni del second' ordine. *Cap. XXXV.* Sistemi di linee e di coni del secondo grado. *Cap. XXXVI.* Figure inverse rispetto ad una curva o ad un cono del second' ordine.

La semplice ispezione di quest' indice prova quanto sia vasta e variopinta la materia trattata dal dotto professore dell' Università di Madrid; giudizio questo che si conferma con un esame accurato dell' opera, il quale mostra che, se l'A. odia le citazioni, ama studiare e sa assimilare quanto di meglio venne pensato e scritto al di là dei confini della sua patria. Riguardo all' ordinamento della materia, se egli ci sembra degno di encomio per la costante intima fusione che sa operare tra la geometria del piano e la geometria dello spazio, altrettanto lodevole non ci appare per l' introduzione di certi capitoli di geometria metrica concernenti dei soggetti che invano si tenterebbe di porre sotto lo scettro della geometria proiettiva. Forse le conseguenti irregolarità nella compagine della poderosa opera dipendono dal fatto che, mentre le sezioni di essa relative alla geometria di posizione sono totalmente opera del Prof. Torroja, le altre vennero redatte da un suo collega, il Prof. M. Vegas.

Noi conosciamo troppo poco lo stato attuale della letteratura matematica spagnuola per osare di determinare il posto che prenderà in essa la nuova opera. Ma questa contiene tanto di buono che siamo sicuri contribuirà efficacemente ad una larga espansione al di là de' Pirenei delle idee feconde che da cinquant'anni infusero alla geometria una vita novella. G. L.

Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss *und* Wolfgang Bolyai. *Mit Unterstützung der ungarischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben von* Franz Schmidt *und* Paul Stäckel. 4.⁰ p. xvi + 208. Leipzig, Teubner, 1899. [Prezzo Mk. 16].

Delle lettere pubblicate in questo splendido volume (alcune sono riprodotte in eliografia) il contennto — almeno per quanto concerne la storia della geometria non euclidea — è generalmente noto. Giacchè dei lunghi estratti ne fece conoscere sin dal 1877 E. Schering, in occasione del primo centenario della nascita di Gauss (v. *Göttinger Abhandlungen*, T. XXII; *Annali di Matematica*, 2.ª Serie, T. IX), ed altrettanto fecero più tardi P. Stäckel e F. Engel nella memoria *Gauss die beiden Bolyai und die nicht-euklidische Geometrie* (Mathem. Annalen, T. XLIX). Tuttavia la loro pubblicazione integrale, decisa e sovvenuta dall' Accademia ungherese, non sarà giudicata superflua, nè riuscirà priva d' interesse sia per gli ammiratori dell'infelice professore di M. Vásárhelly, sia per quelli a cui piace udire Gauss parlare delle vicende della propria esistenza e descrivere le tappe della sua gloriosa carriera scientifica. Le numerose postille, le lunghe note finali e gli indici rendono più facile e proficua la lettura dell' opera che annunciamo, la quale è un nuovo elemento della raccolta di opera sopra Lobatschewsky e Bolyai che la Casa Teubner va formando sotto la saggia direzione dei sig. Engel e Stäckel. G. L.

L. Bianchi. *Vorlesungen über Differentialgeometrie. Autorisierte deutsche Uebersetzung von* Max Lukat. 8.° gr., p. xvi + 659. Leipzig, Teubner [Prezzo complessivo dei tre fascicoli Mk. 22, 60].

A questa traduzione delle ottime *Lezioni di geometria diffierenziale* del Bianchi dovranno ricorrere anche coloro che possiedono l' originale, grazie a parecchie notevoli migliorie e particolarmente ai due nuovi importanti capitoli aggiunti. Nei quali sono luminosamente compendiate le formole della geometria differenziale dello spazio a n dimensioni, con speciale riguardo agli spazi (di Riemann) di curvatura costante. G. L.

P. Mansion. *Éléments de la théorie des déterminants avec de nombreux exercices.* Sixième édition, revue et augmentée. Paris, Gauthiers-Villars, 1899. 8.° p. iv + 91 [Prezzo fr. 3].

Elemente der Theorie der Determinanten mit vielen Uebengsaufgaben. Dritte vermehrte Auflage. Leipzig, Teubner, 1899, 8.⁰ p. 103 [Prezzo Mk. 2. 60].

La nuova edizione del simpatico libretto del Mansion si differenzia dalle precedenti per numerose aggiunte e non meno abbondanti perfezionamenti; ma il piano generale ed i criteri di esposizione vennero con piena ragione conservati. Siamo quindi sicuri che esso conserverà il posto che da tanti anni seppe acquistarsi nelle biblioteche degli scolari e dei professori; e continuerà ad accrescere il numero dei conosciutori e dei cultori di quelle discipline che Sylvester considera come un' « algebra upon algebra ».

Altrettanto può ripetersi riguardo alla terza edizione della nota versione tedesca. G. L.

Dott. Federico Amodeo. — *Aritmetica particolare e generale.* Volume primo degli Elementi di Matematica. Opera destinata alle Scuole secondarie del Regno d'Italia. Napoli, L. Pierro, 1900, 8.⁰, p. XV+415 [Prezzo L. 3,50].

Il libro del prof. Amodeo deve essere il primo di una serie di volumetti che, ad imitazione di quelli classici del Baltzer, raccolgano l'insieme delle matematiche elementari e che, meglio di quelli, ormai un po' vecchi, rispondano ai perfezionamenti, al certo molto notevoli, che le matematiche elementari sono venute continuamente acquistando in questi ultimi anni. Inoltre l'A. si propone che il libro, con questi perfezionamenti, serva utilmente di testo nelle nostre scuole secondarie.

L'Autore si è accinto al lavoro con seria preparazione e con un notevole corredo di esperienza. E credo che egli abbia, in gran parte, raggiunto lo scopo che si era prefisso.

Fra le maggiori novità che ho trovato in questo libro c'è quella di esporre la teoria dei numeri negativi prima di quella dei numeri frazionarii. A dire il vero a me sembra ciò un po' audace e l'A. stesso lo deve aver sentito tanto che, pur non volendo rinunziare al concatenamento logico delle diverse teorie che il suo pensiero ha nutrito, si decise ad introdurre nel testo delle lunghe parentesi che permettano all'insegnante di seguire il metodo che più gli aggrada. In quanto a me, desidererei che un libro per le scuole fosse semplice e nitido anche nell'ordine e nella disposizione delle sue varie parti. Un libro di testo non deve essere scritto per i pochi che, in una scuola, mostrano maggior attitudine per certi studii, bensì per la generalità. E poi, è mia opinione, che non sia da incoraggiarsi l'introduzione, nella scuola, di quegli ordinamenti delle materie da insegnare che pur sembrando, od essendo, perfettamente logici, sono, per la mente dello scolaro semplicemente fittizii, perchè il migliore fra tutti gli ordinamenti da seguire nella scuola, nell'insegnamento di una data disciplina, credo sia quello che meglio prevenga e segua lo sviluppo naturale del pensiero dello scolaro. E nel caso presente non si può negare che mentre il concetto di numero frazionario è famigliare anche a chi di matematiche non si sia mai occupato, quello di numero negativo resta qualche volta oscuro anche ai migliori fra i giovani delle nostre scuole.

Mi permetto poi di consigliare all'A. che in una nuova edizione del libro, che io gli auguro molto prossima, abbia a modificare la dimostrazione del Teor. I a pag. 135, che dà la condizione affinchè un polinomio ordinato in x sia divisibile per x-a, la quale dimostrazione sarebbe rigorosa qualora venisse dopo la teoria dei limiti. Così, nel caso che l'A. stesso non se ne sia ancora accorto, gli direi che non si può parlare di radice quadrata o cubica *vera* di un numero prima di averla definita come fa a pag. 213, n.º 15 e a pag. 230, n.º 27.

Ma questi non sono che nèi. Ho letto il libro con vero piacere e credo che insegnanti e scolari devono essere grati all'A. del suo proponimento ed aspettarsi prossima la pubblicazione degli altri volumi.

Non ho abitudine di fare della critica perchè non mi riconosco dottrina od autorità sufficienti. In questo caso poi il valore dell'A. ed il forte nome che il libro porta impresso avrebbero dovuto, più che mai, decidermi al silenzio. Però non ho saputo resistere ad una gentile insistenza.

ORAZIO TEDONE.

J. A. SERRET. — *Lehrbuch der Differential-und Integral-Rechnung. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von* AXEL HARNACK. *Zweite durchgesehene Auflage mit Unterstützung der Herren* H. LIEBMANN *und* E. ZERMELO *herausgegeben von* GEORG BOHLMANN. *Zweiter Band. Integralrechnung.* Mit 55 in den Text gedruckten Figuren, 8.º, p. XII+428. Leipzig, G. Teubner, 1899 [Prezzo Mk. 8].

È noto a tutti coloro che studiarono il *Cours de calcul différentiel et intégral* del Serret, come in esso alla straordinaria eleganza analitica contrasti la mancànza di rigore nei fondamenti, come la venustà dello stile e la ricchezza di particolari mascherino in più luoghi delle lacune che la scienza moderna ha colmati. Conservarne i pregi e toglierne i difetti, ecco lo scopo che si è proposto l'Harnack quando preparò la prima traduzione di quell'opera e che tennero presentemente dinnanzi gli egregi giovani a cui la casa Teubner affidò l'incarico di presiedere alla seconda.

La materia svolta nel volume che oggi annunciamo corrisponde ai primi *cinque* capitoli dell'originale, ma ne comprende *otto*. Venne aggiunto un I Cap. per dimostrare l'esistenza della funzione integrale, cosa che il Serret riteneva evidente, interpretando ogni integrale come misura di un'area piana. Ad esso seguono cinque capitoli che, a parte le numerose ed importanti aggiunte, corrispondono a quelli che nell'originale recano i numeri I-V. Nuovi (benchè composti con alcuni materiali forniti dal Serret) sono i due seguenti. Il primo concerne le funzioni a più variabili, l'integrazione di differenziali esatti, gli integrali curvilinei ed i planimetri. L'altro è dedicato alla teoria delle funzioni di una o più variabili complesse, con numerose applicazioni. — In appendice è riprodotto la nota dell'Harnack sulla serie di Fourier, che già aveva trovato posto nell'edizione precedente. — Molte notizie bibliografiche ed un accurato indice per materie fanno del volume analizzato anche una eccellente opera di consultazione. G. L.

NOTIZIE

I PREMI DELL' ISTITUTO DI FRANCIA. — Dal resoconto dell'adunanza pubblica tenuta addì 18 Dicembre 1899 da questa Accademia si apprende che, riguardo al Premio Bordin (tema: « Studiare le questioni relative alla determinazione, alle proprietà ed alle applicazioni del sistema di coordinate curvilinee ortogonali à n variabili. Indicare specialmente, ed in modo per quanto è possibile preciso, il grado di generalità di quei sistemi »), venne accordato una menzione onorevolissima a J. Drach; il premio Francoeur venne conferito al compianto Le Cordier ed una menzione onorevolissima al Le Roy; finalmente il premio Poncelet venne aggiudicato a E. Cosserat per la totalità dei suoi lavori di geometria e meccanica. La medaglia Arago toccò allo Stokes.

Ricordiamo che pel presente anno furono scelti come temi di concorsi i seguenti (per entrambi il termine utile per la presentazione dei manoscritti è il 1.º Ottobre 1900):

I. *Gran premio delle Scienze matematiche.* Perfezionare in qualche punto importante la ricerca del numero delle classi delle forme quadratiche a coefficienti interi con due indeterminate.

II. *Premio Bordin.* Sviluppare e perfezionare la teoria delle superficie applicabili sul paraboloide di rivoluzione.

*
* *

TEMA DI MATEMATICA POSTO A CONCORSO DALLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE ESATTE, FISICHE E NATURALI DI MADRID: *Esposizione didattica* *delle moderne teorie geometriche non-euclidee, ovvero analisi ragionata dei principali lavori sopra questa parte della scienza matematica, a partire dall' epoca di Gauss, sino ai nostri giorni.*

I lavori dovranno essere scritti in castigliano od in latino, e venire presentati anomini prima del 31 Dicembre 1901. Al migliore di essi verrà assegnato un premio di 1500 *pesetas* ed una medaglia d' oro; al successivo in merito l' *accessit*, consistente in una medaglia; ed al terzo una medaglia d' oro.

*
* *

Un centenario. In occasione del centesimo anniversario della fondazione del Politecnico di Berlino, il Rettore ed il Senato hanno pubblicato un sontuoso volume (*Chronik der Königlichen technischen Hochschule zu Berlin,* 1799-1899. Berlin, W. Ernst und Sohn, 1899) contenente tutte le più dettagliate notizie intorno all' evoluzione ed allo stato attuale di questa Scuola. Tale volume verrà consultato con gran profitto da coloro che, dopo di avere constatato il prodigioso sviluppo della Germania nel campo tecnico ed industriale, vorranno risalire dagli effetti alle cause. Ma lo storico della matematica pura preferirà ad esso un modesto opuscolo, pubblicato nella medesima occasione dal Prof. E. Lampe, perchè insegna dei particolari ignorati intorno ad uno dei più significanti matematici tedeschi del nostro secolo; eccone il titolo: *Die Mathematik in den Jahren* 1884-1899. *Nebst Actenstücken zum Leben von Siegfried Aronhold weiland Professor der Mathematik* (1860-1883) *au der königlichen techinischen Hochschule zu Berlin. Mit seinem Bildniss.* (Berlin, W. Ernst und Sohn 1899).

*
* *

Due congressi internazionali verranno ottenuti a Parigi in occasione della prossima esposizione mondiale, i quali — oltre a quello dei matematici — interessano i cultori delle scienze esatte.

Il primo è il *Congrès d'histoire des sciences, cinquième section du Congrès international d'Histoire comparée;* ne è presidente onorario G. Berthelot, e presidente effettivo P. Tannery, avrà luogo nei giorni 23-28 del prossimo Luglio e per prendervi parte si deve pagare la tassa di 20 fr. Interessano specialmenti i nostri lettori i seguenti articoli del Programma:

1. Origine delle cifre moderne: questioni relative a Boezio e Gerberto,

2. Storia dell' Astrologia; in particolare influenza esercitata dalle sue dottrine sopra lo sviluppo dell' Astronomia. Astrologia ed Astronomia dei popoli dell' Estremo Oriente.

3. Storia dello stabilimento delle unità di misura.

4. Ricerche sopra gli strumenti matematici (per l'estimo, l'astronomia, la misura del tempo, ecc.) adoperati durante il Medio Evo ed il Rinascimento sino all'invenzione dei cannocchiali astronomici e alla scoperta del pendolo.

5. Storia dei vari meridiani adoperati come origine delle longitudini. Storia della divisione geografica in climi.

6. Storia dei principì delle dinamica.

18. Storia della filosofia delle scienze.

19. Proposte pratiche tendenti ad attivare il progresso della Storia delle scienze.

L'altro è il *Congrès international de philosophie* che verrà tenuto sotto la direzione della *Revue de métaphysique et de morale* dal 2 al 7 di Agosto. Segnaliamo i seguenti argomenti posti all'ordine del giorno:

I. 1. Algebra della logica e calcolo delle probabilità. Teoria degli insiemi; teoria delle catene; teoria dei gruppi. Il transfinito.

2. Principì dell'analisi; il numero; il contenuto; teoria delle funzioni.

3. Postulati della geometria; loro origine e loro valore. L'intuizione in matematica. Geometrie non-euclidee.

4. Metodi in geometria: geometria analitica; geometria projettiva; calcolo geometrico (i quaternioni).

5. Principì della meccanica; loro natura e valore.

6. Metodi della fisica matematica; teoria degli errori e delle approssimazioni.

II. 1. Origini del calcolo infinitesimale.

2. Genesi della nozione d'immaginario ed elucidazione progressiva della teoria delle funzioni.

3. Storia della scoperta della gravitazione universale; sua influenza sopra lo sviluppo della meccanica e della fisica.

***

Il R. Istituto Lombardo di Scienze e lettere ha posto a concorso pel 1901 il seguente quesito: « Considerate le equazioni differenziali che frequentemente si presentano nei problemi dell'elettrotecnica, studiare e indicare quali metodi meglio praticamente conducono alla loro integrazione sia pure approssimata ed illustrarne la esposizione con degli esempì ».

Scadenza 1.° Aprile 1901, ore 15. Premio L. 1200.

Marco Bertolone, Direttore-Gerente.

Genova - Tipografia R. Istituto Sordo-muti - 1899.

APRILE, MAGGIO E GIUGNO 1900.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. 6, per l'estero Fr. 7.50. Numeri separati L. 2 caduno. — Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

BIBLIOGRAFIA

sui Fondamenti della Geometria in relazione alla Geometria Non-Euclidea

compilata da ROBERTO BONOLA

(Continuazione. Vedi p. 2).

SCRITTI STORICI, CRITICI E FILOSOFICI.

AGOLINI, G. — *Il quinto postulato Euclidiano* (Firenze, 1868).

ANDRADE, J. — *Les bases expérimentales de la géométrie euclidienne* (Rev. Philosophique, 1890-91).

BECKER. J. — *Abhandlungen aus dem Grenzgebiete der Mathematik und Philosophie* (Zürich, 1870).

Id. — *Ueber die neuesten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauungen vom Raume* (Zeitschr. f. Math. XVII, 1872).

BEEZ, R. — *Ueber euklidische und nicht-euklidische Geometrie* (Vedi Beez, indirizzo differenziale).

BELTRAMI, E. — *Un precursore italiano di Legendre e Lobatchewsky* (Lincei, Rend. V, 1889).

BERTRAND-ROUSSEL. — *An essay on the foundation of Geometry* (Cambrige, University press, 1897).

BENNUCCI, D. — *La geometria trascendentale e lo spazio metageometrico* (Carrigliano Calabro, 1889).

BONNEL, J. F. — *Les atomes et les hypothèses dans la géométrie* (Nouvelle édition, Lyon, 1897).

Id. — *Essai sur les définitions géométriques* (Paris, 1874-76)

Id — *Note sur la définition des parallèles et sur la géométrie imaginaire* (Mem. Lyon Acc., 1889).

Id. — *Les hypothèses dans la géométrie* (Lyon, 1895-96).

BONOLA, R. — *Sulla teoria delle parallele e sulle Geometrie non-euclidee.* Articolo VI delle *Questioni riguardanti la Geometria elementare raccolte da* F. Enriques (Bologna, N. Zanichelli, 1900).

BROGLIE (L'abbé de). — *La géométrie non euclidienne* - due articoli. (Ann. Phil. Chrét., 1890).

BRODEN, T. — *Om geometriens principer* (Pedagogisk Tidskrift. Halmastand, 1890].

BURALI FORTI. — *Les postulats pour la Géométrie d'Euclide et de Lobatschewsky* (Verhandlungen der ersten internationalen Math. Kongresses in Zurich; — Leipzig, Teubner, 1899).

CANTOR, M. — *Vorlesungen ueber die Geschichte der Mathematik* Bd. II e III (Leipzig, Teubner, 1891-1894).

CARBONELLE, I. — *Les incertitudes de la géométrie* (Revue des questions scientifiques. XIV, 1883).

CALINON, A. — *Les espaces géométriques* (Rev. Phil., 1889-91).

Id. — *Sur l'indétermination géométrique de l'univers* (Rev. Phil., 1893).

CLAUDEL — *La theorie des parallèles selon les géomètres japonais* (Bruxelles, 1875).

CLIFFORD, W. — *Lecture on « the Postutate of the Science of Space »* (Macmillau's Magazine, 1872).

Id. — *On Probability* (Educational Times).

Id. — *Lectures and Essays* (London, 1879).

Id. — *Il senso comune nelle scienze esatte* (Tradotto dall' inglese) (Biblioteca internazionale, 1886).

CLINTOCK, Mc. E. — *On the non Euclidian geometry* (New York M. S. Bull. II, 1892).

COMMINES DE MARSILLY — *Études sur les " postulatum " d'Euclide et sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire* (Ass. fran., XVIII, 1889).

Couturat, L. — *L'année philosophique de F. Pillon*, 2.ᵉ année, 1891 (Rev. de metaphisique et de morale, 1893).
Id. — *Note sur la géométrie non euclidienne et la rélativité de l'espace* (Rev. de metaphys. et de mor., 1893).
Id. — *Études sur l'espace et sur le temps des M. M. Lechalas, Poincaré, Delboeuf, Bergson, Weber et Evellin* (Rev. de metaphys. et de mor., 1896).
Dauge, F. — *Sur la géométrie non euclidienne* (Mathesis (2), VI, 1895).
Delboeuf, J. — *Les prolegomènes philosophiques de la géométrie et solutions des postulates* (Liège, 1860).
Id. — *Mégamicros, ou les effets sensibles d'une reduction proportionelle des dimensions de l'Univers* (Belg. Bull. (3), XXV, 1893).
Id. — *L'ancienne et les nouvelles géométries.* Quattro articoli (Rev. Phil., 1893-95).
Dixon, E. — *The foundation of geometry* (Cambrige, Deighton, Bell and Co, 1891) (Nature XLIII, 1891).
Dolbnice J. — *Notiz. über N. J. Lobatchewsky* (St. Petersburg, 1894).
Duclot, S. — *Los fondamentos de la geometria y el conocimiento del espacio* (Soc. Argentinea, XXX, XXXI, 1890).
Engel, Fr. - P. Stäkel. — *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie in Gemeinschaft mit Fr. E. herausgegeben von P. St.* (Leipzig, Teubner, 1895).
Id. — *Gauss di beiden Bolyai* (Math. Ann. XLIX, 1897; trad. francese: Bull. S. Math. (2), XXI, 1897).
Id. — *Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie herausgegeben von F. E. und P. St. Mit vielen Figuren im Texte, In 2 Bänden.*
I. *Nicolaj Jwanowitsch Lobatchefskij. Zwei geometrische Abhandlungen, herausgegeben von Friedrich Engel mit einem Bilde Lobatschefskij* (Leipzig, 1899).
Erdmann, B. — *Die Axiome der Geometrie. Untersuchung der Riemann-Helmholtzschen Raumtheorie* (Leipzig, 1877).
Id. — *Review by S. H. Witte* (Phil. Monatschefte, Leipzig, XIII, 1879).
Id. — *Recention von A. Harnack* (Vierterjahresschr. für wiss. Philos., II, Leipzig, 1878).
Id. — (Mind. II, III, 1877-78).
Enriques, F. — *Conferenze di geometria* (Vedi Enriques, indirizzo differenziale).
Id. — *Osservazioni critiche e didattiche sulle questioni che interessano i postulati della Geometria.* Articolo I delle *Questioni riguardanti* ecc. (Vedi Bonola).

FANO, G. — *Lezioni di geometria non euclidea* (Litografie, Roma, 1898).
FORTI, A. — *Intorno alla geometria immaginaria o non euclidiana.* Considerazioni storico-critiche del prof. Angelo Forti (Rivista Bolognese, II, 1867).
Id. — *Studi geometrici sulla teorica delle parallele di N. J. Lobatchewsky* (La Provincia di Pisa, n.° 25, 1867).
Id. — *Nota intorno alla vita e scritti di Wolfgang e Giovanni Bolyai, matematici ungheresi* (Bull. Bonc., I, 1868).
GALLUCCI, G. — *Geometria non euclidea* (Il Pitagora, Giornale di Matematiche, II, 1896).
GENOCCHI, A. — *Lettre à* M. *Quetelet sur diverses questions mathématiques* (Belgique Bull. (2), XXXVI; 1873).
GEOGHEGAN, E. — *The axioms of geometry* (Nature XXIX, 1884).
GILLES J. — *Ueber die Grundsätze der Mathematik* (Bair, Bl., XV, 1879).
GÜNTHER S. — *Ziele und Resultate der neuern Math. Histor. Forschung.* (Erlangen, 1876) (Grunert. Arch. LX, 1875).
Id. — *Sulla possibilità di dimostrare l'assioma delle parallele mediante considerazioni stereometriche. Complemento alla Geometria assoluta di Bolyay* (Vedi Günther, indirizzo elementare).
Id. — *Zwei neuere Werke über die Principien der Raum — und Naturlehre* (Kosmos, I, 1878).
HALSTED, G. B. — *Non Euclidian Geometry, historical and expository* (The American Math. Montly, Kidder, Missisouri, 1894).
Id. — *The Non-euclidean Geometry inevitable* (The Monist, IV, Chicago, 1894),
Id. — *Some salient points in the history of non-Euclidian and hyper-spaces.* Mathematical Papers read at the internationational Math. congress — Chicago, 1893 (New York - Macmillan, 1896).
HEINZE, C. — *Kritische Beleuchtung der euklidischen Geometrie* (Berlin, Friedberg, 1876).
HELMHOLTZ, H. — *Ueber den Ursprung und die Bedeutung der Geometrischen Axiome* — (Populäre wissenschaftliche Vorträge, III, Braunschweig, 1876) (Trad. francese - Revue scientifique de la France et de l'Etranger, 1877). — (Trad. inglese - Part I, Mind., N.° III, 1876; Academy Feb. 12, 1870, vol. I - Nature, vol. IV, Nature. vol. V; Academy, vol. III; Part II, Mind., April 1878).
HENRICI, O. — *Ou pure Geometry* (Nature, XXVIII, 1883).
Id. — *The axioms of Geometry* (Nature, XXIX, 1884).
HOFFMANN, J. — *Das elfte Axiom der Elemente des Euclides* (Halle, 1859).
Id. — *Resultate der Nicht-Euklichschen oder Pangeometrie.* (Zeitschr. für math. Unterricht, IV, 1873).

HOÜEL, J. — *Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie* (Vedi Hoüel, indirizzo elementare).

Id. — *Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe de la théorie des parallèles dit Postulatum d'Euclide* (Vedi Hoüel, indirizzo elementare),

Id. — *Du rôle de l'expérience dans les sciences exactes* (Prague, 1875) — (Traduzione tedesca, Grunert. Arch. LXIV, 1876).

Id. — *Notice sur la vie et les travaux de Lobatschewsky* (Bull. Sc. Math., I, 1870).

JANICHEFSKY. — *Notice historique sur la vie et les travaux de Lobatchewsky* (Traduzione dal russo — Bull. Bonc. II, 1869).

ISELY, L. — *La géométrie non euclidienne* (Archives de sciences phys. et Math. Genève, 1896).

KILLING, W. — *Einführung in die Grundlagen der Geometrie* (Vedi Killing, indirizzo differenziale).

KLEIN, F. — *Vorlesungen ueber die Nicht-Euklidische Geometrie* (Vedi Klein, indirizzo proiettivo).

Id. — *Zur ersten Verteilung des Lobatchewsky Preises* (Kasan, 1897).

Id. — *Conférences sur les Mathématiques, faites au congrès de Math. tenu à l'occasion de l'exposition de Chicago* (1893). Traduites de l'anglais par M. L. Laugel (Paris, Hermann, 1893).

KÖNIGSBERGER, L. — *Hermann von Helmholtz's Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik und Mechanik* (Leipzig, 1896).

KOBER, J. — *Ueber die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe* (Zeitschr. f. math. Unterricht, I, 1870).

KOBER, J. — *On infinity and the new Geometrie* (Zeits. f. Math. Unterricht, III, 1872).

KOFLER, J. — *Die Axiome der Geometrie un die Lehre vom Raume* (Brixen, 1890).

KRAUSE, A. — *Kant und Helmholtz, über den Ursprung und die Bedeutung der Raumanschauung und der Geometrischen Axiome* (Zeitschr. f. Math. XIV, 1869).

LACHTINE, L. K. — *Vita ed opere scientifiche di N. J. Lobatschewsky.* (in russo) (Raccolta pubblicata dalla Soc. matematica di Mosca, T. XVII, 1894).

LAMARLE, E. — *Sur la géométrie sans postulats et sur la theorie des parallèles* (Bull. Acc. R. Belgique, XXXI, 1871).

LAND, J. P. N. — *Kant's Space and Modern Mathematics* (Mind, II, 1877).

Id. — *Critical notice of Erdmann's « Die Axiome der Geometrie »* (Mind, III, 1878).

Lechalas, G. — *La géométrie générale* (Crit. Phil., 1889).
Id. — *La géométrie générale et l'intuition* (Annales de phil. Chrét., 1890).
Id. — *La géométrie générale et les jugements synthétiques à priori* (Rev. Phil., 1890).
Id. — *Les bases expérimentales de la géométrie* (Rev. Phil., 1890).
Id. — *Note sur la géométrie non euclidiénne et le principe de similitude* (Rev. de métaphysique et de mor., 1893).
Id. — *M. Delboeuf et « Les problème des mondes semblables »* (Rev. de Phil., 1894).
Id. — *La Theorie de la connaissance mathématique* (Rev. Phil., 1894).
Id. — *La ourbure et la distance en géométrie générale* (Rev. de métaphysique et de mor., 1896).
Id. — *Etudes sur l'espace et le temps* (Paris, Alcan, 1896). Recensione di P. Mansion (Rev. des quest. scientif. (2), IX, 1896).
Id. — *Identité des plan de Riemann et des spheres d'Euclide* (Mathésis VII, 1896).
Lewes, G. H. — *Imaginary geometry and the truth of Axioms* (Problems of Life and Mind (1), II, London, 1875).
Liard, L. — *Des définitions géométriques et des définitions empiriques* (Paris, 1872).
Id. — *Des définitions géométrique et des définitions empiriques* (Paris, Alcan, 1888).
Liebmann, O. — *Zur Analysis der Wirklichkeit* (Strassburg, 1876).
Lionnet — *Sur le postulatum d'Euclide* (Comptes Rendus, LXX; 1870).
Loria, G. — *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche* (2.ª ed. Torino, Clausen, 1896).
Mansion, P. — *Sur les postulats et les axiomes d'Euclide* (Brux. S. sc. XIV, 1890).
Id. — *Analyse des recherches du P. Saccheri S. I.; sur le postulat d'Euclide* (Brux. S. sc. XVII, A, 1893).
Id. — *Sur la portée philosophique de la métagéométrie* (Brux. S. sc. XVII, A, 1893).
Id. — *Sur les principes fondamentaux de la géométrie, de la mécanique et de l'astronomie* (Paris, Gauthier Villars, 1893).
Id. — *Notice sur les recherches de M. de Tilly en métagéométrie* (Mathésis (2), V, Suppl. III; oppure: Revue des Questions scient. XXXVII, 1895).
Id. — *Sur la non identité du plan riemannien et de la sphère euclidienne* (Mathésis, VII, 1896).
Id. — *Sur la Géométrie euclidienne avant Lobatcheffsky* (Brux. S. sc. XX, 1896).

MANSION, P. — *Premiers principes de la métagéométrie* (Vedi indirizzo elementare).

MASSIMO. — *Sugli elementi di Geometria di Euclide e gli studi di geometria sulla teoria delle parallele, ed il saggio critico sui principi fondamentali della geometria elementare di Hoüel* (Firenze, 1870).

MILHAUD. — *La géometrie non euclidienne et la théorie de la connaissance* (Rev. Phil., 1888).

NASIMOW, P. — *Sulla definizione del piano in Lobatschefsky* (in russo) (Atti della Società di Kasan, 1896).

NEOVIUS, E. R. — *Om den Icke-Euclidiska geometrin* (Ofversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Forhandlingar-Helsingfors, XXXII, 1895).

PIETZKER. — *Ueber die absolute Geometrie* (Hoffmann Zeitschr., XXIII, 1892).

PLAMENEWSKY, I. — *Vita e lavori scientifici di Lobatchewsky* (in russo) (Tiflis, 1894).

POINCARÉ, H. — *Non Euclidean, Geometry* (Nature XLV, 1892).

Id. — *L'éspace et la géométrie* (Rev. de métaphysique et de mor. 1895).

Id. — *Réponse à quelques critiques* (Rev. de métaphys. et de mor. 1895).

REYES PRÒSPER. — *Nicolas Ivanovich Lobatcheffski* (Progreso mat. III, 1893).

Id. — *Wolfang y Juan Bolyai* (Progresso IV, 1894).

RIEMANN, B. — *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Vedi Riemann, indirizzo differenziale).

RENOUVIER. — *Philosophie de la règle et du compas* (Crit. Phil., 1889; l'année Phil., 1891).

ROSANES, S. — *Ueber die neuesten Untersuschungen in Betreff unser Ausschauung vom Raume* (Breslau, 1871).

ROUSE BALL, W. W. — *A short account of the History of Mathematics* (London, Macmillan and Co. 1893).

SALETA, F. — *Exposé sommaire de l'idée d'espace au point de vue positif* (Vedi indirizzo elementare).

SARTORIUS von WALTERSHAUSEN, W. — *Gauss zum Gedächtniss* (Leipzig, 1856).

SCHISCHKIN. — *Lobatscheffsky's Raum* (Frangen d. Philosophie u. Psichologie, XXI, 1894).

SCHMIDT Fr. — *Aus dem Leben zweier ungarischen Mathematiker Johann und Wolfgang Bolyai von Bolya* (Grunert. Arch. XLVIII, 1868) (Trad. francese, Bordeaux Mem. V).

SCHMIDT F. und STÄCKEL P. — *Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfang Bolyai* (Leipzig, 1899).

Schering — *C. F. Gauss's Geburtstag nach hundertjähriger Wiederkehr* (Götting. Abhandlungen, T. XXII, 1877; trad. italiana in Annali di Matem. 2.ª Serie, T. IX, 1879).

Sorel. — *Sur la géométrie non Euclidienne* (Rev. Phil., 1891).

Stäckel P. — *Mittheilungen aus dem Briefwechsel von Gauss und W. Bolyai* (Gött. Nachr., 1897).

Id. — *Franz Adolph Taurinus. Ein Beitrag zur Vorgeschichte der Nichteuklidishen Geometrie* (Abh. zur Geschichte der Math., IX, Heft, 1899).

Stäckel P. - Engel F. — *Die Theorie der Parallellinien ecc.* (Vedi Engel-Stäckel).

Id. — *Gauss, die beiden Bolyai ecc.* (Vedi Engel - Stäckel).

Id. — *Urkunden zur Geschichte der Nichteuklidischen Geometrie ecc.* (Vedi Engel - Stäckel).

Simon, M. — *Zu den Grundlagen der nicht-euklidischen Geometrie* (Pr. Nr. 512. Liceum Strassburg, 1891).

Id. — *Ueber das Parallellenaxiom* (Naturf. Ges. Halle, LXIV, 1891).

Sokolow, N. P. — *L'importanza delle ricerche geometriche di N. J. Lobatschewsky* (in russo). Kiew, 1894.

Stolz, O. — *Das letzte Axiom der Geometrie* (Ber. d. natur. medic. Vereins in Insbruck, XV, 1885).

Tait, P. G. — *Recent Advances in Physical Science. Introduc.* (London, 1876).

Id. — *Review of Zöllner* (Nature, 1878).

Tannery, P. — *La géométrie imaginaire et la notion d'espace* (Revue Phil., 1876-1877).

Id. — *Théorie de la connaissance mathématique* (Rev. Phil., 1894).

Tilly (de), M. — *Rapport sur la « Lettre à M. Quetelet sur diverses questions mathématiques par A. Genocchi »* (Belgique Bull., XXXI, 1873).

Id. — *Essai sur les principes fondamentaux ecc.* (Vedi Distanza finita).

Transon. — *De l'infini ou métaphysique et géométrie à l'occasion d'une Pseudo-Géométrie* (Evreu., 1871).

Tucker, R. — *Mr. Dogson on parallels* (Nature XXXIX, 1889).

Veronese. — *Fondamenti di Geometria a più dimensioni ecc. Appendice* (Vedi Veronese, indirizzo elementare).

Weissenborn, H. — *Ueber die neuren Ansichten vom Raum und von den geometrischen Axiomen* (Vierteljahrschrift für Wissenschaftliche Philosophie, II Heft, Erster Artikel, 1878).

Wehr, H. — *Die Subjectivität des Raumes und das XI Euklidische Axiom* (Wien, 1895).

WIENER, H. — *Ueber Grundlagen und Aufbau der Geometrie* (Natur. Ges. Halle LXIV, 1891).
ZOLLNER, I. C. F. — *Zur Metaphysik des Raumes* (*Wissenschaftliche Abhandlungen*, T. II, Leipzig, 1878).

(Continua)

RECENSIONI ED ANNUNZI

M. CANTOR. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band. Von 1200-1668.* Mit 190 in den Text gedruckten Figuren. 8.° gr. p. XII + 493. Leipzig, Teubner 1900 [Prezzo Mk. 26].

Si ritiene da molti e con ragione che, prima di pronunciare una definitiva sentenza sul valore di un libro, convenga sottoporlo alla prova di parecchie letture. Se tale canone di critica è esatto, sull'opera del Cantor ci è dato oggi formulare un giudizio definitivo, dopo che i due primi volumi vennero accuratamente studiati in due successive edizioni e fecero trionfalmente il giro di tutto il mondo, ottenendo dovunque lodi incondizionate ed un posto onorevole e stabile nella biblioteca di tutti i matematici. Il secondo volume che ora annunciamo della nuova edizione si è avvantaggiato di notevoli miglioramenti nei particolari, miglioramenti così numerosi che ben poche sono le pagine che non abbiano subito qualche ritocco; ma nelle basi e nell'insieme l'opera rimane quale era. Le modificazioni introdotte sono in buona parte il riflesso di lavori altrui; ma il Cantor ben a ragione potrebbe rivendicarne a sè la paternità, essendo desse il frutto d'indagini dovute all'impulso che le *Vorlesungen* diedero agli studi storici sin dal loro primo apparire. Tuttavia il Cantor scrupolosamente ne indica le fonti, come onestamente avverte ove il suo scritto sembragli presentare qualche deficienza. Così ad es. in una nota a pag. 386 egli lamenta di non avere conoscenza diretta del discorso di A. F. Vallin *Cultura cientifica de España en el siglo XVI* (Madrid, 1893): rileviamo ciò per aggiungere che anche se il Cantor avesse potuto utilizzare questo dottissimo lavoro non avrebbe avuto occasione di apportare alcuna alterazione a quanto scrisse, nè di aggiungere il ritratto di qualche matematico eminente alla galleria di quadri che egli ci ha presentata.

Poichè un'opera così vasta come quella del Cantor esige, per avvicinarsi alla perfezione desiderata, la collaborazione di tutti coloro che si occupano di storia della matematica, e poichè d'altronde l'illustre autore non sdegna l'ajuto dei più modesti colleghi, ci permettiamo di segnalare alcuni punti che a parer nostro sono suscettibili di qualche miglioria.

I. Dell' « Aritmetica di Treviso » il Boncompagni ha descritti ed illustrati sette esemplari; un ottavo esiste nella Biblioteca universitaria di Bologna e diede materia allo studio bibliografico di G. F. Pichi intitolato: *Di un nuovo esemplare dell' Abbaco di Treviso del 1478 posseduto dalla biblioteca della R. Università di Bologna.*

II. Dell' opera di Francesco Barozzi sugli *Asintoti* di cui il Cantor (p. 570) dà un breve cenno, il Kästner ha esposta (*Geschichte der Mathematik*, 2[er] Bd., Göttingen 1797, p. 94-98) un' analisi abbastanza dettagliata, ove si trovano molti particolari sulle fonti orientali a cui attinse il dotto patrizio veneziano. Ma fra i dotti Ebrei ivi enumerati non si trova quello che venne con tanta cura studiato da G. Sacerdote nella memoria intitolata: *Le livre de l'Algèbre et le problème des asymptotes de Simon Motot* (*Revue des études des juives* 1893-94). Lo scienziato ivi considerato è Simone figlio di Moise, figlio di Simone Motot; la grafia di questo cognome è incerta, come incerta è l'epoca ed il luogo in cui visse il dotto in questione; sembra però assai probabile che la sua esistenza appartenga alla metà del Sec. XV e che la sua sede sia stata una città del Lombardo-Veneto. Le sue opere, di cui il Sacerdote pubblicò una traduzione fedele, sono intitolate: *Libro d' algebra* una e l'altra *Spiegazione relativa alla maniera di tracciare due linee che non s' incontrino.* Quanto al loro valore il traduttore osserva: « Quantunque Motot abbia inventate le equazioni pure del 3.° e 4.° grado e le equazioni derivative del secondo, e risolto in modo ingegnoso il problema degli asintoti, i suoi lavori non avrebbero fatto fare un passo considerevole alle matematiche, anche se avessero potuto oltrepassare lo stretto circolo ove erano necessariamente rinchiuse a cagione della lingua in cui erano scritte, ed anche in causa delle intenzioni stesse dell' autore. Ma per noi, che studiamo le differenti manifestazioni del pensiero ebraico, essi hanno la loro importanza, venendo ad aggiungersi ai numerosi documenti comprovanti l' interesse che gli Ebrei prendevano agli studi scientifici (1). In particolare per quanto si riferisce a Motot egli vi si rivela profondo conoscitore delle scienze matematiche ». Perciò a lui spetta un posto nella storia di tali scienze.

III. Il Cantor fa conoscere le opere di Descartes e Fermat e loro commentatori, relative alla geometria analitica nel suo primo stadio di sviluppo. Ma quanto egli espone non ci sembra sufficiente a porgere un'idea chiara e completa di ciò che era quel ramo della matematica

(1) Cfr. anche una nota dello stesso Sacerdote inserita nei Rend. dell' Acc. dei Lincei (Classe di Scienze morali), Seduta del 24 Aprile 1892.

nei suoi primi anni di vita. Ad es. era nota sin d'allora la trasformazione delle coordinate, se ne conosceva la grande fecondità come mezzo di ricerca e come artificio di dimostrazione?... Il Cantor non risponde a tale questione, nè noi siamo in grado di sopperire al suo silenzio. Vogliamo però richiamare l'attenzione degli storici sulle seguenti frasi di Descartes: « encore qu'il y ait beaucoup de choix pour rendre l'équation plus courte et plus aisée, toutefois en qu'elle façon qu'on les prenne, on peut toujours faire que la ligne paraisse du même genre ». Non è questo un accenno al cambiamento di assi ed all'effetto che esso produce?... Confermano questo modo di vedere alcuni passi abbastanza curiosi della corrispondenza di Descartes, su cui ci sia lecito arrestarsi un istante.

Il sommo filosofo definì la curva che oggi porta il nome di *foglia di Cartesio* in una lettera diretta al P. Mersenne addì 18 Gennaio 1638 perchè la comunicasse a Fermat (*Oeuvres de Descartes*, ed. Cousin, T. VII, 1824, p. 11); ivi leggesi espressa a parole la proprietà di quella curva che noi oggi indichiamo coll'equazione

$$(1) \qquad x^3 + y^3 = a\,x\,y.$$

In una lettera diretta dello stesso allo stesso il 23 Agosto 1638 (*vol. cit.* p. 97) si leggono poi le seguenti parole: « Au reste, puisque je vois qu'il (*Roberval*) a pris plaisir à considérer la figure de cette ligne, laquelle il nomme un galanth ou une fleur de jasmin, je lui en veux ici donner une autre, qui ne mérite pas moins que celle-là les mêmes noms, et qui est néammoins beaucoup plus aisée à décrire, en ce que l'invention de tous ses points ne dépend d'aucune équation cubique. Celle-ci donc est telle, qu'ayant pris A K pour l'essieu de l'une de ces feuilles, et en A K le point N à discrétion, il faut seulement faire que le carré de l'ordonnée L N soit un carré du segment A N, comme l'autre segment N K est à l'agregat de tout A K et du triple de A N, et ainsi on aura le point L, c'est-à-dire tous ceux de la courbe, puisque le point N se prend à discrétion. Je pourrais lui donner une infinité d'autres lignes qui ne seraient point d'une nature plus composée que celle-là, et toutefois qui representairaient des fleurs et des galanths beaucoup plus doubles et plus beaux ». — Traducendo in formole la costruzione cartesiana si ottiene

$$(2) \qquad y^2\,(l + 3\,x) = x^2\,(l - x)$$

come equazione della nuova curva; ora, prendendo per assi le direttrici degli angoli formati dagli assi antichi si passa da un'equazione della forma (1) ad un'equazione della forma (2); dunque la pretesa nuova curva non differisce dalla foglia di Cartesio. Di questa notevole circostanza Descartes era pienamente consapevole; infatti, in una lettera posteriore — ma dal Cousin erroneamente datata 31 Marzo 1838 (1) — egli scrisse al suo consueto corrispondente: « J'oubliais à vous dire que la nouvelle ligne que je propose au sieur R.(oberval) à la fin de la quatrième page de cette lettre est toute la même que l'autre, ce que je fais pour me rire de lui, s'il ne le reconnoît pas, a cause qu'il dit le connaître comme le ceule » (*vol. cit.* p. 178).

Ma non bisogna però credere che i geometri contemporanei o immediatamente posteriori a Descartes ne sapessero quanto lui intorno alla trasformazione delle coordinate. Lo prova il seguente fatto. R. de Sluse propose a Huygens in una lettera dettata 14 Agosto 1657 lo studio della curva (detta *perla*) rappresentata dall' equazione

$$(3) \qquad x^2\,(a-x) = b^2\,y$$

(v. *Oeuvres complètes de C. Huygens,* T. II, p. 47); ed infatti il suo illustre corrispondente ed altri si occuparono di determinarne la tangente, l'area ecc. Spinto dall'emulazione Fr. van Schooten propose a Huygens (lettera del 29 ottobre 1657; *vol. cit.* p. 73) lo studio di altre tre curve, la prima delle quali è rappresentata come segue:

$$(4) \qquad a^2\,x = y^3 + 2\,a\,y^2 + a^2\,y;$$

ora è evidente che la curva (4) non differisce dalla (3) che per la scelta degli assi di riferimento, ma di ciò il dotto commentatore di Cartesio non si è accorto. Come il de Sluse non s' avvide che la curva

$$(5) \qquad a\,y^2 + y^3 = a^2\,x$$

da lui considerata come nuova nella lettera a Huygens del 9 Gennaio 1658 (vol. cit. p. 121) non sia che l' antica perla.

Queste lettere ed altre appartenenti al carteggio scientifico di Huygens proiettano molta luce anche su un altro punto interessante della storia della geometria analitica. È noto che nelle origini di questa scienza i geometri non avevano ancora fatte le convenzioni fondamentali sui segni delle coordinate ed escludevano i valori infiniti di queste; aggiungevano quindi ad ogni ramo di curva il suo simmetrico rispetto agli assi coordinati e sopprimevano i rami infiniti. Così ad es. ritenevano che la foglia di Descartes constasse del cappio, che essa effettivamente possiede, e dei simmetrici di esso rispetto agli assi ed all' origine delle coordinate; essi quindi credevano che avesse la forma di un quadrifoglio regolare. Donde il nome di *fleur de jasmin* adoperato da Roberval; e poichè Descartes (v. il surriferito brano della

(1) L' errore del Cousin è tanto più strano perchè nella chiusa di quella lettera si trova la dichiarazione seguente: « nous sommes au 23 Août 1638 ».

lettera 23 Agosto 1638) adopera questo stesso nome è evidente che egli non avvertì l'errore del suo conterraneo ([1]). Ora di analoghe inesattezze porgono altri numerosissimi esempî le lettere di Huygens od a lui dirette concernenti le perle di Sluse (v. il *vol. cit.*) nonchè quelle (datate 23 Novembre, e 7 Dicembre 1657) che concernono la parabola avente l'equazione seguente:

$$x + y = \sqrt[4]{a x^3} \tag{6}$$

D'altronde alcuni passi della corrispondenza di Leibniz (*Mathem. Schriften*, ed. Gerhardt, T. II) mostrano che tanto lui quanto Huygens non possedevano regole sicure per determinare il segno della suttangente. Tutto ciò fa sorgere spontaneo il desiderio di conoscere in forza di quali considerazioni e per opera di quali scienziati venne avvertito e soddisfatto il bisogno di sottoporre a leggi determinate l'uso dei segni in geometria analitica. È questa una indagine storica non agevole nè breve, ma piena di attrattive per l'importanza che possiede, onde è desiderabile che qualcuno si accinga a effettuarla.

IV. Di Bonaventura Cavalieri il Cantor parla più volte e con la diffusione che merita un tale scienziato, citandone od analizzandone quasi tutte le opere di matematica pura; l'unica esclusa è il *Compendio delle regole dei triangoli colle loro dimostrazioni* (Bologna, 1635), il cui contenuto d'altronde è passato a far parte di opere posteriori dello stesso geometra. Quello che è cagione di meraviglia si è che il Cantor si dilunghi (p. 834) ad esporre il metodo con cui il Cavalieri confermò le quadrature della spirale d'Archimede e della parabola già effettuata dal Siracusano, e non abbia rilevato come l'autore degli *Indivisibili* abbia arrecato alle cognizioni che si avevano sopra questa curva un'importantissima aggiunta, coll'affrontare l'unico problema metrico ad essa relativo che Archimede tramandò intatto ai posteri, cioè il problema della rettificazione. Riguardo al quale il Cavalieri dimostrò che un arco di parabola contato dal vertice è sempre eguale ad un arco convenientemente scelto ma originario nel polo di spirale. E questo un nuovo e notevolissimo punto di analogia fra le due curve di cui si tratta, il quale merita di essere rilevato anche perchè più tardi venne segnalato da Pascal nell'opuscolo intitolato appunto *Egalité des lignes spirale et parabolique*, del quale il Cantor si limita a riferire il titolo (p. 916).

([1]) Egli era anzi lontanissimo dal supporre tale ignoranza propria e del Roberval, perchè una volta dice che la forma della foglia « se voit à l'œil sans aucun esprit ni science » (*Oeuvres de Descartes*, vol. VII, p. 98) ed un'altra volta osserva che Roberval « n'a eu besoin d'aucune industrie pour trouver la figure de cette ligne dont je lui avois envoyé la définition » (Id. p. 127-128).

V. Anche del Torricelli sono segnalati tutti i lavori a stampa; l'indice dei lavori tuttora inedito, che il Ghimassi ha da tempo dato alle stampe (*Lettere di Evangelista Torricelli,* Faenza, 1864) avrebbe reso più assomigliante il ritratto del celebre discepolo di Galileo. Ne va taciuto che la pubblicazione recentemente fatta di uno scritto del Torricelli (v. l'articolo *Le ricerche inedite di Evangelista Torricelli sulla curva logaritmica,* Biblioteca matematica, 3.ª serie, T. I, 1900) basta a fugare il dubbio del Cantor (p. 891) e di altri sulla conoscenza da parte del Torricelli stesso della curva logaritmica.

VI. A pag. 661-2 il Cantor fa menzione della divinazione fatta dal Viviani del V libro delle *Coniche* di Apollonio, tributandovi delle lodi a parer nostro esagerate; chè se essa può considerarsi come un'eccellente aggiunta alle nostre cognizioni geometriche — anche per la forma in cui è redatta, — quasi un'appendice alle dottrine esposte da Archimede e Apollonio, è impossibile dichiararla una ricostruzione fedele dell'opera antica, troppo pochi essendone i punti di contatto coll'originale; cfr. per maggiori particolari l'*Appendice* al II Libro della mia opera su *Le scienze esatte nell' antica Grecia.* Riguardo allo scritto congenere dello stesso Viviani concernente Aristeo, di cui il Cantor indica il solo titolo, si vegga l'*Appendice* II al I Libro della mia opera precitata.

VII. Fra i contributi dati da Cartesio alla geometria il Cantor ha escluso — e ci sembra a torto — un metodo di quadratura del cerchio da lui insegnato (in quale lavoro?) e che diede origine a due memorie commentative, una di Eulero (*Annotationes in locum quendam Cartesii ad circuli quadratuam spectantem,* Nov. Comm. Petrop. T. VIII, 1760-61), l'altra di Gianfrancesco Fagnano (*Demonstratis circuli quadratura* etc., Raccolta di opuscoli scientifici e filologici, T. XXXIV, 1773); confidiamo che il Cantor colmerà anche questa lacuna nella ventura edizione delle *Vorlesungen.* G. L.

Elliptische Functionen. Vorlesungen von BERNHARD RIEMANN. *Mit Zusätzen herausgegeben von* HERMANN STAHL. — Leipzig, Teubner, 1899, VIII-144 p. 8.º (Prezzo Mk. 5,60).

Sebbene i concetti di Riemann sulla teoria delle funzioni abeliane sieno oggidì abbastanza diffusi, è pur sempre interessante vedere come il grande matematico li applicasse all'importantissimo caso particolare delle funzioni ellittiche; e dobbiamo perciò esser grati al signor H. Stahl, il quale ha tentato di ricomporre, in base ad alcuni fascicoli manoscritti, un corso di lezioni di Riemann su tale argomento, breve, ma denso di idee e, per usare una parola moderna, suggestivo.

In questo corso, partendo dal concetto generale, e indipendente da qualunque rappresentazione analitica, di funzione biperiodica, si stabiliscono, in base al teorema di Cauchy, le proprietà di tali funzioni note sotto il nome di teoremi di Liouville, e l'equazione differenziale a cui esse soddisfanno, poi si fa la rappresentazione conforme del parallelogrammo dei periodi sopra un piano. Ridotta indi una relazione qualunque di 2.° grado rispetto a ciascuna delle due variabili alla forma normale di Legendre e a quella di Weierstrass, e accennato come tutti gli integrali ellittici possano ridursi alle 3 forme normali, si intraprende lo studio degli integrali di prima specie e delle funzioni ellittiche di Jacobi. Segue la rappresentazione di queste funzioni mediante somme di frazioni semplici, mediante serie trigonometriche e mediante quozienti di prodotti infiniti, la quale ultima forma porta naturalmente all'introduzione delle funzioni θ. Allo studio delle proprietà di queste funzioni, e delle espressioni degli integrali normali per mezzo di esse, che chiude il corso, precede la dimostrazione delle formole d'addizione delle funzioni ellittiche, ed un breve cenno sopra la teoria della trasformazione e della moltiplicazione.

Mentre la parte sin qui analizzata (P. I) è essenzialmente opera di Riemann, non avendovi lo Stahl messo di suo che la redazione e varie aggiunte (distinte con carattere più piccolo), la P. II è dovuta interamente a Stahl. Essa contiene alcuni capitoli della teoria delle funzioni di variabili complesse e delle funzioni ellittiche, la cui lettura è destinata a facilitare lo studio delle lezioni di Riemann. I principali argomenti ivi trattati sono: Studio di una funzione a due valori e della corrispondente riemanniana, riduzione degli integrali ellittici alle forme normali, periodi, proprietà diverse delle funzioni ellittiche di Jacobi, formole relative alle funzioni θ, rappresentazione delle funzioni e degl'integrali ellittici mediante le funzioni θ, riduzione del problema della trasformazione, studio delle trasformazioni lineari e quadratiche, moltiplicazione intera, funzioni ellittiche di Weierstrass.

G. Vivanti.

Oeuvres de P. L. Tchebychef, *publiées par les soins de MM.* A. Markoff *et* N. Sonin. *Tome* I *(avec portrait)*. St. Pétersbourg 1899. 4.°, p. VI + 714 (Prezzo Marchi 17,50).

Poco dopo la morte di Tchebychef i signori Markoff e Sonin fecero notare all'Accademia Imperiale delle Scienze di Pietroburgo quanto fosse opportuna, desiderabile e desiderata la pubblicazione della raccolta completa dei lavori del celebre geometra russo. Avendo poco dopo il generale d'artiglieria W. L. Tchebychef, fratello dell'estinto, posto a disposizione dell'Accademia la somma di cinque mila rubli per facilitare l'effettuazione di siffatto progetto, l'Accademia stessa incaricò i due citati accademici di presiedere all' edizione, ponendo come condizione che tutti gli scritti fossero pubblicati contemporaneamente in Russo ed in Francese. Gli editori deliberarono di includere nella progettata raccolta tutti i lavori del Tchebychef, tranne la tesi per ottenere il grado di *magister* (*Saggio di un' analisi elementare della teoria della probabilità;* Mosca, 1845) e la dissertazione per conseguire la dignità dottorale (*Teoria delle congruenze;* Pietroburgo, 1849). Gli è il primo volume di quest' importante collezione che oggi annunciamo. I lettori del *Bollettino* i quali ricordano come in queste colonne il Prof. Vassilief abbia esposta un' analisi particolareggiata di tutti i lavori usciti dalla penna del suo celebre connazionale, ci daranno ragione se noi non ci dilunghiamo a descrivere il contenuto dei trentaquattro scritti contenuti nel volume che ci sta sott' occhio. Soltanto vogliamo rilevare che, essendo parecchi di tali scritti stati pubblicati in Russo nè mai tradotti in alcuna lingua generalmente nota ai matematici, gran parte del volume stesso è costituito di cose che a molti riusciranno nuove: esso dunque va salutato con quella gioia con cui si accoglie ogni acquisto nuovo e importante fatto dalla biblioteca classica delle scienze esatte. E con impazienza attendiamo il secondo volume che deve completare l' opera con cui l'Accademia di Pietroburgo intese di onorare nel modo più efficace il più illustre fra i matematici che ad essa appartennero dopo la morte di Eulero.

G. L.

G. DE LONGCHAMPS. — *Cours de problèmes de géométrie analytique à l'usage des candidats à l'École Navale, à l'École Centrale et à l'École Polytéchnique.* 8.º, Paris, Delagove. T. I, 1898, p. VIII + 295 (Prezzo 5 Fr.). T. II, 1899, p. VIII + 435 (Prezzo Fr. 7,50). T. III, 1899. *Géométrie à trois diménsions,* p. XII + 583 (Prezzo Fr. 10).

È sempre con un senso di vivo rammarico che si assiste al ritiro dalla cattedra di un provetto insegnante; chi rifletta al tesoro di esperienza accumulata che va in conseguenza perduta non tarderà a conoscere quanto un siffatto sentimento sia giustificato! Ad ovviare almeno in parte a tale deplorevole sperpero di ricchezza intellettuale pensò provvedere l' egregio autore della raccolta che ora annunciamo, il quale, alla vigilia di ottenere il riposo, si propose di aiutare i futuri professori di geometria analitica nel compito più delicato fra quelli a loro affidati, nella scelta, cioè, degli esempi con cui illustrare le teorie generali e degli esercizi con cui famigliarizzare i discepoli col metodo delle coordinate. Affrettiamoci a constatare che l'autore ha conseguito il fine che si era proposto e che la letteratura didattica si è arrichita di un altro buon libro. È impossibile in una breve recensione di dare una completa idea di tutte le curve e superficie che egli ha considerato, delle svariate generazioni e proprietà che egli ne ha insegnato. Quanto all'entità e disposizione della materia, valga a darne una pallida idea il seguente breve indice dei capitoli.

T. I. Cap. I. Generalità. II. Classificazione dei problemi. III. Decomposizione del risultato. IV. Problemi elementari. V. Problemi generali. VI. Le coniche riferite ai loro assi. VII. Il problema delle tangenti. VIII. Problemi sopra poli e polari. Luoghi dei centri.

T. II. Cap. IX. Il problema delle normali. X. Problemi relativi alle corde comuni a due coniche. XI. Problemi metrici. XII. Le coniche sotto forma canonica. XIII. Problemi sopra i fuochi ed i vertici. XIV. Problemi di semplice contatto. XV. Problemi intorno a contatti d'ordine superiore. XVI. Coniche inscritte, circoscritte e coniugate. XVII. Coordinate boricentriche e coordinate tangenziali. XVIII. Le trasformazioni geometriche ed i problemi della geometria analitica.

T. III. Cap. I. Generalità. II. I problemi elementari. III. Rette e piani tangenti. IV. Centri, poli e piani polari. V. Problemi relativi a corde e piani seganti. VI. Le normali. VII. Generatrici rettilinee e problemi relativi. VIII. Piani ciclici e piani iperciclici; gli ombilichi. IX. Problemi concernenti gli assi ed i vertici di una quadrica e delle sue sezioni piane. X. Superficie di rivoluzione. Quadriche tangenti. XI. Discussione delle quadriche. XII. Studio di una superficie: la superficie di Steiner.

Emerge da queste indicazioni che l'A. si è limitato a considerare curve e superficie algebriche; la qual cosa non può non essere lamentata, specialmente riguardo ai due primi volumi; giacchè, se scarsi sono gli enti non algebrici della geometria dello spazio sino ad oggi studiati, per converso la geometria piana è ricca di curve trascendenti dotate di interessantissime proprietà: esse anzi sono tanto numerose che sembra giunto l'istante di coordinare in qualche modo le nozioni relative. Se nell'intento di facilitare la creazione di siffatta opera il chiaro autore vorrà dare ben presto un codicillo a quello che presenta come il suo testamento letterario, egli si procurerà un nuovo titolo alla riconoscenza di professori e studenti: l'energia da lui spiegata nel compilare la poderosa opera annunciata mostra ad evidenza che egli è ancora in grado di somministrarci quello che, in nome della scienza e della didattica, noi chiediamo ancora da lui. G. L.

E. Cahen. — *Éléments de la théorie des nombres. - Congruences. Formes quadratiques. Nombres incommensurables. Questions diverses.* — Paris, Gauthier-Villars, 1900. VIII - 403 pag., 8.° (Prezzo 12 fr.).

Ci limitiamo a dare un breve sommario degli argomenti trattati in quest'opera, la quale, pur non contenendo nulla di nuovo, è pregevole per l'abbondanza della materia e per l'eleganza e la chiarezza dell' esposizione.

Cap. I. Teorie elementari. — Operazioni, divisibilità, numeri primi, numeri frazionari.

Cap. II. Complementi delle teorie elementari. — Divisori, indicatore (o funzione φ), numeri negativi, frazioni continue.

Cap. III. Congruenze. — Prime nozioni, analisi indeterminata del 1.º grado, congruenze di grado qualunque, indici, teoremi di Fermat e di Wilson.

Cap. IV. Resti quadratici e congruenze del 2.º grado. — Simboli di Legendre e di Jacobi, risoluzione delle congruenze quadratiche.

Cap. V. Numeri incommensurabili (definiti secondo il concetto di Dedekind). — Operazioni, sviluppo in frazione continua, numeri algebrici del 2.º grado.

Cap. VI. Forme quadratiche binarie. — Sostituzioni, equivalenza, classi, equazione di Pell, numeri rappresentabili mediante una forma, analisi indeterminata del 2.º grado.

Nota *A.* — Sui diversi sistemi di numerazione.
» *B.* — Sui numeri primi.
» *C.* — Sulla decomposizione dei numeri in fattori primi.
» *D.* — Serie di Brocot e di Farey.
» *E.* — Sulla ricerca delle radici primitive.
» *F.* — Sulle frazioni che rappresentano un dato numero colla massima approssimazione, e il cui denominatore non supera un altro dato numero.
» *G.* — Sul gruppo modulare.
» *H.* — Sulle funzioni numeriche (funzioni di valore intero e definite solo per argomenti interi).
» *I.* — Sui numeri interi complessi.

Tav. I. — Numeri primi da 1 a 10000.
» II. — Radici primitive ed indici pei numeri primi da 1 a 200.
» III, IV. — Forme lineari dei fattori dispari delle forme quadratiche $x^2 \pm \mathrm{D}y^2$ da $\mathrm{D}=1$ a $\mathrm{D}=101$.

G. VIVANTI.

H. GANTER und F. RUDIO. — *Die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebranche an höheren Lelnarstalten sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Ubungsbeispiele. Erster Theil. Die analytische Geometrie der Ebene.* Mit. 54 Figuren im Texte. Vierte verbesserte Auflage. Leipzig. B. G. Teubner. (Prezzo Mk. 2,40).

Della terza edizione di questo fortunato manuale — uscita in luce nel 1897 — si è reso conto in questo *Bollettino* quando esso, nel suo stadio embrionale, appariva come « Supplemento » al *Giornale di matematiche* fondato dal Battaglini. Riguardo alla quarta non possiamo che ripetere sotto forma più accentuata le lodi che tributammo all'edizione precedente. Ma ci corre l'obbligo però anche ripetere il lieve appunto fatto intorno alla definizione delle coordinate polari; anzi dobbiamo ripeterlo con maggior fondamento giacchè, sin dallo scorso anno, vennero rese di pubblica ragione alcune semplici *Osservazioni sopra le coordinate polari* (Periodico di matematica per l'insegnamento secondario, Vol. XV; L'enseignement mathématique T. I) le quali bastano ad ovviare agli inconvenienti segnalati. Ciò però non toglie alla bontà del libro dei due egregi professori svizzeri, il quale può senza esitanza alcuna dichiararsi un'ottima guida per un primo studio della geometria analitica.

G. L.

A. DE MORGAN. — *On the Study and Difficulties of Mathematics.* New Edition. Chicago 1898, 8.° p. VII+288.

Indice dei Capitoli: I. Osservazioni preliminari intorno a la natura e gli oggetti delle matematiche. II. Sulle notazioni aritmetiche. III. Regole elementari dell'aritmetica. IV. Frazioni aritmetiche. V. Frazioni decimali. VI. Notazioni e principî dell'algebra. VII. Regole elementari dell'algebra. VIII. Equazioni di primo grado. IX. Sui segni negativi ecc. X. Equazioni di secondo grado. XI. Sulle radici in generale, ed i logaritmi. XII. Sullo studio dell'algebra. XIII. Sulle definizioni geometriche. XIV. Sul modo geometrico di ragionare. XV. Sopra gli assiomi. XVI. Sulle proporzioni. XVII. Applicazione dell'algebra alle misure di linee, angoli, rapporti di figure, e superficie.

In quest'antica opera del celebre scienziato inglese i professori e gli studenti delle nostre scuole secondarie troveranno qua e là assennati consigli ed osservazioni di indiscutibile valore. Essa però verrà da loro giudicata certamente come assai antiquata; il che notiamo non già per smania critica, ma unicamente per constatare con gioia l'enorme progresso che dal 1831 in poi hanno fatto tanto l'algebra e la geometria, quanto i modi di considerarne i principî fondamentali e di insegnarle. Tale impressione sopra gli odierni lettori sembra essere stata preveduta dal sig. T. J. Mc. Cormack, il quale, curando la nuova edizione, aggiunse qua e là delle note bibliografiche a parer suo *necessarie* a colmare le lacune del testo; se esse riescano eziandio *sufficienti* a ciò, altri giudichi.

G. L.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Herausgegeben von Prof. D.r H. BURKHARDT *und* Prof. D.r W. FRANZ MEYER. Leipzig, Teubner.

V. *Bollettino*, II, 1899, p. 65.

I. Band, 3.es Heft (1899. Prezzo Mk. 3,80). H. Burkhardt, *Endliche discrete Gruppen* (continuazione e fine). — E. Netto. *Rationale Funktionen einer Veränderlichen; ihre Nullstellen.* — G. Landsberg. *Algebraische Gebilde. Arithmetische Theorie algebraischer Grössen.* — W. Fr. Meyer. *Invariantentheorie.*

I. Band, 4.es Heft (1899. Prezzo Mk. 4,80). W. Fr. Meyer. *Invariantentheorie* (continuazione e fine). — G. Runge. *Separation und Approximation der Wurzeln.* — K. Th. Vahlen. *Rationale Funktionen der Wurzeln: symmetrische und Affektenfunktionen.* — O. Hölder, *Galois'sche Theorie mit Anwendungen.*

II. Band, 1.es Heft (1899. Prezzo Mk. 4,80). A. Pringsheim, *Grundlagen der allgemeinen Funktionenlehre.* — A. Voss, *Differential-und Integralrechnung.* — G. Brunel, *Bestimmte Integrale.*

II. Band, Heft 2-3 (1900. Prezzo Mk. 7. 50). G. Brunel, *Bestimmte Integrale* (continuazione e fine) — P. Painlevé. *Gewöhnliche Differentialgleichungen; Existens der Lösungen.* — E. Vessiot. *Gewöhnliche Differentialgleichungen; elementare Integrationtsmethoden.* — E. v. Weber. *Partielle Differentialgleichungen.*

C. ALASIA. — *Geometria e trigonometria della sfera.* Manuale Hoepli. Milano, 1900.

I. GHERSI. — *Metodi facili per risolvere i problemi di geometria elementare.* Manuale Hoepli. Milano, 1900.

NECROLOGIO

EUGENIO BELTRAMI

di ENRICO D'OVIDIO (1).

EUGENIO BELTRAMI, illustre socio nazionale non residente della nostra Accademia, professore di Fisica matematica e Meccanica superiore nell' Università romana, della quale era fulgido decoro, si è

(1) Commemorazione pronunziata nella seduta del 25 Febbraio 1900 dell'Accademia delle Scienze di Torino.

spento a 64 anni [1], dopo essersi assoggettato ad un'operazione chirurgica, che lasciava concepire le migliori speranze di aver vinto l'insidioso male che da alcuni anni a riprese lo travagliava. È duro rassegnarsi all'idea, che tanta luce d'ingegno, una così piena armonia di facoltà sposata a somma bontà e nobiltà di animo, non siano più che un ricordo, tanto più affligente quanto più glorioso. Legato a lui da reverente amicizia trentenne, da profonda ammirazione per la sua cultura inesauribile e per le sue spendide ricerche in quasi tutti i rami della Matematica, memore delle prove che da lui mi ebbi di incoraggiante benevolenza, io mi sento doppiamente colpito; ma il mio si confonde col rimpianto dell'universale, poichè non vi era chi non estimasse altamente BELTRAMI per i suoi lavori scientifici, chi non lo amasse per la sua spontanea cortesia, chi non lo trovasse ognora pronto a far del bene. Perciò la sua casa ospitale era desiderato ritrovo degli uomini di scienza; perciò le Università italiane si disputavano l'eminente professore, e Bologna (1862), Pisa, di nuovo Bologna, Roma, Pavia, e poi di nuovo Roma lo accolsero successivamente tra i loro insegnanti; e dappertutto risuonava la fama delle sue lezioni incomparabili per dottrina, perspicuità ed eleganza da grande artista. Ed artista egli era nell'anima e tale si palesava, facesse della Matematica o della Musica, o con sorridente arguzia, illuminata da singolare giovanilità di aspetto, conversasse. La sua era verace tempra d'ingegno italiano, limpido e profondo, versatile e concreto al tempo stesso. A lui pensando la mente ricorre ai nostri uomini maggiori, e in lui riconosce un degno continuatore di Lagrange.

Non mi si chieda che io entri in una, sia pur superficiale, disamina delle dotte pubblicazioni del BELTRAMI; le quali sommano a più che cento, dal 1861 in poi, e versano specialmente sulla Geometria analitica ed infinitesimale, sulla Meccanica razionale e sulla Fisica matematica: la strettezza del tempo e il turbamento dell'animo non mi consentono tanto, senza contare che di molto sarei incompetente a giudicare, nè del resto oggi potrei neppure dar l'elenco esatto di tutte. Caratteri comuni a tutte erano la geniale originalità, la maturità e completezza, la forma elegante e l'accuratezza bibliografica, il veramente maestrevole uso d'Analisi matematica; nulla di frammentario, di torbido, di effimero in tanta copia e varietà di scritture. Ricorderò soltanto di volo le seguenti:

Ricerche di analisi applicata alla geometria; Risoluzione del problema di riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette; Sulle superficie d'area minima; Delle variabili complesse sopra una su-

[1] Nato in Cremona il 16 novembre 1835, morto in Roma il 18 febbraio 1900.

perficie qualunque; Sulla teorica dei parametri differenziali; Saggio d'interpretazione della geometria non-euclidea; Teoria fondamentale degli spazî di curvatura costante; Sulle cubiche gobbe; Sulla equazione pentaedrale delle superficie di 3.° ordine; Sui principî fondamentali dell'idrodinamica razionale; Formules fondamentales de cinématique dans les espaces de courbure constante; Sulla teoria matematica dei solenoidi elettrodinamici; Sulla teoria del potenziale (varî lavori); *Sulle funzioni cilindriche; Sull'equazioni generali dell'elasticità; Sull'interpretazione delle formule di Maxwell; Un precursore italiano di Legendre e Lobatschewski; Sul principio di Huyghens; Sull'estensione del principio di d'Alembert all'elettrodinamica; Considerazioni sulla teoria matematica del magnetismo; Sulle funzioni complesse;* ecc.

Il Beltrami si volse ad uno studio più profondo delle Matematiche dopo che, compiuto il corso liceale a Cremona e seguito per tre anni l'universitario a Pavia, aveva dovuto procurarsi un impiego ed era già entrato nell'Amministrazione delle strade ferrate; in pochi anni, con molti egregi lavori, egli conquistò grande rinomanza in Italia e fuori, cosicchè di buon'ora i principali sodalizì scientifici italiani e poscia le Accademie di Gottinga, Berlino, Parigi, Bruxelles, Monaco lo ascrissero tra i loro soci. Visse tutto per la scienza, schivando i pubblici uffici, salvo quello di membro del Consiglio superiore della pubblica istruzione, e fu mestieri fargli dolce violenza per indurlo, or son due anni, ad accettare la presidenza dei Lincei, che egli ha tenuto con esemplare diligenza e correttezza, sì da rialzare le sorti dell'Accademia. Nel giugno 1898 egli lesse alla presenza dei nostri Sovrani, che assai lo pregiavano, una magnifica commemorazione del compianto suo predecessore Brioschi; e il Re, nella seduta solenne dello scorso giugno, volle personalmente consegnargli il diploma che lo innalzava alla dignità senatoriale, cui da molti anni lo designava la generale estimazione. Chi avrebbe potuto allora prevedere che così presto sarebbe sopravvenuto quel che per lui non può dirsi « il dì della lode », imperocchè questa lo accompagnò durante tutta la sua vita operosa e virtuosa? Egli non aveva nemici, non perchè gli facesse difetto la fermezza del carattere, ma perchè recava in tutte le sue manifestazioni una grande ed equanime serenità. La sua dipartita sarà appresa con forte rammarico dai dotti d'ogni nazione, ed io mi figuro come se ne dolga il venerando Hermite, che nutriva per lui singolare affetto. Poichè del Beltrami si può a buon dritto ripetere quel ch'egli stesso bellamente scrisse in morte del Clebsch:

« Ma purtroppo il rammentare ora i beneficii arrecati alla scienza da un uomo di simil tempra non giova affatto a lenire il dolore della sua fine immatura. Quando noi studiamo le opere dei nobili ingegni che illustrano l'età nostra, l'ammirazione ed il rispetto che proviamo davanti ad esse fanno tacere in noi ogni altro sentimento. Ma quando essi scompaiono repentinamente dalla scena del mondo; quando i loro scritti, nei quali sentivamo quasi vibrare il loro pensiero e la loro voce, diventano per noi una spendida ma pur troppo muta memoria, noi ci accorgiamo d'aver ricambiato coll'affetto più puro del cuore quei tesori di sapere, ch'essi spargevano con tanta profusione intorno a sè. E se, di più, la fama o la personale esperienza ci rappresentava quegli uomini come tipi di candore o di modestia, noi piangiamo la loro perdita come quella d'un padre o d'un fratello carissimo ».

Negli annali della scienza vivrà imperituro il nome di Eugenio Beltrami. Onore a lui, che ha così nobilmente compiuta la sua giornata, ahi! troppo breve, non già per la propria fama, ma per l'incremento degli alti studì; troppo breve per noi, che eravamo orgogliosi di averlo collega ed amico; per la sua diletta madre, che gli sopravvive; per l'egregia sua consorte, che lo circondava della più tenera devozione. Possano le loro anime desolate trovare un sollievo nella universale partecipazione al loro dolore, nelle onoranze che dappertutto vengono tributate al loro caro, e delle quali la Facoltà romana ha già preso l'iniziativa.

NOTA

Rispetto ai classici lavori sugli spazii di curvatura costante e sull'interpretazione della Geometria non-euclidea, stimo opportuno ed utile per chi si accinga a tessere una pensata commemorazione dell'illustre estinto, riprodurre ciò ch'egli me ne scriveva il 25 dicembre 1872, in una di quelle sue lettere così cordiali ed istruttive:

« Le dilucidazioni che a lei possono occorrere, circa il punto indi-
» catomi nella mia *Memoria* sugli spazii di curvatura costante, sono
» tutte contenute in un'altra *Memoria* molto anteriore (del 65 o
» 66) intitolata: *Risoluzione del problema*, ecc., citata nella Nota
» 1.ª al *Saggio* sulla Geometria non-euclidea, stampato nel Giornale
» di Napoli. Mi sia lecito il dire che questa quistione è precisamente
» quella nella quale, se non sono in inganno, io ho introdotto un ele-
» mento veramente nuovo nella ricerca analitica circa la natura degli
» spazii; e ciò è tanto vero, che gli è appunto per questa via che io
» sono entrato, senza volerlo e quasi senza saperlo, nelle dottrine di
» Lobatschewski, Riemann, ecc., nelle quali io sono poi andato a cer-
» care delle verificazioni, e che, alla loro volta, mi hanno suggerito
» altre ricerche secondarie, a cui, altrimenti, non avrei pensato. In
» una parola, ecco il principio che io credo enunciato e dimostrato
» da me per la prima volta: *La Geometria generale*, cioè senza il

» postulato d' Euclide, è, *analiticamente, la Geometria degli spazii*
» *in cui le linee geodetiche sono rappresentate da equazioni lineari.*
» S' intende bene che io parlo dei soli spazii dotati di elemento lineare
» *quadratico.* Rieman ha lasciato intravedere la possibilità d' altri
» spazii; ma è probabilissimo che la considerazione di questi sarà per
» molto tempo infinitamente più inutile, se così si può dire, di quelli
» della Geometria non-euclidea.

» Le dirò anche, e questo potrà giovare al di lei scopo, l' ordine
» cronologico dei miei studi in argomento. Dapprima un' osservazione,
» buttata là da Lagrange in una delle sue *Memorie* sulle carte geo-
» grafiche, mi ha condotto a cercare se ci fossero superficie rappre-
» sentabili sopra un piano, per guisa che le loro linee geodetiche
» fossero rappresentate da linee rette; il che è quanto dire, superficie
» rappresentabili con coordinate curvilinee u e v, per guisa che le loro
» linee geodetiche fossero rappresentate da un' equazione lineare in
» u e v. Nella citata *Memoria* del 66 ho trovato che tali superficie
» dovevano avere necessariamente la curvatura costante (positiva, ne-
» gativa o nulla). Più tardi, nel *Saggio*, ho mostrato, *partendo da*
» *questo fatto*, che nell' ipotesi della curvatura *negativa* la Geometria
» di queste superficie è identica a quella di Gauss e di Lobatschewsky.
» In segnito, volendo estendere queste considerazioni allo spazio, e
» sgomentandomi (a torto) delle difficoltà che presentava la risolu-
» zione, nel caso di 3 dimensioni, del problema già da me risoluto nel
» 65, tentai di costruire la soluzione *a priori*, cioè per induzione, e
» fortunatamente ci riuscii, osservando che il luogo della equazione (1)
» del *Saggio* si può scrivere:

$$ds^2 = R^2 \frac{du^2 + dv^2 + dw^2}{w^2}, \qquad a^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

« formole che, aggiungendo una dimensione, suggeriscono di porre:

$$ds^2 = R^2 \frac{dt^2 + du^2 + dv^2 + dw^2}{w^2}, \qquad a^2 = t^2 + u^2 + v^2 + w^2.$$

» Verificai dunque che *due* equazioni *lineari* fra le tre variabili t, u, v
» riferiscono una linea geodetica, cioè rendono $\delta \int ds = 0$. Ma appena
» conseguito questo risultato, che io sviluppai in modo prolisso e col-
» l'aiuto di variabili ausiliari e (specie di coordinate polari non-eu-
» clidee), cominciai a sospettare che il teorema fosse vero per n qua-
» lunque, e verificando questa congettura giunsi alla dimostrazione
» che forma il principio della *Memoria* sugli spazii di curvatura co-
» stante. — Più tardi, quando imparai a conoscere la teoria di Cayley,
» mi accorsi che il suo *assoluto* era precisamente quel luogo *limite*
» che io otteneva dall' equazione $w = 0$ ossia $x = 0$, e compresi che

» l'identità dei risultati era dovuta a questa circostanza, che nella » Geometria proiettiva (analitica) si ammette già per dato che le » equazioni lineari rappresentino linee di minima distanza, cosicchè » questa Geometria studia, inconsapevolmente, gli spazii di curvatura » costante. Io ho avuto il torto di non pubblicare questa osservazione, » che fu poi fatta dal Klein e corredata da lui di molti sviluppi, a » molti dei quali io non avevo punto pensato. In questo modo il mio » *principio della linearità* è stato naturalmente dimenticato, ed è » stato sostituito da quello della *proiettività* che gli equivale com- » pletamente. — Dicevo che a torto io aveva temuto di non poter » seguire, per $n > 2$, il processo tenuto per le superficie: infatti re- » centemente lo Schläfli ha svolto, sostanzialmente, questo processo » per n qualunque negli *Annali di matematica*, ed ha così dimostrato » (e generalizzato omograficamente) il punto di partenza della *Me-* » *moria* in quistione ».

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI DI E. BELTRAMI (')

1. Di alcune formole relative alla curvatura delle superficie. - Ann. di Mat., T. IV, 1861.
2. Intorno ad alcuni sistemi di curve piane. - Ivi.
3. Sulla teoria delle svilluppoidi o delle sviluppanti. - Ivi.
4. Soluzione generale del problema: rappresentare le parti di una superficie data sopra un' altra superficie parimenti data, in guisa che la rappresentazione riesca nelle parti infinitesime una figura simile alla figura rappresentata. Traduzione di G. F. Gruss. - Ivi.
5. Intorno alle coniche di nove punti ed alcune questioni che ne dipendono. - Rendic. dell'Accademia di Bologna 1862-63; Memorie dell'Acc. di Bologna, T. II, 1862.
6. Sulle equazioni algebriche. - Giornale di Matematiche, T. I, 1863.
7. Sulle coniche di nove punti. - Ivi.
8. Estensione allo spazio di tre dimensioni dei teoremi relativi alle coniche di nove punti. - Ivi.
9. Soluzione d' un problema relativo alle superficie di second' ordine. - Ivi.
10. Intorno ad alcune proprietà delle superficie di rivoluzione. - Annali di Matem. T. VI, 1864.
11. Schreiben des Herrn Professor Eugenio Beltrami in Pisa an den Herausgeber. - Archiv der Math. und Phys., XLII, Tl. 1864.

(') Dal presente indice vennero escluse alcune questioni proposte o risolte, le relazioni accademiche, ecc. [G. L.].

12. Auszug aus einem Briefe des Herrn Professor Eugenio Beltrami in Pisa an den Herausgeber - Ivi. XLIII Tl. 1865.
13. Ricerche di analisi applicata alla geometria. - Giorn. di Matematiche, T. II, 1864, e T. III, 1865.
14. Sur la courbure de quelques lignes tracées sur une surface. - Nouv. Ann. de Math., 2.ª Serie, T. IV, 1865.
15. Sulla flessione delle superficie rigate. - Annali di Matematica, T. VII, 1865.
16. Risoluzione di un problema relativo alla teoria delle superficie gobbe. — Ivi.
17. Risoluzione del problema: riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette. - Ivi.
18. Di alcune proprietà generali delle curve algebriche. - Giorn. di Matematiche, T. IV, 1866.
19. Dimostrazione di due formole del Sig. Bonnet. - Ivi.
20. Intorno ad una trasformazione di variabili. - Id. T. V, 1867.
21. Sulla minima distanza di due rette. - Ivi.
22. Di una proprietà delle linee a doppia curvatura. - Ivi.
23. Lettera ad Antonio Mogni. — Ivi.
24. Sulla teoria generale dei parametri differenziali. - Mem. dell'Acc. di Bologna, 2.ª Serie, T. VIII, 1868.
25. Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante. - Annali di Matem. Serie II, T. II, 1868. Trad. francese dell'Hoüel, in Ann. de l'Ec. norm. sup., T. VI, 1869; trad. tedesca in Mém. de la Soc. de Kasau, 2.ª Serie T. III, 1893.
26. Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque. - Annali di Matem. Serie II, T. I, 1868.
27. Memoria sulla teoria generale delle superficie d'area minima. - Rend. dell'Acc. di Bologna, 1868; Mem. dell'Acc. di Bologna, 2.ª Serie, T. VII, 1868.
28. Annotazioni sulla teoria delle cubiche gobbe. - Rend. dell' Ist. Lomb., Serie 2.ª, T. I, 1868.
29. Sulla teoria delle cubiche gobbe. - Ivi.
30. Sulla teoria delle geodetiche. - Ivi.
31. Supposta discrepanza delle due formole di Eulero e Bonnet. - Giorn. di Matematiche, T. VI, 1868.
32. Saggio di interpretazione della geometria non-Euclidea. - Ivi.; Trad. francese dell'Hoüel in Ann. de l'Ec. norm. sup. T. VI, 1869; trad. tedesca in Mém. de la Soc. de Kasan, 2.ª Serie, T. III, 1893.
33. Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche. - Mem. dell'Acc. di Bologna, 2.ª Serie, T. X, 1870.
34. Zur Theorie des Krümmungsmasses. - Mathem. Annalen, T. I, 1869.

35. Sulla teoria generale delle superficie. - Atti dell'Ateneo Veneto, T. V, 1869.
36. Intorno ad un nuovo elemento introdotto dal Sig. Christoffel nella teoria delle superficie - Rend. del R. Ist. Lombardo, Serie 2.ª, T. II, 1869.
37. Alcune formole per la teoria elementare delle coniche. - Giorn. di Matem., T. IX, 1871, e T. X, 1872.
38. Alfredo Clebsch. - Id. T. X, 1872.
39. Teorema di geometria pseudo-sferica - Ivi.
40. Osservazione sulla precedente memoria del Sig. Schläfli [Sugli spazi di curvatura costante]. Ann. di Matem. 2.ª Serie, T. V, 1872.
41. Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudo-sferiche - Giorn. di Mat., T. X, 1872.
42. Del moto geometrico di un solido che ruzzola sopra un altro solido. - Ivi.
43. Intorno ad una trasformazione di Dirichlet. - Ivi.
44. Teoria matematica dei solenoidi elettro-dinamici - Il Nuovo Cimento, 2.ª Serie. T. VII-VIII, 1872.
45. Sulla teoria analitica della distanza. - Rend. dell'Ist. Lombardo, 2.ª Serie, Vol. V, 1872.
46. Di un sistema di formole per lo studio delle linee e delle superficie ortogonali. - Ivi.
47. Sulle funzioni bilineari. - Giorn. di Matem., T. XI, 1873.
48. Osservazioni [*relative alla memoria* del Chelini: Sopra i sistemi materiali di egual momento d'inerzia]. - Id., T. XII, 1874.
49. Sul potenziale mutuo di due sistemi rigidi, ed in particolare sul potenziale elementare elettrodinamico. - Ann. di Matem., 2.ª Serie, T. VI, 1874.
50. Su alcuni teoremi di Feuerbach e di Steiner. - Mem. dell'Acc. di Bologna, 3.ª Serie, T. V, 1875.
51. Ricerche sulla cinematica dei fluidi (1). - Mem. dell'Acc. di Bologna, 3.ª Serie, T. I, 1872; T. II, 1873; T. III, 1874.
52. Formules fondamentales de cinématique dans le especes de courbure constante. - Bull. des Sc. math. et astr., T. XI, 1879.
53. Sulla determinazione sperimentale della densità elettrica alla superficie dei corpi conduttori. - Mem. dell'Acc. dei Lincei, Serie 3.ª, T. I, 1876-77.
54. Intorno al moto piano di un disco ellittico in un fluido. - Rendic. dell'Acc. di Bologna, 1876.

(1) Gli estratti di questa memoria portano invece il titolo: *Sui principii fondamentale della idrodinamica razionale.*

55. Considerazioni analitiche sopra una proposizione di Steiner. - Mem. dell'Acc. di Bologna, 3.ª Serie, T. VII, 1876.
56. Considerazioni sopra una legge potenziale. - Rend. dell'Ist. Lomb. 2.ª Serie, T. IX, 1875; Nuovo Cimento, 3.ª Serie, T. I, 1877.
57. Intorno ad alcune questioni di elettrostatica. - Id., T. X, 1877.
58. Intorno ad un caso di moto a due coordinate - Id., T. XI, 1878.
59. Intorno ad alcune proposizioni di Clausius nella teoria del potenziale. - Ivi; Nuovo Cimento, 3.ª Serie, T. IV, 1878.
60. Sulle funzioni potenziali di sistemi simmetrici intorno ad un asse. - Ivi.
61. (Con L. Cremona). Domenico Chelini, Giorn. di Matematiche, T. XVI, 1878.
62. Su alcuni punti della teoria del potenziale. - Rend. dell'Acc. di Bologna, 1877-78; Mem. dell'Acc. di Bologna, 3.ª Serie, T. IX, 1878.
63. Intorno ad una formola integrale. - Rend. dell'Ist. Lomb., 2.ª Serie, T. XII, 1879.
64. Sull'equazione pentaedrale delle superficie del terzo ordine. - Ivi.
65. Ricerche di geometria analitica. - Mem. dell'Acc. di Bologna, 3.ª Serie, Vol. X, 1879.
66. Sull'attrazione di un anello circolare od ellittico. - Mem. dell'Acc. dei Lincei, Serie 3.ª, T. V, 1879-80.
67. Intorno ad un teorema di Abel e ad alcune sue applicazioni. - Rend. dell'Ist. Lomb., 2.ª Serie, T. XIII, 1880.
68. Intorno ad alcune serie trigonometriche. - Ivi.
69. Intorno ad alcuni nuovi teoremi del sig. C. Neumann sulle funzioni potenziali. - Annali di Mat. 2.ª Serie, T. X, 1880.
70. Sulla teoria dell'attrazione degli ellissoidi. - Mem. dell'Acc. di Bologna, 4.ª Serie, T. I, 1880.
71. Della vita e delle opere di Domenico Chelini. - Collectanea mathematica, 1881.
72. Sulla teoria degli assi di rotazione. - Ivi.
73. Sulle funzioni cilindriche. - Atti dell'Acc. di Torino, T. XVI, 1881.
74. Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche. - Mem. dell'Acc. di Bologna, 4.ª Serie, T. II, 1881.
75. Sulle equazioni generali dell'elasticità. - Annali di Matem. 2.ª Serie, T. X, 1881; Nuovo Cimento, 2.ª Serie, T. XXI, 1887.
76. Sul potenziale magnetico. - Ivi.
77. Sulla teoria della scala diatonica. - Rend. dell'Ist. Lomb., 2.ª Serie, T. XV, 1882.
78. Sulla teoria dei sistemi di conduttori elettrizzati. - Ivi.
79. Sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili. - Rend. dell'Acc. di Bologna, 1882; Mem. dell'Acc. di Bologna, 4.ª Serie, T. III, 1882.

80. Sulle funzioni associate e specialmente su quelle della calotta sferica - Id. T. IV, 1883.
81. Sulla teoria del potenziale. - Rend. dell' Ist. Lomb., 2.ª Serie, T. XVI, 1883.
82. Intorno ad un problema relativo alla teoria delle correnti stazionarie. - Id. T. XVI, 1883.
83. Sulla rappresentazione delle forze newtoniane per mezzo di forze elastiche. - Ivi.
84. Sulla teoria degli strati magnetici. - Ivi.
85. Sull' equivalenza delle distribuzioni magnetiche e galvaniche. - Ivi.
86. Sur les couches de niveau electomagnétiques. - Acta mathem. T. III, 1884.
87. Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici. - Rend. dell' Ist. Lomb., 2.ª Serie, T. XVIII, 1885.
88. Sulla teoria dell' induzione magnetica secondo Poisson. - Mem. dell'Acc. di Bologna, 4.ª Serie, T. V, 1885; Nuovo Cimento, 3.ª Serie, T. XVI, 1885.
89. Sull' uso delle coordinate curvilinee nelle teorie del potenziale e dell' elasticità - Id. T. XI, 1886.
90. Sull' interpretazione meccanica delle formole di Maxwell. - Id., T. VII, 1886.
91. Sulla teoria delle onde. - Rend. dell'Ist. Lomb., 2.ª Serie, T. XIX, 1886.
92. Sulle funzioni complesse - Nota I, Id. Vol. XX, 1887; Nota II, Id. Vol. XXIV, 1890; Nota III, Id. Vol. XXVII, 1894.
93. Sulle funzioni sferiche d' una variabile - Ivi; Nuovo Cimento, 2.ª Serie, T. XXV, 1887.
94. Intorno ad alcuni problemi di propagazione del calore. - Mem. dell' Acc. di Bologna, 2.ª Serie, T. VIII, 1887; Nuovo Cimento, 2.ª Serie T. XXIII, 1888, e T. XXV, 1889.
95. Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewski - Rend. dell'Acc. dei Lincei, 4.ª Serie, T. V, 1.° Sem. 1887.
96. Considerazioni idrodinamiche. - Rend. dell' Ist. Lomb., 2.ª Serie, T. XXII, 1889; Nuovo Cimento, 3.ª Serie, T. XXV, 1889.
97. Sulla funzione potenziale della circonferenza. - Rend. del Circolo matem. di Palermo, T. III, 1889.
98. Note fisico-matematiche. - Ivi.
99. Sur la théorie de la déformation infinement petite d'un milieu. - Comptes rendus, T. CVIII, 1889.
100. Sul principio di Heygens. - Rend. dell' Ist. Lombardo, 2.ª Serie, T. XXII, 1889; Nuovo Cimento, 3.ª Serie, T. XXVI, 1889.
101. Sull' estensione del principio d'Alembert all' elettro-dinamica. -

Rend. dell'Acc. dei Lincei, 4.ª Serie, T. V, 1.º Sem., 1889; Nuovo Cimento, Serie 3.ª, T. XXVII, 1890.

102. Quelques remarques au sujet des fonctions sphériques. - Comptes rendus, T. CX, 1890.

103. Intorno al mezzo elastico di Green. - Rend. dell'Istit. Lomb. 2.ª Serie, T. XXIV, 1891 (Nuovo Cimento, 2.ª Serie, T. XXIX e XXX, 1891).

104. Sulla teoria delle onde piane. - Rend. del Circolo matem. di Palermo, T. V, 1891.

105. Considerazioni sulla teoria matematica del magnetismo. - Mem. dell'Acc. di Bologna, 5.ª Serie, T. I, 1891; Nuovo Cimento, 3.ª Serie, T. XXX, 1891, T. XXXI e XXXII, 1892.

106. Enrico Betti - Rend. del Circolo matem. di Palermo, T. VI, 1892.

107. Osservazioni su una Nota di G. Morera. - Rend. dell'Acc. dei Lincei, 5.ª Serie, T. I, 1.º Sem. 1892.

108. Sull'espressione analitica del principio di Huygens. - Ivi.

109. Considerazioni sulla teoria matematica dell'elettromagnetismo - Mem. dell'Acc. di Bologna, 2.ª Serie, T. V, 1892.

110. Sur la théorie des fonctions sphérique. - Comptes rendus, T. CXVI, 1892.

111. Sulle equazioni dinamiche di Lagrange. - Rend. dell'Ist. Lomb. 2.ª Serie, T. XXVIII, 1895.

112. A proposito di una nuova ricerca del Prof. C. Neumann. - Rend. dell'Acc. dei Lincei, 5.ª Serie, T. IV, 2.º Sem. 1895.

113. Sull'espressione data da Kirchhoff al principio di Huygens. - Ivi.

114. Sul teorema di Kirchhoff. - Ivi.

115. Sui potenziali termodinamici. - Id., 1.º Semestre 1895.

116. Sulla teoria delle funzioni sferiche. - Rend. dell'Ist. Lomb., 2.ª Serie, T. XXIX, 1896.

117. Francesco Brioschi. - Ann. di Matem, 2.ª Serie, T. XXVI, 1897; Periodico di Matem., Vol. XII, 1897.

118. Commemorazione di F. Brioschi. - Rend. dell'Acc. dei Lincei, adunanza solenne del 12 Giugno 1897.

NOTIZIE

Le opere di Gauss. — Nella prima puntata del LIII Vol. dei *Mathematische Annalen* F. Klein dà notizie intorno agli incrementi che ricevette la raccolta di documenti concernenti Gauss, che si sta facendo a Gottinga, ed allo stato dell'edizione delle opere complete del sommo geometra (cfr. questo *Bollettino*, Anno I, p. 110). Fra i nuovi acquisti fatti da quella notiamo il Diario della scoperte matematiche fatte da

Gauss negli anni 1796-1814, il quale servirà egregiamente per fissare definitivamente le date di quelle scoperte. Riguardo al proseguimento della pubblicazione delle opere, avvertiremo che del Vol. VIII (consacrato alla Matematica pura) è già stata cominciata la stampa; quella del VII (Astronomia) seguirà poi.

*
* *

GASCÓ e GERHARDT. — Nella falange dei cultori della matematica e della sua storia si sono di recente verificate due perdite assai deplorevoli, quella cioè di Luis Gonzaga Gascó, direttore dell' *Archivio de Matematica pura y aplicadas* (fondato nel 1898), e di C. I. Gerhardt, tanto benemerito per la pubblicazione delle opere matematiche e filosofiche di Leibniz.

Il primo era nato a Valencia il 29 Agosto 1844, aveva cominciato nel 1883 la sua carriera di insegnante a Ciudad Real e l'aveva poi continuata ad Albacete; era poi stato nominato, in seguito concorso, Professore all' Università di Siviglia, ma nel 1892 aveva dovuto abbandonare tale cattedra, che era stata suppressa per ragioni economiche; nel dì 7 Settembre 1893 fu chiamato all' Università di Saragozza ad insegnarvi Calcolo infinitesimale e nel 1895 venne trasferito a Valenza col grado di professore di Analisi matematica. Ivi un' improvvisa malattia lo spense addì 17 Maggio 1899.

Il secondo ebbe i natali a Herzbey vicino a Turgan (Slesia) il 2 Dicembre del 1816 e finì la sua operosa esistenza a Halle a. S il 5 Maggio 1899. Insegnò successivamente nei Ginnasi di Eutin, Salzwedel, Berlino e Eisleben; di quest' ultimo istituto fu direttore dal 1876 fino al giorno (19 Settembre 1891) in cui venne collocato a riposo. Malgrado l'avanzata età che egli aveva raggiunta, gli storici della matematica attendevano ancora qualche cosa dall' instancabile cultore degli studî Leibniziani, che egli cioè completasse la pubblicazione dell' opera *Der Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern* di cui gli fu concesso di vedere stampato il solo primo volume (v. questo *Bollettino*, Anno II, p 110).

*
* *

PIETRO D' ABANO. — Il Vol. XIV degli *Atti della R. Università di Genova*, pubblicato in questi giorni, è totalmente occupato da un importante saggio storico-filosofico del Prof. Sante Ferrari sopra *I tempi, la vita, le dottrine di Pietro d'Abano*. Come indica il titolo in questo lavoro sono delineati con ogni cura l'ambiente in cui visse e la fisonomia che possiede quell' erudito enciclopedico (nato verso il 1250 e morto nel 1315), conosciuto tanto agli studiosi della storia della filosofia quanto a quelli che si occupano della storia della medicina e delle scienze naturali. Ai nostri lettori interesseranno in particolar modo le notizie che ivi si trovano intorno al sapere matematico dello scienziato che il Prof. Ferrari giudicò degno di un così lungo studio condotto con tanto amore; essi però probabilmente non si sentiranno infiammati da grande entusiasmo per la più cospicua delle sue produzioni matematiche, consistente nella scoperta di un nuovo numero perfetto $100 = 10^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$; e piuttosto sorrideranno udendolo narrare a questo proposito: *Cum ultra quatuor annos laborassem circa expositionem seriei, fulgore quasi quodam fuit immiso.*

*
* *

Tema di Astronomia proposto dalla R. Accademia delle Scienze e Lettere di Danimarca. — Da molto tempo le trajettorie ellittiche di Keplero non sono considerate che come approssimazioni rappresentanti i veri movimenti dei pianeti soltanto per spazi di tempo poco estesi, e non vi è alcuna probabilità di ottenere presto una soluzione del problema dei tre corpi che possa offrire sotto forma conveniente dei perfezionamenti essenziali. Tuttavia, soltanto recentemente, venne emessa da Gyldén l'idea delle trajettorie intermedie, ed il loro scopo non sembra essere stato precisamente quello di porgere delle formole d'interpolazione assolutamente esatte per una estensione di tempo un po' superiore a quello al quale sono applicabili le trajettorie kepleriane. Perciò le formole proposte non si accostano abbastanza a quelle di Keplero, ed il numero delle costanti arbitrarie che esse pongono a nostra disposizione non è aumentato in modo notevole.

D'altronde, le trajettorie che si possono dedurre da equazioni differenziali della forma

$$\frac{d^n f}{du^n} + \frac{d^{n-2} f}{du^{n-2}} = 0, \quad n \geqq 4,$$

ove f rappresenta sia ciascuna delle coordinate ortogonali ed eliocentriche del corpo celeste, sia il tempo, sia anche, se si vuole, il raggio vettore, mentre u può caratterizzare l'anomalia eccentrica, queste equazioni sembrano presentare il vantaggio di potere in certe condizioni e nei casi di movimenti perturbati, servire come formole d'interpolazione più esatte. Comunque esse offrono il vantaggio d'ammettere un raddoppiamento nel numero delle costanti arbitrarie, senza che per ciò sia necessario di abbandonare le trajettorie kepleriane.

L'Accademia propose dunque la sua medaglia d'oro per

Un'elaborazione completa del sistema di formole che servono al calcolo delle trajettorie intermedie determinate dalle equazioni differenziali in questione, e dalla sua applicazione ad un caso di moto qualunque, per esempio a quello della luna, o a quello d'uno dei pianeti minori, da una opposizione alla successiva, o anche di una cometa vicinissima ad un pianeta, in una parola ad un caso capace di chiarire l'utilità e la portata del metodo segnalato.

Le memorie dei concorrenti devono essere dirette al Prof. Zeuthen, segretario dell'Accademia, prima del 1.° Novembre 1901 ed essere scritte in danese, svedese, inglese, tedesco, francese o latino. Il premio verrà aggiudicato nel Febbraio 1902.

Marco Bertolone, Direttore-Gerente.

Genova - Tipografia R. Istituto Sordo-muti - 1899.

LUGLIO, AGOSTO E SETTEMBRE 1900.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA

E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. 6, per l'estero Fr. 7. 50. Numeri separati L. 2 caduno. — Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

SUI METODI DI COMPILAZIONE DEI CATALOGHI BIBLIOGRAFICI

PENSIERI E DESIDERII

DI GINO LORIA (1)

Due processi, in apparente antitesi fra di loro, sono i principali fattori di incremento pel sapere: applicando il primo le cognizioni acquisite vengono *diffuse*, allo scopo di popolarizzarle per quanto è possibile; servendosi del secondo vengono *condensate* nell'intento di eliminare tutto il superfluo e formare con quanto è essenziale un edificio che corrisponda alle odierne esigenze della Scienza e dell'Arte. Nell'uno e nell'altro di siffatti procedimenti al bibliografo è riserbata una parte di non lieve importanza: giacchè tanto per insegnare quanto per organizzare bisogna conoscere e per impadronirsi di tutto ciò che è stato

(1) Comunicazione fatta alla III Riunione bibliografica Italiana tenutasi in Genova nei giorni 3-6 Novembre 1899.

scritto sopra un dato tema lo studioso invoca l'ajuto di coloro che hanno costante commercio con i libri; sono essi che devono somministrare il sestante, la bussola e più ancora dei buoni atlanti per orientarsi e navigare nello sconfinato oceano formato dai mille fiumi in cui si estrinseca l'immensa produzione intellettuale moderna. Ora tale ufficio modesto ma nobile, spesso oscuro ma sempre utilissimo, non venne rifiutato dai cultori della Bibliografia, i quali, anzi, accettandolo e disimpegnandolo con zelo ed intelligenza, si assicurarono la perenne riconoscenza di tutto il mondo che studia.

Siami però concesso di chiedere se, col metodo generalmente adottato nella compilazione dei Cataloghi delle opere relative ad una determinata materia, si porga il massimo ajuto possibile agli investigatori presenti e futuri. Come è notorio, tale metodo ha quale suo cardine l'aspirazione di guidare a risultati *completi* ed *impersonali;* in altri termini chi lo segue ha per fine supremo di delineare un quadro senza lacune e senza colore della letteratura concernente un argomento assegnato.

La condizione per un catalogo di essere completo sembra a taluno una di quelle assolutamente indiscutibili; io però sento a questo proposito qualche dubbio, perchè l'obbligo di registrare *tutti* gli scritti congeneri conduce spessissimo ad operare il salvataggio di opere che sarebbe meglio lasciar naufragare nel gran mare della dimenticanza, di opere a cui certamente non era rivolto il pensiero di Brunetto Latini quando a Dante insegnava « come l'uomo s'eterna ». Se non reputo opportuno l'arrestarmi a giustificare tali sentimenti, gli è che riconosco per irto di assai gravi pericoli l'abbandono della condizione di cui è parola, e più ancora perchè fra breve farò menzione di un semplice artificio che mi sembra capace di eliminare gl'inconvenienti che provengono dall'osservarla.

Quanto al secondo canone per la redazione dei cataloghi bibliografici — l'*impersonalità* — esso corrisponde ad un indirizzo oggi comune a tutti i rami dello scibile. Come i meteorologisti accumulano osservazioni sopra osservazioni, senza curarsi di ordinarle per ajutare l'opera dell'invocato creatore di una Meccanica dell'atmosfera; come certi geologi registrano la descrizione di centinaia di terremoti considerando estraneo al loro còmpito, anzi indegno di uno scienziato meritevole di tale qualifica, il formulare qualche teoria che ne spieghi l'apparizione o qualche ipotesi che permetta di distribuirli in classi: così i bibliografi — nella generalità almeno — riterrebbero di non corrispondere alle speranze in loro riposte lasciando trapelare un giudizio qualsia sulle opere di cui s'industriano di serbare memoria. In tale universale tendenza rispecchiasi indubbiamente una salutare reazione contro i provvedimenti in uso nei secoli passati: visto che certe generalizzazioni precoci o certe ipotesi troppo ardite avevano ostacolato il progresso della Scienza, si predicò la crociata contro tutto quello che non fosse il portato di esperienze sicure; visto che molte antiche opere di storia letteraria e scientifica non contenevano nè una data nè un titolo esatto, mentre per compenso erano riboccanti di considerazioni filosofiche, si decretò l'ostracismo contro gli scritti che non sono fedeli fotografie di un ambiente o semplici bilanci delle pagine scritte sopra un soggetto prestabilito. Ora che questa reazione, giusta nel fondamento, abbia ecceduto, come di regola accade per tutte le reazioni violenti, non vi è chi non veda. Taccio del fatto che essa traducesi in un muto eccitamento a lasciar poltrire l'intelletto, che essa tende a trasformare esseri pensanti e giudicanti in quelli che Emanuele Kant ruvidamente chiamava « bestie da soma di Parnaso », ricchi di memoria e poveri di giudizio. Ma voglio mostrare come essa sia germe di gravissimi danni, specialmente quando si tratti di materie in cui è frequente l'errore; e lo mostrerò ricorrendo alla disciplina in cui è minore la mia incompetenza.

Tutti sanno come sin dall'infanzia della Geometria tre bellissimi problemi abbiano stimolata la curiosità dei pensatori e siano stati in conseguenza efficacissimi eccitanti alla ricerca del vero; sono: la quadratura del circolo, la duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo. Fiumi d'inchiostro vennero sparsi per venire a capo delle difficoltà gravissime mascherate dalla traditrice semplicità degli enunciati di quei problemi; ma sì numerosi ed aguzzi sono gli scogli intralcianti la via di chi aspira a superarle, che molte riputazioni vi si infransero miseramente contro. Fortunatamente però quelle questioni sono oggi da annoverarsi fra quelle risolute: la guerra durata duemila anni essendo finita, sembra giunto il sospirato istante di celebrare il trionfo de' vincitori, eternandone le gesta. Scrivere completamente tale storia è ben lungi dall'essere facile impresa, frequentissimi ed intricati essendo gli episodî che presenta: onde può sorridere ad un bibliografo matematico la prospettiva di agevolarla compilando un catalogo degli scritti che a quei problemi si riferiscono. Ora, se si tien conto del merito intrinseco, tali lavori si distribuiscono in tre grandi categorie: negli uni sono consegnate le investigazioni che esercitarono influenza diretta e decisiva sulla soluzione di quei problemi; altri contengono dei risultati ai quali non è dovuto il raggiungimento della mèta sospirata, ma che pure sono meritevoli di prendere posto nei fasti della Scienza; altri finalmente dinanzi al tribunale della Logica hanno meritate le più infamanti condanne, sicchè coloro che vi apposero la loro firma sono inchiodati alla gogna di un eterno dispregio. Tale essendo lo stato delle cose, io chiedo di quale utilità sarebbe pel presunto storico avvenire un catalogo alfabetico o cronologico delle opere in discorso, dal quale non risultasse a quale delle indicate classi appartenga ciascuna?.. Invece di essere incessantemente ajutato, in luogo di apprendere soltanto l'esistenza di documenti importanti, egli sarebbe spesso condotto a cercare faticosamente delle produzioni che poi giudicherebbe immeritevoli di menzione nella progettata storia; sicchè bene spesso sarebbe tratto a imprecare contro il bibliografo che, mentre atteggiavasi a guida esperta, non gli forniva i mezzi per discernere i colli ubertosi dalle lande desolate, per scoprire le oasi nei deserti. E questo fenomeno che si presenta allo stato acuto nel caso che prescelsi ad illustrazione del mio asserto, s'incontrerà di regola in tutte le branche del sapere; dappertutto si troveranno teorie vere accompagnate da ipotesi provvisorie, sospette od inaccettabili, proposizioni esatte accanto a risultati falsi, lavori pensati a lato di compilazioni indigeste. Così la letteratura sopra un argomento di moda, il *femminismo*, si apre con 50 tesi pubblicamente sostenute a Wittenbergs nel 1575 per dimostrare che la donna non è creatura umana; così la letteratura relativa alla fisica è piena di scritti fondati sulla dottrina falsa dell'emissione della luce; e nella chimica, la più giovane delle scienze naturali, quante congetture tengono tuttora il campo aspettando solide teorie!

Questi fatti devono seriamente occupare il bibliografo della Scienza. Al quale incombe l'obbligo di ricordare incessantemente essere la Bibliografia una disciplina ausiliare, il cui fine supremo risiede nello spianare e lastricare la via che mena al sapere, via che diviene ogni giorno più lunga ed accidentata a cagione della vertiginosa rapidità con cui annualmente cresce il lavoro delle macchine tipografiche. Io non credo che sia per verificarsi la scoraggiante profezia di Ernesto Rénan, che il secolo XX non troverà il tempo per leggere quanto scrissero i secoli precedenti; non lo credo perchè le continue ristampe di opere antiche e l'amorosa cura con cui alla vigilia del nuovo Secolo vengono dissepolte e pubblicate le opere inedite, sembrano sintomi di un rafforzarzi ed estendersi, piuttosto che di un affievolirsi od estinguersi del culto pei nostri maggiori. Ed appunto per ciò giudico essere dovere di noi tutti il compiere un'opera buona verso i nostri posteri esonerandoli dall'occuparsi di opere immeritevoli della loro attenzione: per ciò basta compilare degli elenchi ove siano schiettamente distinte le opere fondamentali dai contributi parziali e dalle opere di nessun valore, chè così gli investigatori delle età future, i quali certamente non potranno leggere tutto quello che riceveranno in eredità dai predecessori, sapranno almeno come scegliere.

Non mi dissimulo che per fare a dovere una classificazione di tale genere sono indispensabili pazienti e faticosi studì; ma non sono forse necessarì a chiunque voglia compiere un'impresa di valore permanente?..

Era noto sin dai tempi del Tasso che

.... non sotto l'ombra, in pioggia molle
Fra l'erbe e i fior, fra ninfe e fra sirene,
Ma su per l'erto e faticoso colle
Della virtù riposto è il sommo bene:
Chi non gela non suda e non s' estolle
Dalle vie del piacer, là non perviene.

So pure che siffatta classificazione, anche se eseguita a dovere. non verrà accettata, per quanto sia incontrastata la competenza ed imponente l'autorità dell'autore. E che perciò?.... È sorte comune di qualsia opera umana il venire discussa e criticata; è un destino a cui non si sottraggono nemmeno gl'impersonali cataloghi alfabetici, nella cui compilazione taluno fa risiedere tutta l'arte o scienza bibliografica.

Ma è ormai tempo di concludere.

Alieno per indole dalla sterile critica che turba e non rinnova, sento l'opportunità di tradurre i miei desiderî in una proposta concreta; rifuggendo d'altronde da innovazioni. violente, non chiedo il bando dei cataloghi alfabetici o cronologici, domando soltanto che coloro i quali ne compileranno in avvenire ravvivano i loro lavori con quello spirito di libero esame, caratteristico del secolo di cui stiamo per celebrare i funerali. E per discendere a particolari ancor più minuti suggerirei loro di distribuire tutti gli scritti congeneri in tre grandi categorie; ponendo nella prima i lavori fondamentali ed ottimi, nella seconda quelli secondarî ma utili, e nella terza i rimanenti; coll'intento di non abbandonare l'ordinamento alfabetico o cronologico, l'uno e l'altro utilissimi, si potrebbe segnalare con due asterischi gli scritti della prima classe e con uno quelli della seconda. È questo un sistema pratico semplicissimo, modellato su quello notissimo a coloro che ebbero occasione di servirsi delle celebri Guide edite dalla Casa Baedecker: ed io sono convinto che il « sistema degli asterischi », trasportato nel campo della Bibliografia ed usato con scienza e coscienza, recherà vantaggi comparabili a quelli che, nella sua forma primitiva, portò ai viaggiatori di tutto il mondo.

Ciò che dissi e proposi relativamente a' cataloghi di opere stampate vale ad assai più forte ragione per gli elenchi di manoscritti, vista l'immensa difficoltà che incontra in Italia chi, senza vivere nell'ambiente di una grande biblioteca, ha bisogno di consultare qualche lavoro tuttora inedito. Lo smuovere un manoscritto dalla sua consueta sede è nel bel paese un problema di meccanica teorica, per trattare il quale sono insufficienti i precetti datici da Lagrange, è un problema di meccanica pratica che niun motore conosciuto è sufficiente a risolvere. Onde sarebbe un cattivo servizio quello che il bibliografo farebbe allo storico segnalandogli l'esistenza di manoscritti di valore esiguo.

o nullo, chè tale indicazione altro effetto non avrebbe che fargli commettere dei vani peccati di desiderio.

E qui mi sia concesso di esprimere — finendo — un voto a cui indubbiamente molti studiosi si associeranno, di rivolgere una preghiera a coloro a cui è affidata la custodia dei più preziosi cimelî. La gelosia con cui essi li conservano merita indubbiamente i maggiori encomi: un doloroso fatto, di recente accaduto, basterebbe a persuaderne i più increduli! Ma sarebbe indispensabile contemperarla con l'aspirazione di diffondere la conoscenza di quanto contengono, incoraggiandone ed aiutandone la riproduzione per via della stampa. È indiscutibile che dei manoscritti in cattivo stato, corrosi dagli acidi contenuti nell'inchiostro in cui furono scritti, vanno esposti ad un viaggio con grandi cautele e con repugnanza vi si adatterà chi ne è depositario; ma non è troppo rigore il rifiutarli a qualcuno dei rari studiosi che desiderano prenderne conoscenza, forse alla vigilia del giorno in cui essi saranno divenuti illegibili?.... Conseguenza del sistema ora vigente è che opere di straordinaria importanza — quali sarebbero quelle di Evangelista Torricelli e di altri discepoli di Galileo — rimangono impenetrabili anche a chi vorrebbe servirsene per risolvere dei problemi storici fondamentali. In conseguenza avviene pure che sopra gli eruditi Italiani pesi un duplice ingiusto addebito: gli stranieri li accusano di tenere celate, quasi per averne il monopolio, le produzioni de' progenitori, mentre i compatrioti fanno loro una colpa di non curare che le nostre glorie rifulgano della loro luce più vivida e pura. Sappiano gli uni e gli altri che per far ciò in molti casi è il potere che manca, non il volere; e non dimentichino coloro i quali sono preposti alla conservazione dei manoscritti che una biblioteca non è un museo, ma un laboratorio.

BIBLIOGRAFIA

sui Fondamenti della Geometria in relazione alla Geometria Non-Euclidea

compilata da ROBERTO BONOLA

(Continuazione. Vedi p. 41).

PUBBLICAZIONI CHE SI RIFERISCONO ALLA MECCANICA ED ALLA FISICA-MATEMATICA

Il gruppo delle pubblicazioni qui annoverate, senza pretendere di porgere un elenco completo di quanto si riferisce alla meccanica ed alla fisica-matematica, in relazione alle geometrie non-euclidee, riunisce

piuttosto gli scritti che a tali discipline si riferiscono e che noi incontrammo nella compilazione della presente bibliografia.

Andrade, J. — *Statique non-euclidienne* (Verhandlungen der Ersten internationalen Math. Kongresses in Zürich, 1897; Leipzig, Teubner 1898).

Id. — *Leçon de Mécanique physique* (Paris, Societé d'editions scientifiques, 1896).

Ball (Stawell), R. — *The theory of screws* (Trans. of the R. Irish Accademy, Vol. XXV, 1872).

Id. — *The theory of Screws, a study in the Dynamics of a rigid body.* (Dublin, 1876).

Id. — *Dynamics and Modern Geometry: a new chapter in the Theory of Screws* (Cunnigham. Mem. of the R. Irish Accademy, IV, 1886).

Id. — *The twelfth and concluding Memoir on the Theory of Screws, with a summary of the twelve memoirs* (Mem. of the R. Irish Accademy, Vol. XXXI, 1896).

Beltrami, E. — *Formules fondamentales de cinématique dans les éspaces de courbure constante* (Bull. Sc. math. XI, 1876).

Id. — *Sulle equazioni generali della elasticità* (Ann. Math. (2), X, 1881).

Buckheim, A. — *On the Theory of Screws in Elliptic Space* (Proc. L. M. S., XV, XVI, XVII, 1884-85).

Burnside, W. — *On the Kinematics of Non-Euclidian space* (Proc. L. M. S. XXVI, 1895).

Calinon, A. — *Etude de cinématique à deux et à trois dimensions* (Paris, 1890).

Cesaro, E. — *Moti rigidi e deformazioni termiche negli spazi curvi* (Lincei, Rend. 4.ª Serie, T. IV, 2.º Semestre 1888).

Id. — *Introduzione alla teoria matematica della elasticità* (Torino, Bocca, 1894).

Clifford, W. — *On the Space-theory of Matter* (Cambridge, Philosophical Society's Proceeding; II, 1876; oppure Math. Papers, n.° V.).

Id. — *Preliminary Sketch of Biquaternions* (Vedi Clifford, Indirizzo proiettivo).

Id. — *Further note on Biquaternions (elliptic space)* (Vedi Clifford, Indirizzo proiettivo).

Id. — *Motion of a Solid in Elliptic space* (Math. Papers, n.º XLI).

Id. — *On theory of Screws in a space of constant positive curvature* (Math. Papers, n.º XLIV).

Id. — *On the Free Motion under no forces of a rigid system in an n-fold Homaloid* (Proc. L. M. S., VII, 1876; oppure Math. Papers, n.º XXVI).

FRESDORF — *Ueber die Geometrie und die Potentialfunktion im Gaussischen und Riemannschen Raum* (Dissertazione - Göttingen, 1873).

GENOCCHI, A. — *Dei principii della meccanica e della geometria in relazione al postulato di Euclide* (Vedi Genocchi, indirizzo elementare).

Id. — *Sunto di una memoria di A. Genocchi « intorno ai principii della geometria »* (Vedi Genocchi, Indirizzo elementare).

Id. — *Sur un mémoire de Daviet de Foncenex* (Vedi Genocchi, Indirizzo elementare).

HEAT, R. S. — *On the Dynamics of a Rigid Body in Elliptic Space* (Phil. Trans. CLXXV, 1884).

KILLING, W. — *Die Mechanik in den nichteuklidischen Raumformen* (Crelle, IIC, 1885).

Id. — *Ueber die Clifford-Kleinschen Raumformen* (Math. ann. XXXIX, 1891).

KILLING. W. — *Einführung in die Grundlagen der Geometrie.* I Bd., vierter Abschnitt (Vedi Killing, indirizzo differenziale).

KLEIN, F. — *Zur Nicht-Euklidischen Geometrie* (Vedi Klein, Indirizzo proiettivo).

Id. — *Vorlesungen üeber die Nicht-Euklidische Geometrie* (Lezioni litografate, pag. 199-223 — Vedi Klein, Indirizzo proiettivo).

LECHALAS, G. — *Étude sur l'espace et sur le temps* (Paris, F. Alcan, 1896).

LINDEMANN, F. — *Ueber unendlich kleine Bewegungen starrer Körper bei allgemeiner projectivischer Massbestimmung* (Erlang. Berl. 1873; Math. Ann. VII, 1874).

LIPSCHITZ, R. — *Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung in welchem das Problem der Mechanik euthalten ist* (Crelle LXXIV, 1872).

Id. — *Extension of the Planet — problem to a Space of* n *Dimensions and of Constant Integral Curvature* (Quart. Journal, XII, 1871).

MANSION, P. — *Sur les principes fondamentaux de la géométrie, de la mécanique et de l'astronomie* (Paris, Gauthier-Villars, 1893).

MOST. — *Neue Darlegung der absoluten Geometrie und Mechanik mit Berücksichtigung der Frage nach den Grenzen des Weltenraumes* (Coblenz, 1883).

OPITZ. — *Einige Sätze üeber die Anziehung in mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemannschen Raume* (Göttingen, 1881).

PADOVA. — *La teoria di Maxwell negli spari curvi* (Rend. Acc. Lincei 4.ª Serie, T. V, 1.º Semestre, 1889).

SCHERING, E. — *Die Schwerkraft im Gaussischen Raume* (Gött. Nachr. 1870).

SCHERING, E. — *Die Schwerkraft im mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemannschen Raume* (Gött. Nachr., 1873).
TILLY (de), M. — *Études de mécanique abstraite* (Mem. couronnés par l'Academie R. Belgique, XXI, 1868).
Id. — *Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique* (Mem. Societé des sciences phisiques et naturelles de Bordeaux (2), III, 1879).
Id. — *Essai de Géométrie analytique générale.* Note IV: *Sur l'impossibilité d'un système de géométrie non compris dans les déterminants* (8) *et* (9). — (Vedi Tilly, Distanza finita).
ZÖLLNER, I. C. F. — *Principien einer Elektrodynamischen Theorie* (Leipzig, 1876).

(Continua)

RECENSIONI ED ANNUNZI

E. BOREL. — *Leçons sur la théorie des fonctions* — Paris, Gauthier-Villars, 1898, VIII-137 p., 8.° [Prezzo 3 fr. 50].
» » — *Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions — Leçons sur les fonctions entières.* — Paris, Gauthier-Villars, 1900, VII-124 p., 8.° [Prezzo 3 fr. 50].

Chi sperasse di trovare in queste lezioni un' esposizione sistematica degli argomenti indicati nel frontispizio rimarrebbe certamente deluso; chi cercasse invece in essi occasione di studio e di ricerca originale potrebbe raccogliere larga messe in ambi gli opuscoli. In essi l'autore tratta soltanto alcuni capitoli delle teorie che dànno loro il nome, — quelli appunto che hanno trovato la maggior rispondenza nella sua mente, e a cui egli ha collaborato o dal lato critico o dal lato euristico. Di qui l' attrattiva particolare che presenta la lettura di questi opuscoli, la quale ci mostra, per così dire, la materia in via di formazione, e ci svela i processi chimici che in essa si vanno svolgendo, mentre ci addita i punti sui quali il futuro analista dovrà fissare la sua attenzione e i problemi che più urgenti si impongono al suo studio.

Troppo lungo, benchè sommamente interessante, sarebbe esaminare in tutti i suoi particolari il contenuto dei due libri che ci stanno dinanzi; noi ci limiteremo ad un rapido cenno, il quale, se non sarà sufficiente a darne un' idea esatta, varrà, speriamo, ad acquistare nuovi lettori agli importanti opuscoli del giovane e promettentissimo geometra francese.

Le lezioni sulla teoria delle funzioni constano di sei capitoli.

I primi tre sono dedicati all' esposizione dei principii della teoria degli aggregati.

Data la definizione di *potenza* e di *aggregato numerabile*, si stabilisce il posto che tengono gli aggregati numerabili nel campo di tutti i possibili aggregati infiniti; segue la dimostrazione dell' equivalenza degli aggregati continui a un numero diverso di dimensioni, e lo studio dei numeri algebrici, degli aggregati perfetti, e di quelli *misurabili* (dove il concetto di *misura* non deve confondersi con quello di *grandezza* di Cantor).

Il cap. 4 tratta della continuazione analitica delle funzioni; contiene la dimostrazione di Poincaré del teorema, che l' insieme dei valori che una funzione analitica polidroma prende in un punto è numerabile, e quella di Weierstrass della rappresentabilità mediante una stessa espressione analitica di più funzioni analitiche tra loro indipendenti ed esistenti in campi separati.

Dopo avere studiato nel cap. 5 certe serie reali ad una e a più variabili di cui dovrà servirsi in seguito, l'autore viene a considerare nel cap. 6 il problema della rappresentazione d' una funzione analitica uniforme mediante un'espressione analitica convergente in tutto il campo d' esistenza della funzione data. La soluzione di Mittag-Leffler non è del tutto generale; lo sono invece quelle di Runge e di Painlevé, ma queste hanno lo svantaggio di non essere uniche. Tornando poscia al secondo degli argomenti trattati nel cap. 4, l'autore mostra che, se si considerano espressioni analitiche soggette a certe restrizioni, le corrispondenti funzioni analitiche non possono essere del tutto indipendenti tra loro, ma sono legate da relazioni semplici, per modo che esse possono, in un certo senso, considerarsi come *continuazioni analitiche* le une delle altre attraverso linee chiuse.

L' opuscolo finisce con tre note.

La prima di queste tratta del concetto di potenza. Dati due aggregati, può avvenire che uno, ciascuno o nessuno di essi contenga un aggregato parziale equivalente all' altro; nell' ultimo caso le potenze dei due aggregati non sono comparabili, e l' impossibilità di questo caso fu sinora asserita, ma non dimostrata, ciò che costituisce un' importante lacuna nella teoria di Cantor. Invece, nell' ipotesi che ciascuno dei due aggregati contenga un aggregato parziale equivalente all'altro, l' autore riporta una dimostrazione dell' equivalenza dei due aggregati dovuta al sig. F. Bernstein. Segue l' esposizione del metodo del Cantor per formare aggregati di potenza sempre più grande.

La nota seconda comincia col teorema di Du Bois-Reymond: Data una successione numerabile di funzioni crescenti, si può sempre trovare una funzione crescente maggiore di tutte queste (per valori abbastanza grandi della variabile). Di qui Borel deduce, con un processo notevole ed originale sul quale ci duole dover sorvolare, il concetto di aggregato della seconda potenza e di numero trasfinito, e giunge alla conclusione, che l'insieme di tutte le funzioni crescenti ha la potenza del continuo.

Infine nella nota terza, messo in chiaro che una funzione discontinua non soggetta ad alcuna restrizione è definita da un insieme non numerabile di condizioni, l'autore studia certe classi di funzioni discontinue definite da un insieme numerabile di condizioni, e termina con alcune considerazioni sul concetto di funzione arbitraria.

Le lezioni sulle funzioni intere constano di cinque capitoli, che s'intitolano rispettivamente da Weierstrass, Laguerre, Poincaré, Hadamard e Picard.

Nel cap. 1, dopo le definizioni fondamentali e la dimostrazione del primo teorema di Picard, l'autore passa al concetto di fattore primo e alla formola di Weierstrass; introduce poi la denominazione di *esponente di convergenza* d'una successione di numeri positivi crescenti per designare l'elemento di separazione dei numeri che, assegnati come esponenti ai reciproci degli elementi della successione, dànno luogo ad una serie divergente, e di quelli che dànno luogo ad una serie convergente.

Il cap. 2 è dedicato alle funzioni intere di genere zero e di genere uno, e più generalmente a quelle di genere finito. Oltre al genere, Borel considera l'*ordine reale* d'una funzione intera, che è semplicemente l'esponente di convergenza della successione crescente formata dai moduli delle sue radici.

Nel cap. 3 si dimostrano i noti teoremi di Poincaré sul rapporto tra il genere d'una funzione intera e la rapidità con cui essa cresce quando il modulo della variabile tende ad infinito, e sul rapporto tra il genere e la rapidità con cui decrescono i coefficienti. L'introduzione del concetto di ordine reale permette all'autore di precisare di più i risultati di Poincaré.

Il cap. 4 contiene la dimostrazione di due teoremi di Hadamard e qualche applicazione di essi; notevole, per la sua semplicità, la dimostrazione, che il fattore esponenziale esterno dello sviluppo della funzione seno secondo la formola di Weierstrass è 1.

Il cap. 5 comprende varie generalizzazioni dei teoremi di Picard.

Seguono tre note, di cui la prima riproduce una dimostrazione elementare data dall'autore (*Comptes-Rendus*, 11 maggio 1896) del primo teorema di Picard, e le altre due sono dedicate rispettivamente alle funzioni che l'autore dice *ad aumento regolare*, ed a quelle che egli chiama *ad aumento irregolare*.

G. Vivanti.

DAVID EUGENE SMITH. *The Teaching of elementary Mathematics.* 8.°, p. XV, + 312. New York, The Macmillan Company 1900 [Prezzo del vol. legato 4 sh. 6 d.].

« È evidente » osserva l'egregio autore del lavoro che ci apprestiamo ad analizzare « che il problema di preparare un'opera sull'insegnamento della matematica elementare può venire considerato da varî punti di vista. Lo scrittore può ad esempio limitare le sue considerazioni a modelli moderni; o a spiegare le parti più difficili dell'argomento; o alla psicologia del suo tema; o al paragone di metodi storici; o alla spiegazione di quelle difficoltà che assorbono tanto tempo nei corsi ordinarî. Egli può, con ragione, asserire che la matematica elementare comprende oggidì la trigonometria, la geometria analitica ed il calcolo infinitesimale; e che quindi un'opera avente quel titolo dovrebbe essere eretta sulla stessa base su cui sorgono la « Méthodologie » del Dauge o « La mathématique » di Laisant (1). Egli può procedere dogmaticamente enunciando seccamente e brevemente delle regole d'insegnamento, scusando la conseguente distruzione dell'indipendenza dell'insegnante colla massima che il fine giustifica i mezzi. Ma con uno spazio limitato a propria disposizione, qualunque sia il punto di vista che egli presceglie, deve lasciare gli altri più o meno intatti, non potendo condensare in trecento pagine un'intera enciclopedia. »

A quale partito siasi appigliato l'autore per scansare questi inconvenienti emerge dalle seguenti parole della prefazione: « Questo trattatello ha l'intento di ajutare coloro che vogliono prendere una via piana e breve e desiderano sapere qualche cosa su queste grandi questioni didattiche: Qual è l'origine del tale argomento? Perchè debbo io insegnarlo? Come venne insegnato? Che cosa debbo leggere per preparare il mio lavoro? Il tema è pertanto considerato in uno stato di evoluzione, essendo il metodo comparato piuttosto che l'asserzione dogmatica la nota dominante. È bensì vero che sono offerti certi tipi — o metodi, come sono ordinariamente chiamati: ma sono presentati piuttosto come rappresentanti dello sviluppo attuale del tema che come risultati finali. L'autore si è quindi sforzato sempre di esporre la materia in uno stato di movimento al cui ulteriore sviluppo l'insegnante è destinato a contribuire; di opere rappresentanti l'elemento statico essendovene a sufficienza ».

Conformemente a questo programma l'autore dedica il I Cap. della sua opera ad esporre le ragioni storiche per le quali l'aritmetica venne insegnata ed il II a far conoscere il perchè essa sia tuttora un elemento importante di qualunque piano ragionato d'istruzione. Nei due

(1) Cfr. questo *Bollettino*, Anno I, p. 51.

Cap. seguenti egli fa conoscere come si è sviluppata l' aritmetica e come sia stata insegnata in passato; mentre l' esposizione dell' odierno insegnamento della stessa disciplina riempie il V Cap. — I tre seguenti concernono l' algebra; e precisamente il VI dà uno schizzo storico dello sviluppo di questa scienza, il VII fa conoscere il perchè ed il come essa è stata insegnata ed il successivo è destinato a porre in rilievo quali siano le parti tipiche di essa. — A codesti capitoli fanno riscontro i quattro seguenti, i quali trattano le questioni seguenti: Cap. IX: Sviluppo della geometria; Cap. X: Che cos' è la geometria? suggerimenti generali per insegnarla; Cap. XI: I fondamenti della geometria: Cap. XII: Parti tipiche della geometria. — L'ultimo capitolo completa quanto precede con alcuni suggerimenti intorno al modo in cui un insegnante deve comporre una propria biblioteca ed alle opere che ne debbono formar parte; le opere indicate sono assai bene scelte ed il lettore non si meraviglierà di trovarle raccomandate avendole già viste più volte citate con lode nei capitoli precedenti del lavoro del sig. Smith; ad esse però io vorrei fosse aggiunta quella di M. Simon (e J. Kissling) intitolata *Didaktik und Methodik des Rechnen — Mathematik — und Physik - Unterrichts* (München, 1895), e che è strano sia completamente sfuggita al dotto autore (1). Nella collezione ausiliaria giudiziosamente proposta dall' eminente direttore della Scuola normale di Brockport deve poi entrare per fermo l' opera analizzata: la quale sia pel valore intrinseco che possiede che per le copiose indicazioni bibliografiche di cui è corredata, porgerà degli inestimabili servigi a tutti coloro che aspirano a addestrarsi nella difficile arte di insegnare i primi elementi delle matematiche. G. L.

Questioni riguardanti la geometria elementare, raccolte e coordinate da Federico Enriques — Bologna, Ditta Nicola Zanichelli, 1900, 8.° pag. 532 [Prezzo L. 12].

Il Prof. Enriques ha voluto rendersi utile agli insegnanti di matematica delle scuole secondarie raccogliendo in un volume, con l' aiuto di vari egregi collaboratori, le principali quistioni di geometria elementare la cui conoscenza deve ormai entrare nel patrimonio scientifico di ogni anche modestissimo cultore della geometria. Il libro è diviso in quattordici articoli, ognuno dei quali trattato da un solo autore in modo da tener conto del contenuto degli altri, senza tuttavia rinunciare a criteri e giudizi individuali.

Il primo articolo, redatto dal Prof. Enriques, mira a porre le prime

(1) V. un mio articolo nel T. XI, 1896, del *Periodico di matematica per l' insegnamento secondario* (p. 42-43).

basi all' edificio geometrico ed a fornire utili osservazioni didattiche. Contrariamente alla dottrina Kantiana delle idee a priori, seguendo invece le tendenze moderne ormai accettate in maggioranza, l'A. stabilisce la geometria sulla base dell' esperimento, mettendo però bene in rilievo quel carattere di scienza logica che la distingue dalle altre scienze sperimentali e che le conferisce un alto grado di certezza. Il sentimento illusorio di *necessità* che accompagna i dati geometrici primitivi egli spiega col fatto che le esperienze elementarissime che loro danno origine si compiono e si ripetono prima che intervenga l' atto della coscienza. Strumenti di quelle esperienze sono alcuni degli organi dei sensi, alle cui sensazioni, corrispondono vari indirizzi geometrici; e precisamente: alle sensazioni generali tattili-muscolari corrisponde la teoria del continuo, a quelle del tatto localizzato la geometria metrica, a quelle della vista la geometria proiettiva. L'A. si sofferma poi ad esaminare le condizioni a cui deve soddisfare la scelta dei dati fondamentali affinchè nella geometria si raggiunga la più rigorosa formulazione logica possibile; tuttavia distingue le esigenze scientifiche da quelle didattiche, concedendo che per queste basti enunciare esplicitamente fin dapprincipio *tutti* i dati da cui si parte. Egli nota poi che collocando la geometria su di una base empirica potrà darsi che essa non ci rappresenti esattamente lo spazio reale. Ciò dipende dall' esattezza con cui si sperimentano i dati primitivi. Nè si potrà senza tema d'errore estendere all' infinito i risultati che l' esperienza ci ha dato in un campo finito. Così dalle profonde ricerche di Helmholtz e di Lie scaturisce che « le proprietà fondamentali del movimento fisico più precisamente verificabili in un campo dello spazio accessibile all' esperienza permettono di ritenere valida in esso la geometria generale prescindente dal postulato delle parallele; quest' ultimo postulato non ammette una prova sperimentale di esattezza comparabile a quella spettante ai postulati del movimento ».

Il solo desiderio che l'articolo lascia nel lettore è quello di un maggior sviluppo di quelle idee che vi sono soltanto abbozzate; vi si oppone l' esigenza del libro. Vi ha però pensato il Prof. Enriques là dove accenna ad una più distesa trattazione che dovrà comparire al pubblico; il quale naturalmente attende con impazienza.

Nel 2.° articolo il Sig. U. Amaldi espone per ordine storico le varie definizioni di retta e di piano che da Euclide in qua furono successivamente introdotte; e si trattiene alquanto, come quello che offre particolare interesse, sullo sviluppo di Bolyai e di Lobatschefskij, in cui si parte dalle nozioni di coppia di punti rigida ed invertibile e di congruenza per arrivare al piano come luogo dei punti equidistanti da due punti fondamentali e alla retta come luogo dei punti che restano fermi in ogni movimento dello spazio che ne lascia fissi due. L'A. giustamente osserva che le varie definizioni proposte, che siano veramente tali, partono da concetti primitivi meno semplici di quelli che si vogliono definire; donde la convenienza di introdurre retta e piano come concetti primitivi postulandone le proprietà geometriche. E prime di tutte le proprietà di appartenenza fra punto retta e piano considerati a due a due; quindi le proprietà che si collegano ai concetti di segmento e di angolo, sia partendo da un punto di vista *genetico*, sia partendo da un punto di vista *attuale*.

Il Sig. A. Guarducci nel 3.° articolo tratta della congruenza e del movimento. Egli nota la confusione fatta da taluni autori fra *congruenza* o uguaglianza geometrica e *identità* o uguaglianza logica, com'è manifesto dalla definizione che: due figure geometriche sono uguali se si può dire dell'una tutto ciò che si dice dell'altra. Questa definizione, se si tien conto della posizione che possono avere nello spazio due figure congruenti fra loro, per rispetto ad una terza, è vera solo nel caso di coincidenza delle due figure. Possiamo pensare con Helmholtz che l'idea di congruenza nasca dal principio sperimentale della sovrapponibilità; ne segue un primo indirizzo in cui si assume come primitivo il concetto di movimento e se ne deduce la definizione di congruenza; come fece il Lie in modo rigoroso. Però l'A. ritiene che questo metodo non sia conveniente nel campo didattico per gli sviluppi che esige, senza contare che neppure vi si presta il modo con cui nella geometria elementare sono introdotte le prime proprietà del movimento.

Ma, comunque si acquisti l'idea di congruenza, è pur vero che essa si presenta alla mente già formata anche sotto la forma di « possibilità di sostituire una figura ad un'altra, ad essa uguale, in tutto un ordine di proprietà ». Idea più semplice di quella del movimento al quale si lega solo per la considerazione degli stati estremi trascurando la continuità di quelli intermedì. Quindi all'A. sembra più conveniente assumere come primitiva la nozione di congruenza, come è fatto nei metodi (che vengono esposti) del Pasch, del Veronese, dell'Hilbert. Da ultimo, in alcune considerazioni didattiche comparative l'A. osserva che dal punto di vista teorico il sistema del Veronese segna un progresso su quello del Pasch, poichè parte da un'idea più semplice, mentre didatticamente riesce forse più complicato. Il sistema dell'Hilbert ha poi sovra entrambi il vantaggio di non introdurre fin dapprincipio la nozione astratta di corrispondenza e di dare come primitivo, oltre al concetto di congruenza fra segmenti, anche quello di congruenza fra angoli; il che arreca maggior semplicità.

L'art. 4.°, del Sig. G. Vitali, versa sulle applicazioni del postulato della continuità nella geometria elementare. L'A. nota che dai concetti primitivi di retta, piano, segmento, angolo, congruenza non è possibile dedurre certi fatti intuitivi che fanno richiamo al concetto della continuità dello spazio, il qual concetto vuol essere precisato con un postulato. Perciò, dopo alcune considerazioni, enuncia il postulato del Dedekind, che, relativo ai segmenti, si estende logicamente agli angoli e agli archi di cerchio. Applica quindi il postulato detto a dimostrare in primo luogo la divisibilità del segmento in n parti uguali senza dipendere dal postulato delle parallele; in secondo luogo a dimostrare la proposizione di Archimede e le proposizioni relative alle intersezioni di retta e cerchio e di due cerchi, la prima delle quali in Euclide è data implicitamente come primitiva. Da ultimo vien fatta applicazione alla teoria della misura.

Il 5.° articolo ha per argomento la teoria dell'equivalenza ed è dovuto al Sig. Amaldi, che già trattò il tema dell'art. 2.°. L'A. presenta un disegno storico dei vari stadi della teoria esponendo le nozioni di equivalenza che si sono date da Euclide al Legendre, al Bolyai, al Lobatschefskij al Duhamel, fino ai tentativi di dimostrazione del « principio di De Zolt » per i poligoni piani, dei quali tentativi il primo riuscito è dovuto allo Schur, seguito poi più o meno davvicino nel concetto dal Rausenberger, dal Gérard, dal Lazzeri, dal Veronese. La dimostrazione di quest' ultimo viene scelta per una completa esposizione. Pei cerchi e più in generale per le superficie piane a contorno qualsivoglia si dà uno sguardo alle ricerche dovute al Killing, al Bolyai, al Réthy. Per i poliedri sorgono analoghe quistioni che per i poligoni e fra le dimostrazioni che furon date del « principio di De Zolt » relativo ai poliedri si esponė distesamente quello del Veronese. In ultimo è detto qualcosa sulle proposte del Giudice, del Frattini, del Ciamberlini, tendenti a mutare l' assetto logico della teoria dell'equivalenza. Chiudendo l'articolo l'A. esprime il suo parere sulla convenienza didattica di dare la proporsizione di De Zolt come postulato, tanto per i poligoni, quanto per i poliedri.

L'art. 6.°, del Sig. R. Bonola, riguarda la teoria delle parallele e le geometrie non euclidee. Fatta precedere una chiara rassegna storica dell' argomento, dai primi tentativi per la dimostrazione del postulato di Euclide fino all'opera del Wallis, del Sacheri, del Lambert, del Legendre ecc. e via via fino alle più recenti ricerche del Lie, l'A. fa conoscere i punti di vista secondo cui può venir trattata la geometria non euclidea: cioè il punto di vista elementare svolto da Bolyai e Lobatschefskij, quello metrico-differenziale di Riemann ed Helmholtz, quello proiettivo di Cayley e Klein. Vengono poste in evidenza le relazioni che passano fra la geometria sulle superficie e le geometrie non euclidee e la possibilità di subordinare queste ultime alla geometria proiettiva. Da ultimo sono esposti i fondamenti di una teoria generale delle parallele e sono trattate con sufficiente ampiezza le prime proprietà delle geometrie iperbolica ed ellittica, facendo spiccare le più notevoli.

Da questo punto gli articoli cessano dal rivolgersi ai principî della geometria per occuparsi invece della risolubilità dei problemi con dati mezzi e dei metodi di risoluzione.

L'art. 7.° « Sui metodi elementari per la risoluzione dei problemi geometrici » del Sig. E. Baroni, fa qualcosa di analogo al libretto ben noto del Petersen, esponendo successivamente per il piano i metodi dei luoghi geometrici, della similitudine, di moltiplicazione, i metodi di trasformazione per inversione, per traslazione parallela, per rotazione, ecc. Ad ogni metodo si accompagna la risoluzione di problemi scelti fra i più idonei a far cogliere lo spirito del metodo stesso.

L'art. 8.°, del Sig. E. Daniele riguarda la risoluzione dei problemi geometrici col solo compasso. Nello sguardo storico preliminare si nota come già nel secolo XVI il Tartaglia ed altri geometri italiani siano pervenuti alla risoluzione di tutti i problemi elementari mediante la riga ed un compasso di apertura fissa. Lorenzo Mascheroni col solo compasso risolve tutti i problemi elementari. Fra gli altri che in appresso si occuparono di geometria del compasso, sia con rimaneggiamenti, sia con estratti del libro di Mascheroni, vanno ricordati il Frischauf e l'Hutt. Invece il Dubouis e G. Cesaro, ignorando l'esistenza di lavori sull'argomento, pervennero mediante costruzioni dello stesso tipo di quelle del Mascheroni al medesimo risultato. L'Adler si stacca dai precedenti uscendo dal campo veramente elementare per l'applicazione ch'egli fa dell'inversione a dimostrare la possibilità di risolvere col solo compasso i problemi elementari ed a fornire un metodo per l'effettiva risoluzione.

Nel metodo del Mascheroni, premesse alcune costruzioni, si risolvono col compasso i problemi fondamentali di costruire l'intersezione di due rette (individuate ognuna con due punti), le intersezioni di una retta con un circolo, le inserzioni di due circoli. Così è dimostrata la risolubilità di ogni problema elementare col solo compasso, poichè i dati di un problema possono sempre ridursi a cerchi e punti ed ogni costruzione ad un insieme di quelle tre fondamentali. Però l'analisi di particolari problemi può scoprire speciali artifizi che rendono le costruzioni più brevi e più eleganti di quelle che si avrebbero seguendo sistematicamente il metodo generale; e ciò sia detto tanto del metodo di Mascheroni, quanto del metodo di Adler. A persuadersene valgano i molti esempi opportunamente scelti e riportati nell'articolo.

Nell'articolo 9.° il Sig. Giacomini si propone di vedere qual grado di potenza possiede da solo ciascuno degli istrumenti; riga, riga a due orli paralleli, squadra (o falsa squadra) nella risoluzione dei problemi elementari, recandovi anche il contributo della geometria proiettiva.

Mostra la capacità della riga a risolvere tutti i problemi grafici di 1.° grado, se usata da sola, i problemi grafici e metrici di 1.° grado se associata all'assoluto del piano, tutti i problemi di 1.° e 2.° grado se unita all'uso di un cerchio fisso dato col centro. Per la riga a due orli paralleli mostra che usata in un primo modo risolve tutti i problemi di 1.° grado e quella classe di problemi di 2.° grado che corrisponde all'uso del trasportatore di segmenti; in un secondo modo può sostituire il compasso. Similmente la squadra usata in due modi diversi può con l'uno risolvere i problemi di 1.° grado, con l'altro tutti i problemi elementari.

La distinzione or veduta di problemi di 1.° e di 2.° grado si riattacca a ricerche per via analitica, la cui esposizione è oggetto dell'art. 10.°, del prof. Castelnuovo. Egli pone due stadì nell'esame dei problemi geometrici rispetto alla loro risolubilità con un dato strumento. Il primo, di pertinenza della geometria analitica consiste nel ricercare quale operazione analitica corrisponda all'uso dello strumento fissato; il secondo, spettante, secondo i casi, all'algebra o all'analisi, consiste nel vedere se ciascuna delle equazioni a cui dà luogo un dato problema trattato per via analitica, possa risolversi applicando una o più volte quella operazione analitica. L'A. mostra quali operazioni si possano eseguire con la sola riga prima sui segmenti di una retta e poi, più in generale, sui punti di un piano; partendo da considerazioni di natura metrica giunge mediante proiezione ad un risultato di carattere proiettivo, che, introdotto il concetto di campo di razionalità, può per quanto riguarda il piano riassumersi così: « Siano dati in un piano quattro o più punti in numero finito tra cui supponiamo si trovino sempre quattro punti che siano vertici di un quadrangolo; presi questi ultimi come punti fondamentali di un sistema di coordinate proiettive e dette a, b, c,.... le coordinate dei punti rimanenti (se esistono), è possibile costruire con la sola riga ogni altro punto le cui coordinate appartengano al campo di razionalità $[1, a, b, c, ...]$; e viceversa ogni punto raggiungibile mediante una costruzione determinata da eseguirsi con la sola riga, ha coordinate appartenenti al detto campo ». Di qui si trae una dimostrazione esatta del fatto che i problemi risolubili con la sola riga sono quelli di 1.° grado ed essi soli. Anzi va posta qualche riserva per quelli fra i detti problemi i quali contengano nozioni metriche; a meno che sia anche dato l'assoluto del piano (p. es. con un quadrato). L'introduzione del compasso rende possibile la costruzione della radice quadrata di un segmento e quindi la risoluzione anche dei problemi di 2.° grado e inoltre dei problemi di grado superiore la cui risoluzione si può far dipendere da quella di una successione di problemi di grado $\leqq 2$. Invece pel trasportatore di segmenti, riducibile alla forma semplicissima di trasportatore di un segmento di lunghezza fissa, l'A. dimostra che l' operazione più generale che esso permette è quella della forma $\sqrt{1+m^2}$; e ne deduce il notevole risultato dell'Hilbert che « ogni problema risolubile con la riga e col compasso può anche risolversi sostituendo all' ultimo strumento il trasportatore di segmenti, purchè tutte le soluzioni algebriche del problema siano reali, e ciò anche quando ai dati si lasci la maggior libertà di cui sono suscettibili ». Col trasportatore di segmenti non è possibile in generale l'operazione $\sqrt{1-k^2}$; l'A. dimostra che se un certo strumento è capace di eseguire una tale operazione, esso può sostituire interamente il compasso. Un così fatto istrumento lo abbiamo appunto nell' uso del cerchio fisso o nella riga a due orli paralleli (usata nel secondo modo), o nella squadra.

Nell' art. 11.°: « Sulle equazioni risolubili per radicali quadratici e sulla costruibilità dei poligoni regolari » il Prof. Enriques riconduce la quistione di decidere se un dato problema sia risolubile elementarmente alle due seguenti: 1.°) decidere se il problema sia algebrico ossia possa farsi dipendere da un' equazione algebrica a coefficienti razionali nel campo dato; 2.°) decidere se una data equazione algebrica sia risolubile con operazioni razionali ed estrazioni di radici quadratiche in un dato campo a cui appartengano i coefficienti dell' equazione. Della prima quistione si avrà occasione di far parola a proposito dell' articolo 14.° ed ultimo. L'A. si rivolge alla seconda, prefiggendosi di ottenere un risultato che basti alle applicazioni della geometria elementare. Perciò dimostra il teorema generale: « se un' equazione irriducibile è risolubile con soli radicali quadratici, il suo grado è una potenza di 2 ». Condizione necessaria ma non sufficiente. Mediante questi risultati riconduce il problema della costruzione degli n-goni regolari all' altro di risolvere, quand' è possibile, per radicali quadratici l' equazione binomia $z^n = 1$. E tale quistione vien trattata esponendo con chiarezza la teoria di Gauss fino a stabilire la nota condizione affinchè un n-gono, per n composto, si possa costruire elementarmente.

Fra gli n-goni regolari costruibili elementarmente viene studiato il caso del 17-gono nell' art. 12.°, del Sig. Daniele, autore dell' art. 8.° già veduto. Egli risolve l' equazione binomia $z^{17} = 1$; indi, fornite alcune notizie storiche relative al problema di cui si tratta, espone di questo tre soluzioni: la prima avente carattere euclideo, dovuta a J. A. Serret e modificata poi dal Bachmann; la seconda eseguita con la riga ed un cerchio fisso è quella di Standt; la terza, recente, dovuta al Géràrd, viene eseguita col compasso secondo il metodo del Mascheroni.

Nell' art. 13.° il Sìg. A. Conti si volge a due noti problemi di indole più elevata nel senso che escono dal campo di risolubilità coi mezzi elementari: e cioè ai problemi della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo. Del primo espone l'origine favolosa e la riduzione fatta da Ippocrate alla ricerca di due segmenti che con altri due dati formino tre rapporti in proporzione continua. Poi dimostra l'impossibilità di risolvere elementarmente quei due problemi facendo vedere che essi dipendono da equazioni del 3.° grado irriducibili. Passa pel primo problema ad indicare parecchie costruzioni: quella di Menecmo mediante coniche, di Diocle con la Cissoide, di Nicomede con la concoide (la quale serve anche per la trisezione dell'angolo), quella meccanica di Platone, e da ultimo i metodi approssimati di Apollonio, Vargiù, Buonafalce, Boccali. Per la trisezione dell'angolo fa conoscere i metodi di risoluzione con le coniche, la lumaca di Pascal, ecc.; poi metodi meccanici, avendosi all'uopo istrumenti trisettori; e infine i metodi approssimativi di Cominotto e Pompeo Monti. In un ultimo paragrafo si dimostra la risolubilità di tutti i problemi del 3.° grado (o riducibili al 3.° grado) col mezzo di una parabola completamente tracciata; di più la loro riducibilità al problema della trisezione dell'angolo, ossia la risolubilità di ogni problema del 3.° grado mediante la riga, il compasso ed un trisettore degli angoli.

Nell'art. 14.° ed ultimo, il Sig. B. Calò si occupa dei problemi trascendenti e in particolare della quadratura del cerchio, volgendosi alle quistioni tendenti a decidere dell'algebricità o della trascendenza di un problema dato. Movendo dal considerare il problema della quadratura del cerchio lo riduce a quello di rettificare la circonferenza e quindi alla costruzione del segmento di lunghezza π, preso il diametro come unità. Poi, generalizzando, considera il problema della rettificazione dell'arco e ne dimostra la trascendenza. Però per questo e in generale per tutti i problemi trascendenti l'A. nota che se essi conservano tale natura fino a tanto che si considerino i dati come *variabili* è però lecito domandare se, fissato il loro valore in modo particolare, il problema non possa divenire algebrico e magari elementare. Ciò induce a ricercare se esistano numeri trascendenti. Stabilita col Liouville tale esistenza, l'A. passa a dimostrare, seguendo Weierstrass, il noto teorema generale di Lindemann, da cui si trae come corollario la trascendenza di e e π. Quindi espone la risoluzione grafica del problema della quadratura del cerchio e della rettificazlone della circonferenza mediante l'*integrafo*, del quale fa una chiara descrizione. Seguono costruzioni approssimate e notizie storiche sulle ricerche relative alla quadratura del cerchio a correre dai tempi antichi fino ad oggi.

E con questo si chiude il libro. Esso soddisfa allo scopo e quindi è destinato ad avere la miglior accoglienza presso gli insegnanti di matematica. E sarà anche da augurarci che a qualcuno venga in mente di trasportare in un altro campo (ad es. nel campo algebrico ed in quello dei numeri) l' idea che ha dato origine al presente libro.

CARLO PAGLIANO.

M. SIMON. *Analytische Geometrie der Ebene.* Mit 96 Fig. Leipzig G. J. Göschen'sche Verlagshandlung 1900. 8.°, p. VII + 372 [Prezzo del Vol. leg. Mk. 6].

La Casa Goeschen di Lipsia, dopo di avere fondata una collezione di piccoli manuali scientifici del formato che hanno i nostri *Manuali Hoepli* (cfr. *Bollettino,* Anno I, p. 18 e Anno II, p. 101), ha ora intrapresa la pubblicazione di un' altra raccolta congenere, ma costituita di volumi di dimensioni maggiori e relativi esclusivamente alle scienze esatte, raccolta che, dal nome dell' eminente matematico che venne delegato a dirigerla, porta il nome di « Sammlung Schubert ». L' VIII vol. di essa è appunto occupato dall' opera a cui è destinato questo cenno.

La geometria analitica è un soggetto già più di una volta trattato dal Simon; gli è ciò che ben sanno i nostri fedeli lettori, i quali ricorderanno di avere noi non a guari annunziato un manuale di tal materia dovuto all' egregio Professore del Liceo di Strasburgo (v. *Bolettino,* Anno I, p. 185). Ora nel redigere la nuova trattazione di quel tema l' A. si è attenuto ai criterì fondamentali da lui scelti in passato, e in particolar modo al principio di procedere coll' aiuto dei mezzi più semplici possibili. Ma il maggiore spazio di cui disponeva gli concesse di allargare considerevolmente il campo da percorrere e fare conoscere le più cospicue proprietà di un gran numero di curve speciali notevoli.

La quantità e distribuzione della materia trattata sono indicate dal seguente indice dei capitoli:

I. Coordinate. Il punto. II. Determinazione del punto nel piano. III. La retta. IV. Il circolo. V. Equazione omogenea di secondo grado a tre variabili. VI. Le coniche come forme proiettive. VII. Il fascio e la schiera di coniche. VIII. Le coniche propriamente dette trattate separatamente. IX. Curve di ordine superiore. X. La cissoide di Diocle. XI. La cardiode. XII. Astroidi. XIII. L' ipocicloide tricuspide. XIV. Le curve di Cassini. XV. La spirale d' Archimede. XVI. La cicloide.

Quello che non risulta da questo schema è la straordinaria abilità spiegata dall' autore nel far entrare in un numero assai limitato di pagine tanta somma di sapere geometrico. Sicchè il lettore rimane compreso di ammirazione per un metodo che, al pari di quello delle coordinate, conduce con tanta eleganza e facilità a scoprire le doti più ascose di figure complicate. Se però lo studioso novellino ne traesse la conclusione che la geometria analitica è uno strumento meccanico che chiunque è in grado di maneggiare, s'ingannerebbe a partito; lo strumento è ottimo, ma per condurre alle verità più riposte deve venire adoperato da una mano provetta quale è quella del Sig. Simon, mano così forte da riuscire in molte occasioni ad abbattere le barriere che separano l'analisi delle quantità finite dal calcolo infinitesimale, da giungere così a risolvere delle difficili questioni di rettificazione e quadratura di cui l'analisi infinitesimale esigeva sinora il monopolio.

G. L.

H. LAURENT. — *L'élimination.* 8.º p. 75. Paris, Carré et Naud, 1900. (Prezzo del vol. legato fr. 2).

È il settimo volumetto della serie fisico-matematica della collezione intitolata *Scientia,* gli intenti della quale sono dichiarati dagli editori con le seguenti parole:

« Accanto alle riviste periodiche speciali registranti giorno per giorno i progressi della Scienza, ci è sembrato che vi fosse un posto per una nuova forma di pubblicazione, destinata a mettere in evidenza, mediante una esposizione filosofica e documentata le scoperte recenti, le idee generali direttrici e le variazioni nell'evoluzione scientifica.

« Al giorno d'oggi, non è più possibile allo scienziato di specializzarsi; a lui è necessario di conoscere l'estensione gradatamente crescente dei campi vicini; matematici e fisici, chimici e biologi hanno interessi sempre più stretti.

« È per corrispondere a questa necessità che, in una serie di monografie, noi ci proponiamo di presentare mature le questioni speciali, sforzandoci di mostrare la parte presente e futura di questa o quella conquista, l'equilibrio che essa distrugge o stabilisce, la deviazione che imprime, gli orizzonti che apre, la somma di progresso che rappresenta.

« Ma importa trattare le questioni non in modo dogmatico, quasi sempre falsato da una classificazione arbitraria, ma nella forma viva della ragione che discute gradatamente il problema, ne determina le incognite prima e dopo la soluzione. Così, indicando sempre le vie multiple suggerite da un fatto, scrutando le possibilità logiche che ne derivano, noi ci sforzeremo di trattenerci nel quadro del metodo sperimentale e del metodo critico ».

A questo bel programma è fedelmente informato lo scritto del Laurent? Non crediamo di poter rispondere affermativamente a questa domanda; chè una monografia sull'eliminazione ove non è tenuto alcun conto dei lavori di Kronecker e discepoli, ma è rispecchiato lo stato della scienza qual era all'epoca in cui il Serret dettava il suo

Cours d'algèbre supérieure, non può considerarsi come una esposizione di dottrine recenti e di idee direttrici: tutt'al più può considerarsi come un complemento agli ordinarî trattati d'algebra, i quali per lo più dànno scarse informazioni sulle importanti questioni connesse alla teoria dell'eliminazione.

G. L.

PROF. FRANZ MEYER. *Rapporto sui progressi della Teoria projettiva degli Invarianti nell'ultimo quarto di secolo. Traduzione dal Tedesco di* GIULIO VIVANTI *con aggiunte e modificazioni dell'autore.* Napoli, B. Pellerano, 1900, 4.°, pag. 240 [Prezzo L. 8].

I lavori di straordinaria importanza fatti da D. Hilbert sopra la teoria delle forme algebriche vennero giudicati dalla generalità dei matematici come preludenti ad un'èra nuova per la disciplina di cui Sylvester e Cayleya in Inghilterra, Arouthold e Clebsch in Germania, Hermite in Francia ed in Italia Brioschi avevano forniti gli elementi più essenziali. Parve pertanto giunto allora l'istante di redigere un esatto bilancio di quanto finora si sapeva: a ciò provvide la « Deutsche Mathematiker-Vereinigung » incaricando il Prof. Franz Meyer — di notoria competenza in materia — ad assumere siffatto lavoro. E quando questo venne riferito nel I Vol. (1890-91) del *Jahresbericht* di quel sodalizio tutti riconobbero che le speranze non erano state frustrate nè le aspettative deluse. Un riassunto di esso venne fatto da H. Fehr pel *Bulletin des Sciences mathématiques* e poi pubblicato (1897) in un volume a parte; mentre una traduzione italiana completa con numerose ed importanti aggiunte da parte dell'autore veniva un po' per volta pubblicata nei fasc. XXXII-XXXVII del *Giornale di Matematiche.* È sul volume costituito da questa traduzione che fissiamo l'attenzione dei nostri lettori; lo annunciamo semplicemente credendoci esonerati dall'aggiungere qualche nostro encomio ai molti che essa già riscosse nell'originale e nella versione francese. Soltanto vogliamo avvertire che nella traduzione italiana, un accurato *Indice alfabetico dei nomi d'autori* coscienziosamente redatto dall'Egregio Traduttore colma una lacuna che l'Autore aveva avvertita nel suo lavoro e trasforma questa in una preziosa opera di consultazione.

G. L.

A. J. PRESSLAND *and* C. TWEEDIE. *Elementary Trigonometry*, 8.°, Edinburgh, Oliverand Boyd, 1900 [Prezzo 3 sh. 6 d.].

J. Riddel. *Pratical Plane and Solid Geometry.* With numerous Enereisses and Examination Questions, 8.°, p. V + 321 [Prezzo 2 sh.] (1).

PROGRAMMI E RIASSUNTI DI CORSI UNIVERSITARII.

UNIVERSITÀ DI PISA.

CORSO DI FISICA MATEMATICA

svolto nell' anno accademico 1899-1900.

PRINCIPII GENERALI ILLUSTRATI DALLE APPLICAZIONI.

I.

Rudimenti del calcolo delle variazioni — Concetto della variazione — Principio del metodo delle variazioni — Problema della Brachistocrona — Problema Isoperimetrico.

Interprétazione mediante il concetto della variazione degli elementi ausiliarii che figurano nell' equazione di d' Alembert e Lagrange, e annesse condizioni, per un sistema di corpi rigidi comunque vincolati. — Distinti casi del sistema olonomo e anolonomo.

Teorema di Hamilton o della azione stazionaria — Deduzione delle equazioni del movimento — Equazioni in coordinate libere pel sistema olonomo (2.ª forma delle equazioni del movimento di Lagrange) — Equazioni generali.

Teorema di Maupertuis o della minima azione — Deduzione delle equazioni del movimento da questo teorema nelle relative ipotesi — Definizione di trajettoria direttissima e di trajettoria geodetica di un sistema — Coincidenza di queste traiettorie nel sistema olonomo e distinzione nel sistema anolonomo — Esposizione sommaria dei principii della Meccanica di Hertz e riflessioni critiche.

Equazioni differenziali delle geodetiche di una superficie — Equazioni differenziali più generali del movimento di un solido.

Estensibilità delle equazioni del movimento di Lagrange a diverse specie di movimenti e varii ordini di fenomeni.

Forma canonica delle equazioni del movimento.

Equazioni alle derivate parziali di Hamilton — Teorema di Jacobi — Funzione caratteristica — Esempii di determinazione diretta della funzione caratteristica.

(1) La seconda parte di quest' opera contiene gli elementi della Geometria descrittiva.

Parentesi di Poisson — Teorema di Poisson — Applicazioni. Ultimo moltiplicatore di Jacobi.

II.

Integrali estesi ad una figura piana o solida, e loro riduzione ad integrali doppii e tripli — Integrale esteso ad una linea e ad una superficie curva — Teorema di Gauss — Integrale di un binomio e di un trinomio differenziale esteso ad un cammino — Teorema di Riemann — Teorema di Stokes.

Principii della teoria della varia connessione delle figure — Funzione di un vettore (cioè definita dall'integrale esteso ad un cammino

$$\Phi = \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

con

$$\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} = 0)$$

continua e discontinua in una figura semplicemente connessa, propria ed impropria (dedotta per mezzo di diaframmi da una figura molteplicemente connessa). — Concetto della plurivalenza e della polidromia di una funzione — Funzione di un vettore monodroma e polidroma in una figura semplicemente e molteplicemente connessa.

Integrale limite relativo ad una figura superficiale o solida e ad un punto di essa.

III.

Funzione delle forze 1) dell' attrazione neutoniana di un corpo sopra un punto esterno, 2) dell' azione di una distribuzione corporea o superficiale d' elettricità in equilibrio, 3) dell' azione di una distribuzione corporea o superficiale di polarità magnetica, 4) dell' azione di una corrente elettrica ordinaria (lineare) sopra un polo magnetico. — Teorema di Ampère sull' equivalenza di una corrente elettrica ordinaria e di una lamina magnetica.

Definizione della funzione potenziale di un agente sopra un punto. — Distinzione delle varie specie principali.

Proprietà comuni delle varie specie di funzione potenziale all' esterno dell' agente.

Proprietà della funzione potenziale di un corpo, di uno strato e di un doppio strato nella immediata prossimità e nella estensione dell' agente.

Teorema di Dirichlet relativo alla univocità della funzione potenziale, e proposizioni connesse. Espressione di Thomson dell' energia potenziale di un sistema gravifico ed elettrostatico.

IV.

Illustrazione della precedente teoria colla sua applicazione ai principii dell'elettrostatica — Postulato fondamentale relativo all'equilibrio della elettricità in un conduttore — Impossibilità della distribuzione corporea dell'elettricità in equilibrio in un conduttore — Risoluzione dei problemi della distribuzione dell'elettricità in equilibrio in un conduttore isolato in campo neutro, oppure, in presenza di coibenti dati, in comunicazione col suolo o isolato.

Illustrazione della precedente teoria colla sua applicazione ai principii della teoria dei flussi. — Nozione fondamentale di flusso e relativi postulati — 1) Flusso di materia — 2) Flusso elettrico — Principii della teoria della corrente elettrica stazionaria in un conduttore corporeo; deduzione della legge di Ohm — 3) Flusso termico — Principii della teoria della propagazione del calore, e dell'equilibrio di temperatura.

V.

Funzione potenziale armonica — Teorema di Green — Funzione di Green.

Determinazione della funzione di Green in un campo sferico, e sua applicazione alla risoluzione del problema di Dirichlet in questo campo. Completa risoluzione del problema della distribuzione dell'elettricità in equilibrio sopra un conduttore sferico in presenza di coibenti dati.

Generalità sulle funzioni armoniche e relativo problema di Dirichlet o d'esistenza — Teorema di Gauss o del valore medio — Principio del metodo di Neumann per la risoluzione del problema di Dirichlet.

VI.

Famiglia di superficie isoterme e equipotenziali.

Coordinate curvilinee — Espressione del differenziale della lunghezza di un arco di linea e del coseno dell'angolo delle tangenti a due linee in un punto d'intersezione — Espressione dei parametri differenziali.

Coordinate ellittiche — Applicazione all'integrazione delle equazioni differenziali della geodetica dell'ellissoide — Applicazione alla ricerca di soluzioni semplici dell'equazione $\Delta_2 V = 0$, e alla risoluzione del problema della distribuzione dell'elettricità in equilibrio sopra un conduttore ellissoidico isolato in campo neutro.

Coordinate trisferiche — Trasformazione per raggi vettori reciproci. Metodo delle immagini di Thomson — Applicazione al problema della distribuzione dell'elettricità in equilibrio sopra un conduttore sferico in comunicazione col suolo, in presenza di coibenti dati.

Nozioni sull'applicazione delle coordinate curvilinee alla determinazione di una funzione armonica in una figura, con date condizioni al contorno, e sulla risoluzione di questo problema per sviluppo in serie. — Applicazione al problema d'esistenza in un campo sferico. Definizione delle funzioni sferiche.

VII.

Moltiplicatore discontinuo di Dirichlet e sua applicazione al calcolo degli integrali multipli.

Funzione potenziale dell'ellissoide omogeneo.

Attrazione dell'ellissoide omogeneo sopra un punto esterno, e di una crosta ellissoidica a contorni omofocali sopra un punto esterno non compreso nel cavo. — Proprietà dell'omofocaloide (limite di detta crosta collo svanire della sua grossezza).

Attrazione dell'ellissoide omogeneo sopra un punto interno, e di una crosta ellissoidica a contorni omotetici sopra un punto compreso nel cavo. — Proprietà dell'omoteticoide (limite di detta crosta collo svanire della sua grossezza).

VIII.

Figure di equilibrio relativo di un liquido rotante uniformemente, soggetto alla mutua gravitazione neutoniana delle sue parti.

Condizioni del problema generale — Risoluzione del problema nell'ipotesi della figura ellissoidica — Ellissoide di Mac Laurin e di Jacobi — Applicazione alla figura del globo terrestre.

IX.

Proprietà generali del movimento di un liquido il cui contorno è una superficie isobarica.

Teoria del movimento omografico di un ellissoide liquido, soggetto alla mutua gravitazione neutoniana delle sue parti. — Formazione delle equazioni differenziali del movimento col metodo di Dirichlet, e relativa dimostrazione della sua possibilità. — Possibilità e circostanze 1) del movimento rigido, 2) del movimento puramente intestino, 3) del movimento simmetrico intorno ad un asse.

X.

Teoria del movimento del sistema rappresentato da un liquido, che riempie la cavità di un solido e contiene alcuni solidi immersi, in unione coi solidi medesimi, nell' ipotesi che la velocità angolare in ogni punto del liquido sia nulla, e siano date le forze applicate al liquido e ai solidi. — Formazione delle equazioni differenziali del movimento col metodo di Kirchhoff e col metodo di Neumann.

Movimento di un liquido infinito, in cui sta immerso un ellissoide, o una sfera, immobile.

Mutua connessione, nel movimento dei liquidi, fra la velocità in ogni punto e la velocità angolare. — Analogie tra l' Idrodinamica e l'Elettrodinamica.

GIAN ANTONIO MAGGI.

NOTIZIE

KEPLER E NEWTON COME GEOMETRI. — Il Vol. XVIII della *Transactions of the Cambridge philosophical Society* — pubblicato in occasione del giubileo di Sir G. G. Stokes — contiene una nota di C. Taylor sopra *The Geometry of Kepler and Newton* che merita l'attenzione degli storici della matematica, come uno scritto che completa e precisa alcuni dati forniti nel 1881 dall' autore nel suo noto lavoro *The ancient and Modem Theory of Conies.* Sono da essa posti in perfetta luce le idee di Kepler e Newton sopra l' « infinitamente grande » in geometria, e sulle ragioni dell' introduzione metodica dei « fuochi delle coniche »; l' autore rileva anche nelle opere di quei sommi rudimentali cenni sopra la legge di continuità e l' immaginaria in geometria. Avendo egli riprodotti tutti i passi su cui egli fonda le sue osservazioni di modo al lettore di controllare ed eventualmente discuterne le conclusioni.

*
* *

PER FAVORIRE LE RICERCHE SUL CALCOLO GEOMETRICO. — Dal resoconto pubblicato nel mese di Marzo di quest' anno dall' ufficio di presidenza dell' « International Association for Promoting the Study of Queternions and allied Systems of Mathematics » (v. *Bollettino*, T. II, 1899, p. 111) risulta che il numero dei suoi soci ammonta attualmente a *sessantotto.*

*
* *

UN VOCABOLARIO MATEMATICO FRANCESE-TEDESCO E TEDESCO-FRANCESE sta per essere pubblicato dalla Casa B. G. Teubner in occasione del prossimo Congresso matematico, al quale appunto esso è dedicato. Ne è autore un dotto ben conosciuto nel mondo scientifico, Felix Müller. Quali ne siano il piano e gl' intendimenti emerge dal seguente brano della prefazione che riferiamo perchè dà notizia delle più cospicue imprese di bibliografia matematica, attualmente in corso di esecuzione:

« Un giorno, il grande matematico J. J. Sylvester, constatando superbamente di avere dato il nome ad un gran numero di enti algebrici chiamò se stesso l'*Adamo matematico* (Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, T. XX, 1891, p. 169), per indicare l'analogia col nostro primo progenitore che diede un nome a ciascuna delle specie esistenti sopra la terra. L'esempio di Sylvester venne seguito da altri matematici, coll'escogitare nuovi nomi per grandezze, figure, concetti, operazioni, esempi, problemi di tutti i campi della matematica pura ed applicata. Benchè alcuni di siffatti termini tecnici non abbiano avuta che una esistenza effimera, pure la nomenclatura matematica in questi ultimi decennì si è in tal modo allargata ed arricchita, che si ripensa al geniale Discorso di H. Hankel (*Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten*, Tübingen 1869, p. 34) ove l'imponente edificio della nostra scienza è assomigliato alla Torre di Babele. Che non fosse totalmente ingiustificato il timore che i collaboratori alla nostra scienza finissero per non più intendersi fra loro è dimostrato da uno sguardo all'insieme dei termini tecnici della matematica. Una tale raccolta è offerta dal presente *Vocabolario matematico in Francese e Tedesco.* Ciascuna delle due parti (quella Francese-Tedesca e quella Tedesca-Francese) contiene un indice alfabetico di più di diecimila termini tecnici appartenenti alla Matematica pura ed applicata; sono annessi, oltre quanto è necessario per determinare ciascun concetto, l'indicazione della disciplina a cui esso si riferisce e brevi notizie storiche sopra le origini del concetto medesimo.

Siccome la natura di questo Vocabolario emerge dalla sua *genesi*, dalla sua *disposizione* e dai suoi *scopi*, così mi sia lecito spendere qualche parola attorno a questi tre punti.

Questo libro è il frutto della mia lunga collaborazione al *Jahrbuch über die Forstchritte der Mathematik.* Nel fondare questo periodico, specialmente quando si trattò della distribuzione sistematica del materiale, noi avvertimmo la mancanza di un dizionario matematico corrispondente ai più recenti progressi della nostra scienza. Per contribuire a colmare siffatta lacuna io raccolsi tutti i termini tecnici matematici, fisici ed astronomici che incontravo nella ricca letteratura posta a mia disposizione per la redazione, li disposi in ordine alfabetico, aggiunsi l'indicazione della sezione relativa a ciascuno nel nostro schema sistematico della matematica, assieme alle fonti o al passo relativo del nostro *Jahrbuch* e ad altre notizie bibliografiche e anche storiche. Il numero delle schede alfabeticamente ordinate su cui erano segnati questi termini tecnici ascendeva circa a 5500 quando io, nel 1891, riferii alla Riunione dei Naturalisti di Halle intorno al materiale già raccolto per poi fare la proposta di compilare un nuovo vocabolario matematico; presentemente quel numero supera *diecimila.* Ai termini tedeschi ho aggiunti i corrispondenti francesi, inglesi e italiani, quando li trovai nella letteratura straniera. Inoltre, nel corso dei miei studi storici sopra la terminologia dei Greci e dei Romani, ebbi occasione di arricchire questo tesoro di vocaboli colla nomenclatura greca e latina. Ora è a questa collezione, la quale doveva in origine dare materia ad un dizionario matematico, che io attinsi il presente vocabolario in due lingue.

Per quanto concerne la *disposizione*, il mio libro si differenzia dai consueti vocabolarî, per questo che non contiene soltanto i vocaboli con la loro traduzione, ma anche termini tecnici composti, cioè completi concetti matematici, assieme alla corrispondente espressione straniera. Accanto al termine tecnico sono posti in parentesi i caratteri determinatori del concetto. Inoltre, coll' indicazione delle discipline a cui appartengono i singoli termini tecnici è offerto al lettore un mezzo per orientarsi almeno superficialmente sopra i concetti che gli riescono nuovi: dalle annesse notizie egli apprende che nei compendii o trattati relativi alla disciplina indicata egli può attingere ulteriori notizie sul concetto in questione. Finalmente io ho aggiunte brevi notizie storiche sopra l' origine dei termini tecnici, sia riguardo al primo creatore di quel concetto, sia su chi lo ampliò o stabilì nuovamente, sia sull' epoca in cui apparve. Spero con questi dati storici, benchè brevi, di avere elevato il valore della mia opera, come libro di consultazione. Nella prima parte al testo francese, il quale — come emerge da quanto precede — contiene assai più dei semplici termini tecnici, segue la semplice traduzione, nella seconda invece al testo tedesco segue la traduzione francese.

La ricchezza della nomenclatura matematica può misurarsi facilmente anche dalla sola prima parte, perchè in francese di regola precede il nome, e segue l' aggettivo. Così ad es. si trova 119 termini che cominciano con *angle*, 89 con *axe*, 130 con *cercle*, 97 con *coordonées*, 363 con *courbe*, 189 con *équation*, 220 con *fonction*, 190 con *ligne*, 156 con *nombre*, 220 con *point*, 242 con *surface*, 153 con *système*, 140 con *théorème* ecc.

Che i matematici tedeschi adoperino molte parole straniere si spiega considerando lo sviluppo storico della nostra scienza. Recentemente molti traduttori più o meno competenti si sono sforzati di sostituire le parole forestiere con vocaboli tedeschi, sinora però con successo assai dubbio. Siffatti tentativi possono essere giustificati per la matematica delle scuole popolari; ma per la nomenclatura scientifica sono, non soltanto superflui, ma, anzi, piuttosto dannosi. Perciò io ho riferite, accanto alle parole straniere più in uso, soltanto quei nuovi vocaboli che vennero adottati in iscritti matematici tedeschi.

Per quanto concerne lo *scopo* del mio vocabolario, esso è destinato in prima linea a servire di indispensabile complemento agli ordinarî dizionarì francesi-tedeschi e tedeschi-francesi. La maggior parte dei termini tecnici francesi venne adunato esclusivamente mediante lo studio di opere e memorie matematiche, perchè nei più noti vocabolarì stranieri non si trova nemmeno la decima parte dei termini qui segnati. Nei vocabolarì tecnici in più lingue o dizionarì se ne trova un numero più grande concernenti la matematica *applicata;* ma per la matematica *pura* non possono naturalmente essere di alcun sussidio. A tale deficienza che procurava grandi difficoltà allo studio indispensabile dei lavori originali stranieri e ai traduttori di opere matematiche dalla francese in tedesco e viceversa, è ora, almeno così spero, posto rimedio.

Se anche solo da ciò resta giustificata la pubblicazione di questo vocabolario, pure io posso aggiungere qualche cosa altra sullo scopo e l'utile eventuale di questo libro. Io ho dedicato la prima parte di esso al Congresso dei matematici che verrà tenuto a Parigi nell'Agosto del corrente anno 1900. Questo Congresso ha posto nel suo programma, come già aveva fatto quello di Zurigo del 1897, una discussione intorno alla *nomenclatura matematica.* Ciò prova che venne riconosciuta la necessità di rivedere la nomenclatura in base a determinati principì per eventualmente semplificarla e completarla. Ora, per tali decisioni questo libro offre un ricco materiale.

Ancora ad un'altra impresa matematica internazionale di natura bibliografica io spero di arrecare qualche servizio con questa compilazione. A partire dal 1900 un Comitato scelto dalla Società Reale di Londra deve curare la pubblicazione di un Catalogo perenne della letteratura scientifica nel campo della matematica e delle scienze naturali (B. Schwalbe, *Die internationale Katalog-Konferenz*, in *Naturwiss. Rundschau*, T. XI, 1896, p. 162). Questo catalogo deve essere ordinato tanto per autori quanto per materia. Non è stato ancora deciso se quest'ultimo ordinamento debba essere fatto in base ai criterì scientifici oppure se deve venire preferito un ordinamento alfabetico mediante *vocaboli principali*, o se finalmente verranno adoperati entrambi i sistemi; spero in altra occasione dimostrare che l'ordinamento in base a *vocaboli principali* è il più utile per le matematiche ed è facile ad ottenersi mediante il presente vocabolario. Il mio dizionario può inoltre servire a coloro che intendono presentare un dettagliato indice per materie di qualche giornale matematico, perchè qui si trovano già adunati i *vocaboli principali* ordinati alfabeticamente. Quando fu pubblicato il centesimo volume del *Giornale di Crelle* era stato progettato un siffatto indice per materie di questo periodico, ma non venne poi eseguito. Eguale sorte toccò al lavoro preparatorio per un indice generale del nostro *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.* Che siffatti indici per materie riuscirebbero di somma utilità a tutti gli studiosi delle matematiche, nessuno può negare.

Finalmente — e io ritorno così alla proposta da me fatta a Halle — questa raccolta dei termini tecnici della matematica potrà venire utilizzata nella compilazione di un dizionario matematico completo ordinato alfabeticamente, il quale sia in grado di orientare facilmente il lettore sopra qualsia concetto essenziale della matematica pura ed applicata mediante definizioni, citazione delle fonti ed altri dati letterarì o storici. Secondo il mio modo di vedere, un siffatto dizionario non dovrebbe essere giudicato superfluo anche accanto ad una grande Enciclopedia rappresentante lo stato attuale della scienza, quale è quella incominciata dalla Società matematica tedesca ed attualmente in corso di pubblicazione. Quantunque un dizionario matematico possieda in grado assai minore il carattere didattico di un' enciclopedia, tuttavia un semplice cenno è spesso sufficiente al matematico, provetto per orientarsi sopra qualunque questione in cui s' imbatte. Riguardo alla nomenclatura l' enciclopedia non può, nè pretende di essere completa, nemmeno approssimativamente, onde, malgrado il progettato diffuso indice per materie, non potrà servire in tutti i casi a chi la consulta per avere la spiegazione di certi termini tecnici.

Che le mie idee intorno all' indispensabilità di un dizionario matematico abbiano l' approvazione di matematici francesi, viene attestato dal resoconto del Congresso dell' « Association française pour l'avancement des Sciences » tenuto a Caen nel 1894 (v. *Mathésis*, Aprile 1895). Ivi siscosse l' approvazione generale, non soltanto la proposta di P. Mansion di comporre dei vocabolarì matematici, cioè degli indici in più lingue di termini tecnici matematici, ma anche il piano di Jacques Boyer di redigere un dizionario matematico. Inoltre H. Brocard, come me, da molto tempo si occupa del lavoro preparatorio per un siffatto vocabolario. Alcuni mesi or sono egli ne fece pubblicare un estratto sotto il titolo di *Notes de bibliographie des courbes géométriques* (Bar-le-Duc, 1897). In una recensione di questo libro Paul Tannery rileva espressamente la grande utilità che avrebbe per la scienza un dizionario di tale specie (*Bulletin des Sciences math.*, 2.ª Serie, T. XXII, 1898, p. 165-167). Io spero che grazie al mio vocabolario in molti colleghi sorgerà il desiderio che parecchi matematici si uniscano per comporre e pubblicare presto un dizionario matematico. Possa allora il mio libro essere giudicato per un utile lavoro preparatorio!

Marco Bertolone, Direttore-Gerente.

Genova - Tipografia R. Istituto Sordo-muti - 189?.

OTTOBRE, NOVEMBRE E DICEMBRE 1900.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA

E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. 6, per l'estero Fr. 7.50. Numeri separati L. 2 caduno. — Gli articoli da inserirsi simandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

BIBLIOGRAFIA DELLA COCLEOIDE

DI E. WÖLFFING.

Molti matematici si sono occupati successivamente dellla curva avente la seguente equazione polare

$$r = a \frac{\text{sen } \theta}{\theta};$$

ma siccome queste ricerche sono sparse quà e là ed in parte assai poco note, così la seguente lista bibliografica ci sembra possa presentare qualche interesse. Il Mansion (Mathésis, T. V, 1885, p. 92) congettura che gli antichi abbiano conosciuta già la cocleoide, poichè Apollonio fa menzione della quadratura della « sorella della cocleoide » (quest'ultima curva si ritiene identica alla concoide di Nicomede; ma, come osserva P. Tannery [Bull. Darboux, II Serie, T. VI, 1883, p. 284], la sua relazione con la quadratrice è ignota). Ma invece è certo che la cocleoide ha almeno 200 anni, giacchè s'incontra in un lavoro anonimo (*Construction of a quadratrix of the circle*, Phil Trans. Roy. Society of London. T. 22, 1700, p. 445-46), l'autore della quale si vide poi essere il Perks (Phil. Trans., T. 25, 1705, p. 53). Si trova ivi la proposizione, caduta poi in completa dimenticanza, che il raggio vettore biseca l'angolo compreso fra la tangente e la congiungente del punto di contatto col vertice della curva.

Altri dati bibliografici sopra la cocleoide:

1781. Fontana G. — Disquisitiones physico-mathematicae. Disquis. 9. Problema 2, Pavia.

(Curva come luogo dei baricentri degli archi di un cerchio aventi l'origine comune).

1784. Fontana G. — Sopra l'equazione di una curva. Mem. Soc. Ital. 24, p. 125-133.

(Probabilmente anche:

1781. Fontana G. — Problemata de curvis a centro gravitatis descriptis. Atti di Siena 6, p. 144).

1813. — Ann. de Math. 3 p. 213. Problema: Luogo geometrico degli archi circolari eguali tangenti in un punto ad una retta (si trova già in Bossut, Calcul intégral, T. II, 1794, p. 77).

1813. Bérard, van Utenhoe, Tédénat e due anonimi. Ann. de Math. 3, p. 377-383.

Secondo Brocard (Notes de Bibliographie des courbes géométriques, p. xxv) la cocleoide si trova inoltre trattata in Cournot, Corréspondance entre l'Algèbre et la Géometrie. Paris, 1847, p. 310, e secondo Neuberg (Mathesis 5, p. 89), da Catalan, Manuel des candidats à l'école polytechnique, I, p. 331 (1857).

Inoltre:

1863. Azzarelli M. — Alcune proprietà di una curva trascendente Ann. di Mat. 5, p. 72-78.

1864. Egger. — Annali di Mat. 6, p. 21-24.

1867. Rankine M. — On the approximate drawing of circular arcs of given lengths. Repòrt Brit. Assoc. 37 (Meeting at Dundee), II, p. 5.

1868. Stoeckly. — Bedeutung und Eigenschaften der aus

$$r = \frac{a \sin \varphi}{\varphi}$$

entspringenden Curve. Archiv der Math. u. Phys. 48, p. 109-115.

1872. Otto C. H. — Ueber einige Eigenschaften der Schwerpunktkurve des Kreises. Diss. Jena, p. 5-22.

1872. Catalan E. — Théorème sur les antipodaires. Atti Nuov. Linc. 25, p. 349-350.
1873. Roever F. — Ueber Schwerpunktskurven Diss. Goettingen, p. 16-24.
1873. Collignon E. — Exemples de l'application de la statique à la géométrie. Ass. franç. 2 (Congrès de Lyon), p. 67-69. Siche auch: Traité de Mécanique, II, § 183. Paris, 1873.
1878. Cesàro E. — Quelques propriétés de la courbe représentée par

$$u = R\,\frac{\sin\omega}{\omega}$$

Nouv. Corr. Math. 4, p. 283-284.
1878. Oldenburg. — Ueber die Spiralen. Programm Oberstein-Idar p. 4-8.
1879. Fouret G. — Bull. Soc. Math. Fr., 7, p. 199-201 (1879).
1882. Nehls. — Ueber graphische Rektifikation von Kreisbögen. Hamburg.
1883. Jung. G. — Nuovi teoremi a complemento della regola di Guldin e proprietà della spirale

$$r = \frac{a\sin\vartheta}{\vartheta}$$

Atti Acc. Lincei. Transunti 7, p. 97-100.
1884. Benthem — De slakkenlyn of cochleoide. Nieuw Archief voor Wiskunde 10, p. 76-80.
1884. Hoeckntra — Wiskund. Opgaven Amsterdam 2, p. 247.
1884. Falkenburg C. — Die Cochleoide. Archiv der Math. und Physik 70, p. 259-267.
1885. Neuberg J. — Mathesis 5, p. 89-92. Ove si trovano alcuni dati bibliografici ed è osservato che le ricerche consegnate nella memoria precedente furono comunicati per lettera dal Neuberg al Falkenburg, il quale le pubblicò senza dichiararne la fonte.
1885. Mansion P. — Mathesis 5, p. 92 [Osservazione al lavoro precedente].
1882. Jung G. — Alcuni teoremi baricentrici. Rend. Ist. Lomb. 2 série 15, p. 499-506; 646.
1886. Pascal E. — Teoremi baricentrici. Rend. Acc. Napoli 25, p. 239-248; 259.
» Arnaudeau. — Étude sur π. Ass. Franç. 15 (Congrès de Nancy), I, p. 84.
1895. Cesàro C. — Lezioni di Geometria intrinseca. Napoli, p. 80.
1897. Brocard. — Notes des Bibliographie des courbes géométriques. Bar le Duc, p. 49-50, XXV.
1899. Brocard. — Notes de Bibliographie des courbes géométriques. (Partie complémentaire) Bar le Duc, p. 27.

RECENSIONI ED ANNUNZI

A. von Braunmühl. — *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. Erster Teil. Von den ältesten Zeiten bis zur Erfindung der Logarithmen.* Mit 62 Figuren im Text. Leipzig, Teubner, 1900, 8. gr. p. VII+260 [Prezzo Mk. 9].

Fra i cultori della storia della matematica si va ognor più diffondendo e rafforzando il convincimento che per chiarire i punti oscuri e sciogliere le questioni tuttora insolute il metodo migliore è di abbandonare il sistema delle storie generali per surrogarle con storie speciali di ogni singolo ramo. L'applicare siffatto procedimento è specialmente consigliabile quando si tratti di discipline che, giunte al loro stato di maturità, sembrano avere conseguito un assetto definitivo. In tale condizione si trova più di qualunque altra la trigonometria la quale, se subì in passato degli interni sconvolgimenti, da un secolo si trova in uno periodo così stazionario che perfino coloro che ne fecero delle esposizioni scolastiche si limitarono a ricopiare nelle loro linee generali gli antichi modelli. Ben inspirato fu dunque il Prof. A. von Braunmühl — il quale alla storia di questo importante ramo di matematiche dedicò già parecchi lavori altamente apprezzati dai competenti in materia, — a progettare ed eseguire un'opera consacrata a narrare come sorse e come si svolse la trigonometria, da chi e con quali intenti essa sia stata coltivata.

Questo importante ramo della matematica elementare è antico quanto è antico lo studio delle scienze esatte, che traccie di essa si trovano nel più vecchio documento autentico da noi posseduto, cioè nel Papiro Rhind; e, come gli Egiziani, se ne occuparono, con successo più o meno grande, e Caldei e Cinesi. Di siffatti preliminari alla costituzione di una vera scienza tratta l'A. nel I Cap. dell'opera di cui ci occupiamo, capitolo il quale si chiude colle descrizioni di materiali analoghi esistenti negli scritti di Aristarco ed Erone.

Questi però non sono gli unici che si trovano percorrendo con scrupolosa cura la letteratura matematica dei Greci, la quale offre un buon numero di teoremi che, guardati attentamente al lume della scienza moderna, si rivelano per equivalenti nella sostanza a proposizioni appartenenti alla nostra trigonometria. Ci sia lecito di indicare i più cospicui:

I. Le proposizioni 22 e 23 dell'opuscolo di Archimede *Su la sfera ed il cilindro* insegnano a trovare la somma dei seni di un certo numero di archi in progressione geometrica, (v. la mia opera sopra *Le scienze esatte nell' antica Grecia, Lib. II. n. 38).*

II. Nella prop. VIII del lavoro di Aristarco da Samo *Sopra le grandezze e le distanze del sole e della luna* è applicato il teorema « il rapporto di due archi appartenenti al primo quadrante è compreso fra il rapporto dei loro seni e quello delle loro tangenti ». (*op. cit. Lib.* III, n. 20).

III. Le prop. 15 e 16 del Lib. V della *Collezione* di Pappo dicono che supposto $0 < x < \pi$ si ha $\frac{x}{x - \text{sen}\, x} > \frac{\pi}{x}$ *(op. cit. Lib.* IV, n. 14).

IV. La prop. 20 dello stesso Libro V dice che « la proiezione di un segmento su un asse è eguale al prodotto del segmento per l'angolo da esso formato coll' asse (*Id. ivi*) », mentre nella 22 trovasi la nota relazione

$$\frac{\cos x + \text{sen}\, y}{\cos x - \text{sen}\, y} = \cot \frac{y - x}{2} \quad (Ib.).$$

VI. Le prop. 221-222 del Lib. VII della *Collezione* esprimono in linguaggio geometrico la relazione

$$\text{tg}\, x + \cot x = \frac{1}{\text{sen}\, x \cos x} \quad (\text{Id. n. } 19).$$

VII. Nell' opuscolo di Sereno *Sulla sezione del cono* si trovano due proposizioni, funzionanti da lemmi, che dicono l' una che « il coseno è una funzione decrescente dell' arco » e l' altra che « il seno d'ogni angolo acuto è minore dell' unità » (Id. n. 37).

Questi risultati speciali non possono però in alcun modo considerarsi come costituenti l' esordio della trigonometria greca, la quale appare piuttosto come un prodotto secondario della fabbricazione dell' astronomia, che come collegata allo svolgimento del pensiero matematico puro presso i Greci. Tale fatto, da tempo conosciuto, è dimostrato dal nostro autore nel II Cap., il cui I § è dedicato all' esposizione del « metodo grafico » [1], che si trova stabilito ed applicato nell' *Analemma* di Tolomeo, e della *Sferica* di Menelao, il cui II § ha per tema il calcolo delle corde di un circolo fatto da Tolomeo nell' *Almagesto,* il cui ultimo § è dedicato a raccogliere le proposizioni di trigonometria sferica che si trovano in quest' opera e nel commento di cui la corredò Teone Alessandrino.

[1] Giova notare come questo metodo sia stato largamente usato alla fine dello scorso secolo dall' Abate Caluso, il quale mostrò potersi col suo mezzo ottenere tutte le formole della trigonometria sferica, nonchè altre cose utili agli astronomi. Si vegga il lavoro *De l' utilité des projections ortographiques en général, et plus particulièrement pour entamer la recherche de l'orbite des comètes, et pour découvrir celles dont on attend le retour* (Mem. de l'Acad. royale des Sciences de Turin, T. II, 1786).

E poichè i Romani non possono dar materia a lungo discorso, l'A. si volge ai popoli d'Oriente e anzitutto agli Indiani.

Ai quali anzitutto si deve il calcolo di una tavola di corde, che si legge in un'opera tuttora esistente di Aryabhata; essi poi furono in possesso di una trigonometria avente per cardine il « metodo grafico » usato dai Greci e che, fra l'altro, permise loro di avvicinarsi al così detto « teorema del coseno » della trigonometria sferica.

Se — pertanto — nella trigonometria degli Indiani sono riflessi alcuni pensieri maturati sotto il cielo dell'Ellade, che cosa dovrà dirsi di quelli dei primi Arabi Orientali, veri ultimi discepoli di coloro che professarono nel Museo di Alessandria? L'opera di Al-Battâni (che il nostro autore analizza nel § 2 del IV Cap. delle sue *Vorlesungen*) può dirsi al confluente dei fiumi d'idee scaturienti una dalla Grecia e l'altro dall'India. Ma nella metà del Sec. X la trigonometria araba assume una fisonomia propria, una vita autonoma specialmente per opera di Abû'l Wâfa, il quale coll'introdurre le funzioni trigonometriche determinò una *instauratio ab imis fundamentis* della scienza trigonometria. Le opere di Ibn Jûnos, di Nasir-Eddins-Tûsi e di Ulûg-Beg, che quelle di Abû'l Wâfa seguono e completano, porgono poi nuovi e più decisivi argomenti per ritenere errata l'antica opinione che i seguaci di Maometto siansi limitati a conservare fedelmente l'eredità avuta dai Greci, senza farvi subire alcuna miglioria essenziale, senza arrecarvi alcuna rilevante aggiunta.

Gli Arabi occidentali (della Spagna e dell'Africa) — ai quali è consacrato il V Cap. dell'opera del Braunmühl, e che sono rappresentati nella storia della trigonometria di Al-Zarkâli, Dschâbir ibn Aflah e Abû'l Hasan — non sono comparabili ai loro fratelli d'Oriente e meritano di essere ricordati quasi esclusivamente per l'influenza che esercitarono, durante l'Evo medio, sopra i dotti europei. Dopo avere dedicato all'esame delle loro opere il tempo e lo spazio a ciò indispensabili, il nostro autore riprende il filo della storia della trigonometria in Europa cominciando dall'adunare tutto quel poco che si è debitore ai Latini dei Sec. V-XII ed ai Greci bizantini; tratta poi dell'introduzione in Europa della trigonometria araba; per quindi occuparsi dei cultori che questa ebbe nei secoli XIII-XV, cultori i quali, benchè non abbiano legato il proprio nome ad alcun effettivo progresso, hanno tuttavia bene meritato della scienza pei loro sforzi a diffondere — specialmente fra gli astronomi — la conoscenza del nuovo fondamento dato dagli Arabi alla trigonometria ([1]).

([1]) Nel redigere il Cap. (VI) concernente la trigonometria medioevale, il Braunmühl ebbe la fortuna, non solo di vivere in contatto di una delle più ricche biblioteche d'Europa, ma anche di contare sull'aiuto del più dotto e profondo conoscitore delle matematiche nell'Età di Mezzo, M. Curtze.

Il Rinascimento degli studî trigonometrici in Europa deve farsi datare da Regiomontano, il quale, oltre ad avere attivamente lavorato a rendere più esatte le tavole pel calcolo trigonometrico, ha date (nell'opera postuma *De triangulis omnimodis libri quinque*, 1533) più solide basi ed un ordinamento sistematico alle dottrine trigonometriche. Le nuove idee consegnate nell'opera pubblicata 57 anni dopo della morte di Regiomontano, erano note anche molto tempo innanzi, grazie a comunicazioni epistolari o verbali dell'autore: onde la loro benefica influenza si fece sentire assai prima di quanto si potrebbe credere tenendo conto soltanto della data di pubblicazione; basterebbe a farne fede un trattato di trigonometria sferica (rimasto inedito per mancanza di un editore) che scrisse un parroco vissuto fra il 1468 ed il 1528, Giovanni Werner. Fra gli epigoni del grande matematico di Königsberg, va anche ricordato Copernico, grazie ai Capitoli XII-XIV della celebre opera *De revolutionibus orbium coelestium* (1543) e per una colonna, che egli aggiunse come nota marginale all'esemplare da lui posseduto delle *Tabulae directionum* di Regiomontano e che è la prima tavola di secanti che si conosca.

Nella storia delle trigonometria la Germania è ancora rappresentata da un secondo grande lavoro postumo, cioè l'*Opus Palatinum de triangulis* (1596) di Giovachino Retico; il quale sin dal 1551 aveva pubblicato un *Canon doctrinae triangulorum*, che è la prima tavola di tangenti e la prima tavola di secanti che sia stata pubblicata; inoltre a lui si deve l'ordinario metodo di definire le sei linee trigonometriche mediante un triangolo rettangolo, e la più antica estesa tavola di tutte le sei linee stesse. Passando per brevità sotto silenzio quanto fece Erasmo Reinhold, rileveremo come Francesco Maurolico [1] abbia dimostrato come le linee usate nella Gnomonica sotto il nome di « umbra recta » e « umbra versa » altro non sieno che due (la cotangente e la tangente) che s'incontrano nelle opere anteriori di Regiomontano, Retico e Reinhold.

Meno importante è il contributo dato alla costituzione della trigonometria di Oronzio Fineo e Pietro Ramo. Ma la Francia, rimasta finora spettatrice indifferente al grande movimento che aveva avuto la Germania per principale teatro, scende ora in campo mandando come proprio campione uno scienziato del valore di Francesco Vieta. Il padre dell'algebra moderna è anche il primo che abbia studiato la trigonometria come un ramo della matematica pura invece che come un semplice aiuto dell'astronomia; è il primo che in Europa abbia adoperato, nella risoluzione dei triangoli piani e sferici, tutte le sei funzioni trigonometriche, che abbia introdotto l'uso nella trigo-

(1) Perchè l'autore scrive Maurolyco invece di Maurolico?

nometria delle trasformazioni algebriche e abbia gettato le basi della teoria delle funzioni angolari, non senza avvertire che questa contiene « dei segreti geometrici ed aritmetici, che sino ad ora nessuno ha percepito ». Così egli si pose in grado di risolvere una equazione di 45° gradi proposta come pubblica disfida da Adriano Romano. Passando rapidamente su quanto fecero Vieta ed altri minori per ottenere trigonometricamente la rettificazione della circonferenza, va notato che egli merita anche il nome di riformatore della trigonometria, se non altro per avere, primo in Europa, considerate metodicamente le sei relazioni fondamentali fra gli elementi di un triangolo sferico rettangolo, e per avere accoppiati, in base alla legge di reciprocità, i casi di risoluzione dei triangoli sferici: a lui deve pertanto farsi risalire il concetto di triangoli supplementari.

Sgraziatamente e per la forma in cui erano esposte e per l' incuria dell' autore nel tutelarne la diffusione, le idee riformatrici del Vieta non esercitarono che molto tempo dopo, la benefica influenza a cui dal destino erano chiamate: perciò non si connettono ad esse le *Metrices astronomicae* del francese M. Bressieu; e, se vi si collega invece uno scritto dell' inglese N. Torporley — ove si trovano già le cosidette « analogie di Nepero », — gli è che questi fu per molto tempo in amichevoli relazioni personali con Vieta.

La *Geometria rotundi* di T. Fink — opera che godè di lunghissima diffusione ed in cui s' incontrano per la prima volta i nomi di « tangente » e « secante » — ci richiama in Germania, ora troveremo nel Clavio ed in altri, degli egregi cultori delle discipline di cui andiamo seguendo le principali fasi di sviluppo; ove vedremo nuovi perfezionamenti di sostanza e di forma, provenire ad essa dagli astronomi di professione. A questi e ad altri scienziati di varie parti di Europa sono dedicati gli ultimi §§ del volume che ci sta dinnanzi; studiandoli si impara quanto operarono lo svizzero Bürgi, Bartolomeo Pitisco — a cui sembra devesi fare risalire il nome *trigonometria,* — gli olandesi W. Snellius (che per primo dimostrò che le sei relazioni fondamentali fra gli elementi di un triangolo sferico bastano a trattare tutti i casi di risoluzione), Adriano Romano (che adoperò uno speciale linguaggio simbolico) e Alberto Girard (che pure si servì di simboli particolari ed enunciò, senza riuscire a dimostrarlo, il teorema che dà l' area di un triangolo sferico); e l' italiano G. A. Mangini (autore di una tavola trigonometrica che venne accolta con grandissimo favore, specialmente dagli astronomi).

Ma in questo momento una grande rivoluzione si prepara alla trigonometria coll' invenzione dei logaritmi; con piena ragione quindi l' A. ha giudidato che da questa memorabile scoperta si dovesse far datare una nuova èra per quella scienza; ad essa sarà dedicato il seguente volume delle *Vorlesungen,* il quale auguriamo venga presto a soddisfare le giuste aspettazioni, la legittima impazienza del pubblico matematico. Noi intanto, finendo, dobbiamo avvertire il lettore come dal precedente riassunto non risultino la qualità più spiccata dell'opera del Prof. Braunmühl, che consiste nell'essere dessa il prodotto di uno studio profondo sulle fonti, il quale permise all'autore di correggere un gran numero di errori diffusissimi e di rettificare molti giudizi che, benchè errati, erano sinora accettati come dogmi; basti ciò a dimostrare che si è dinanzi non ad una compilazione ma ad un'opera di valore permanente.

G. L.

R. Fricke. *Kurzgefasste Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik mit Berücksichtigung der Anwendungen. Analytisch-functionentheoretischer Teil.* Leipzig, Teubner, 1900, IX-520 p. 8.° [Prezzo del Vol. legato Mk. 14].

L'opera, di cui abbiamo dinanzi il primo volume (il secondo sarà dedicato all'Algebra ed alla Geometria), è destinata a fornire i primi elementi dei rami più importanti della matematica superiore a chi abbia intenzione di approfondire in tali studi, e nel medesimo tempo a dar modo ai migliori allievi dei Politecnici di apprendere senza gran fatica certe teorie, le quali, pur non formando parte dei programmi delle Scuole tecniche superiori, trovano però larga applicazione nella meccanica, nella fisica e nella astronomia. In vista appunto di questo secondo scopo, l'autore ha avuto cura di scegliere quasi costantemente gli esempi, di cui ha corredato la sua opera, nel campo delle scienze applicate. Il libro non contiene, nè potrebbe contenere, nulla di nuovo; e però noi ci limiteremo ad una semplice rassegna degli argomenti che vi sono svolti. Aggiungeremo soltanto che, a nostro avviso, esso è atto a raggiungere largamente lo scopo a cui è destinato, giacchè chi ne abbia bene appreso ed assimilato il contenuto si troverà più che sufficientemente preparato allo studio delle opere e delle memorie originali.

Ecco ora un breve indice delle materie.

C. I. *Serie di Fourier.* — Loro origine storica. Forma generale della serie di Fourier. Esempi speciali. Integrali di Fourier. Applicazione al problema delle corde vibranti ed alla teoria del calore.

C. II. *Funzioni sferiche e cilindriche.* — Potenziale. Equazione di Laplace. Definizione e proprietà delle funzioni sferiche. Sviluppi secondo funzioni sferiche. Applicazione all'elettrostatica. Funzioni cilindriche. Applicazione al problema di Keplero. Tavole numeriche per le funzioni sferiche e cilindriche.

C. III. *Funzioni d'una variabile complessa.* — Cenni storici. Sostituzioni lineari. Proiezione stereografica del piano sopra una sfera. Rappresentazioni conformi. Funzione analitica (o monogena). Movimento piano d'un fluido incompressibile. Teoremi di Green. Integrale d'una funzione complessa. Teorema di Cauchy. Sviluppo d'una funzione in serie di potenze. Cerchio di convergenza. Continuazione analitica. Punti singolari. Teorema di Laurent. Teoria delle funzioni uniformi secondo Weierstrass. Superficie di Riemann.

C. IV. *Funzioni ellittiche.* — Periodi. Funzioni di Weierstrass. Loro sviluppi in serie e in prodotti. Rappresentazione conforme del piano mediante la funzione p. Integrali ellittici. Teorema d'addizione. Cofunzioni. Funzioni θ e funzioni ellittiche di Jacobi. Integrale di 2.ª specie. Degenerazione. Trasformazione lineare. Trasformazione di Landen. Calcolo numerico delle funzioni ellittiche. Tavole.

C. V. *Applicazioni delle funzioni ellittiche.* — Poligoni di Poncelet. Trigonometria sferica. Geodetiche dell'ellissoide di rotazione. Quadriche confocali e coordinate ellittiche. Applicazione alla teoria del calore. Pendolo sferico. Rotazione d'un corpo rigido intorno ad un punto.

C. VI. *Equazioni differenziali lineari.* — Teoria analitica delle equazioni lineari. Sistemi fondamentali. Punti singolari. Equazione determinante. Equazione delle funzioni sferiche. Equazione ipergeometrica. Equazione di Schwarz e rappresentazione conforme che ne deriva. Rete di triangoli a lati circolari.

C. VII. *Equazioni a derivate parziali del primo ordine.* — Determinanti funzionali. Sistemi simultanei d'equazioni differenziali ordinarie; equazione a derivate parziali del 1.° ordine equivalente. Interpretazione geometrica. Principio dell'ultimo moltiplicatore. Equazioni lineari a derivate parziali del 1.° ordine. Sistemi completi d'equazioni lineari. Sistemi Jacobiani. Sistemi d'equazioni lineari a differenziali totali. Equazioni non lineari. Teorema di Poisson. Equazioni della dinamica.

G. VIVANTI.

R. STURM. *Elemente der darstellenden Geometrie.* Zweite umgearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 61 Figuren in Texte und 7 litographirten Tafeln. Leipzig, Teubner, 1900, 8.° gr. p. V + 157 [Prezzo del Vol. leg. Mk. 5,60].

L'opera di cui annunciamo questa seconda edizione è ben nota in Italia grazie alla traduzione che ne fece sin dal 1878 il Prof. Jung. Prima di presentarla nuovamente al pubblico l'A. vi fece numerose aggiunte e vi apportò importanti modificazioni; il lettore se ne renderà conto con la semplice ispezione dell'Indice che quì riferiamo:

Introduzione.

I. *Rappresentazione sopra un solo piano di projezione. — a)* Rappresentazione del punto e della retta. *b)* Rappresentazione del piano; teoremi relativi agli angoli di inclinazione; ribaltamenti ed affinità; il parallelismo dal punto di vista projettivo.

II. *Rappresentazione sopra due piani di projezione. — a)* Rappresentazione del punto; *b)* Rappresentazione della retta; *c)* Rappresentazione del piano.

III. *Altri problemi.*

IV. *Rotazione delle figure rappresentate attorno ad assi.*

V. *Introduzione di nuovi piani di projezione. — a)* Il nuovo piano di projezione è parallelo ad uno degli antichi. *b)* Il nuovo piano di projezione è perpendicolare ai due antichi. *c)* Il nuovo piano di projezione è perpendicolare ad uno solo degli antichi. *d)* Il nuovo piano di projezione non è perpendicolare ad alcuno dei dati.

VI. *Poliedri. — a)* Rappresentazione di poliedri. *b)* Sezioni piane dei poliedri; prospettiva; omologia. *c)* Intersezione di poliedri. *d)* Sviluppo dei poliedri.

VII. *Projezione centrale o Prospettiva.*

VIII. *Projezione obliqua.*

IX. *Assonometria.*

X. *Ombre ed illuminazione.*

Come si vede l'A. si è proposto di stabilire i fondamenti dei varì metodi di rappresentazione più in uso (escluso quello dei piani quotati) e di farne applicazione alle figure limitate da rette e piani. È da lamentare che il piano dell'istruzione pubblica in uso in Germania non gli abbia concesso di presupporre nei proprì lettori la conoscenza della Geometria projettiva: la quale, come è risaputo, non solo permette di penetrare nella natura intima dei metodi caratteristici della Geometria descrittiva, ma guida anche nel modo più naturale a parecchie ottime costruzioni. Degli inconvenienti di siffatta condizione di cose è evidente che l'illustre A. è pienamente consapevole, giacchè egli non si lascia sfuggire alcuna occasione per stabilire, sia pure sotto forma speciale, alcuni dei concetti costituenti il midollo spinale della geometria moderna. G. L.

Luisa Anzoletti. *Maria Gaetana Agnesi.* 8.° p. 495, Milano, L. F. Cogliati, 1900. [Prezzo L. 4,50].

Di Maria Gaetana Agnesi molti scrissero: alcuni per esaltarne il valore scientifico, altri per vantarne le opere di carità, tutti sedotti dal fascino emanante da una donna che, in tutte le fasi della sua vita, fu *qualcheduno.* Lo fu durante la prima fase, quando, vero *enfant* *prodige*, divenne l'eroina delle accademie che tenevansi nella casa paterna; lo fu nella seconda, quando le sue *Instituzioni analitiche* le fecero conseguire d'un tratto l'ambito lauro scientifico; e lo fu anche nella terza, quando — abbandonando all'improvviso la carriera delle scienze, che doveva presentarsi a lei piena di seduzioni e promesse — dedicò tutta sè stessa ad alleviare i dolori degli infelici e degli infermi. Sotto tutti questi aspetti la celebre nobildonna milanese è considerata nell'opera che, con vero intelletto d'amore, le dedicò l'egregia signora Luisa Anzoletti. Questa, nel prepararsi e condurre a termine tale suo lodevole lavoro, non soltanto attinse all'ampia letteratura biografica sullo stesso tema, ma si sobbarcò a coscienziose ricerche sopra documenti originali, le quali la condussero a estirpare molti errori che eransi propagati di bocca in bocca o, meglio, di penna in penna. Essa inoltre volle presentare un giudizio sereno sull'opera matematica della sua eroina, egualmente lontano da quello, troppo benevolo, dei ciechi panegiristi e di quello, troppo severo, degli spregianti ed incuriosi; perciò, non paga di inserire un resoconto lucido e fedele delle *Instituzioni,* redatto dal Dottor U. Amaldi, ed alcune frasi rispecchianti l'opinione sulle stesse del Prof. Pincherle, essa introdusse i giudizi motivati pronunciati da due specialisti in materia, uno dei quali risponde al nome illustre di Giovanni Schiaparelli.

L'opera della signora Anzoletti, oltre al porgere un ritratto vivo e parlante di Gaetana Agnesi, ritrae fedelmente l'ambiente che fu teatro della sua esistenza; non soltanto essa sarà ricercata come importante fonte di informazioni esatte da tutti i futuri biografi della celebre matematica, ma verrà avidamente letta da coloro cui essa cadrà tra mano, i quali, lettene alcune pagine, non potranno abbandonarla senza di averla esaurita.

Una parola di lode va tributata anche all'editore, che nulla trascurò per rendere degno omaggio alla memoria della dotta e pia milanese; coll'inserire varì ritratti di questa e delle persone che ebbero rapporti con essa, nonchè i disegni delle località più cospicue nominate nel testo, egli assurse al grado di coadiutore dell'eminente autrice.

G. L.

A. Kneser. *Lehrbuch der Variationsrechnung.* Braunschweig, Vieweg, 1900. XV-313 p. 8.° [Prezzo Mk. 8].

Di un trattato sul Calcolo delle variazioni era vivamente sentito il bisogno, specie dopo che le ricerche di Weierstrass e di altri hanno dato un nuovo assetto a questa importante disciplina. Quello che vogliamo oggi far conoscere ai lettori del *Bollettino* ha il grande merito che, pur uniformandosi pienamente alle nuove vedute, pur non venendo mai meno al più perfetto rigore, presenta la teoria sotto una forma assai più chiara, e direi quasi *palpabile*, di quello che facciano le altre opere congeneri. Ed invero, mentre ordinariamente si comincia dal considerare un integrale definito contenente un numero qualunque di funzioni della variabile indipendente ed un numero qualunque di derivate di esse, qui si parte (C. I) da un integrale contenente una sola funzione e la sua prima derivata, integrale che può considerarsi come dipendente dagli elementi del 1.° ordine d'un certo arco di curva piana. Se tale curva viene rappresentata analiticamente mediante le sue equazioni parametriche, nell'integrale verranno a figurare due funzioni del parametro (le due coordinate) e le loro derivate prime; reciprocamente ogni integrale di questa forma può ridursi ad uno della forma prima considerata, purchè sia tale da avere valore indipendente dalla scelta del parametro, per il che è necessario che la funzione sotto il segno sia lineare omogenea rispetto alle due derivate. Ciò premesso, il problema fondamentale del Calcolo delle variazioni per un integrale del tipo accennato consiste nel determinare le curve a cui corrispondono valori dell'integrale maggiori o minori di quelli corrispondenti a tutte le curve ad esse prossime e soggette come esse a certe condizioni di continuità. Affinchè una curva abbia tale proprietà, è necessario (C. II), come si sa, che la variazione prima dell'integrale sia nulla, condizione che si trasforma in modo noto in un'equazione differenziale del 2.° ordine. Ogni curva che soddisfa a tale equazione dicesi un' *estremale* dell'integrale dato. La determinazione delle condizioni sufficienti (C. III) perchè un'estremale abbia la voluta proprietà di massimo o di minimo esige ricerche assai più delicate, nei cui dettagli sarebbe impossibile entrare, e mediante le quali il problema è ridotto allo studio del segno d'una certa espressione designata con E.

Sviluppata così la teoria pel caso più semplice, riesce abbastanza facile estenderla man mano a casi più complicati: massimi e minimi relativi (C. IV), estremali aventi certi punti singolari o composte in parte di tratti del contorno del campo entro il quale è ristretta, per le condizioni speciali del problema, la variabilità della curva (C. V), massimi e minimi di integrali contenenti derivate d'ordine superiore della funzione incognita (C. VI). Del caso in cui figurano nell'integrale più funzioni della variabile indipendente è fatto soltanto un cenno nel C. I, non offrendo esso alcuna difficoltà speciale.

Però tutti i problemi ad una sola variabile indipendente che si presentano nel Calcolo delle variazioni possono porsi sotto un'unica forma generale (C. VII), e cioè: Dato un sistema di equazioni fra la variabile indipendente, un certo numero di funzioni di essa e le loro derivate prime, dati i valori di tutte queste funzioni per un certo valore della variabile indipendente e quelli di alcune di esse per un altro valore di questa, determinare le funzioni in modo che una prefissa tra esse sia massima o minima per quest'ultimo valore della variabile indipendente.

Infine il caso d'un integrale doppio (C. VIII) dà luogo a sviluppi analoghi a quelli relativi allo studio d'un integrale semplice.

L'esposizione della teoria è accompagnata da esempi scelti fra i più interessanti. Accenneremo i seguenti: geodetiche nel piano e sopra una superficie qualunque, superficie di rotazione di volume minimo, isoperimetri nel piano e sopra una superficie qualunque, superficie di rotazione che nel moto entro un fluido soffre la minima resistenza, brachistocrone, figura d'equilibrio d'un filo pesante e d'una molla elastica, forma d'una goccia, superficie d'area minima, equazioni generali della meccanica e loro applicazioni. G. VIVANTI.

O. HÖLDER. *Anschauung und Denken in der Geometrie. Akademische Antrittsvorlesung gehalten an* 22 *Juli* 1899. Mit Zusätzen, Anmerkungen und einem Register. Leipzig, Teubner, 1900, 8.° gr. p. 75 [Prezzo Mk. 2,40].

Nel salire sulla cattedra tanto illustrata da Sophus Lie, il Prof. Hölder ha abbandonato il campo in cui ha ottenuti molti allori per fare una scorreria nel dominio di confine tra la Geometria e la Filosofia, per investigare quali uffici vengano esercitati dall'intuizione e dal ragionamento, dall'esperienza e dal pensiero nella scoperta e nella dimostrazione delle proposizioni geometriche e meccaniche. È una questione che, sotto altra forma, venne già da varî autori ed in diversi modi trattata; il Prof. Hölder mostra di possedere una cognizione perfetta della letteratura relativa (1), sicchè le nuove considerazioni che egli espone, lungi dall'apparire come il prodotto di un pensiero isolato, si collegano ai risultati già conseguiti, completandoli. Non arrivando però egli ad alcuna conclusione semplice definitiva, non siamo in grado di compendiare in poche parole le conseguenze a cui egli giunge. Soltanto osserveremo che, limitandosi egli esclusivamente alla parte più elementare della Matematica, attingendo egli gli esempi su cui ragiona agli *Elementi* di Euclide, resta ancora da trattare la questione da lui posta per le parti più elevate colla scienza; di sapere, cioè, se la Geometria, la quale, nei suoi fondamenti, ha tanti punti di contatto col mondo esteriore, ne conservi ancora qualcheduno, non confessato o avvertito, anche quando sembra avere troncato qualunque legame con esso. G. L.

(1) Sarebbe sufficiente a dimostrarlo la estesa collezione di dottissime note che chiude l'opuscolo annunciato.

R. GUIMARÃES. *Les mathématiques en Portugal au XIX Siècle. Aperçu historique et bibliographie.* Coïmbre. Imprimerie del' Université 1900, 4.° pag. 164.

Ottima e meritevole d'incondizionata lode fu l'idea di allegare alla Sezione portoghese della Esposizione mondiale testè chiusa una bibliografia completa di quanto il Portogallo ha fatto per collaborare al progresso delle matematiche pure ed applicate, preceduta da un breve cenno delle principali vicende che ivi subì l'insegnamento delle scienze esatte. La distribuzione della materia è fatta con i criteri prescelti dalla Commissione che presiede alla compilazione del *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques* e questi criteri risultano anche da chi non abbia a propria disposizione l'*Index* relativo, avendo il Sig. Guimarães trascritto per ogni classe la relativa intitolazione. Per parecchi dei lavori registrati l'autore ha dato, oltre il titolo, una breve indicazione del contenuto, ciò che rende più pregevole ed utile il suo scritto; alcune volte egli aggiunse alcuni giudizì, di cui probabilmente molti troveranno dubbia l'opportunità, se non altro perchè la condizione di giudice era, nel caso attuale, molto delicata dal momento che il Sig. Guimarães era obbligato anche prendere in considerazione memorie di cui egli stesso è autore. Ciò però nulla toglie alcun valore al lavoro che annunciamo; per avere redatto il quale l'A. merita gratitudine, non solo de' suoi compatrioti, ma di tutti gli storici delle scienze matematiche. G. L.

PAOLO GAZZANIGA. *Libro di Aritmetica e di Algebra elementare*, III.ª edizione in tre parti separate. Ed i F.lli Drucker - Verona, Padova, 1900, 8.°, p. 375 [Prezzo L. 4.50].

Quantunque del libro indicato io mi sia eccupato altrove più di una volta, quando ne comparvero la I.ª e la II.ª edizione, volontieri aderisco all'invito di occuparmi di esso in questa Rivista. E lo faccio volontieri appunto perchè si tratta di un'opera ben diversa da tutte le altre congeneri, di non scarso valore scientifico e didattico.

Il valore intrinseco in un libro elementare d'Algebra non si deve cercare più nella trattazione delle equazioni di I.° e II.° grado o del calcolo letterale . . . ., bensì nello svolgimento delle parti più delicate, ad esempio nella genesi delle varie specie di numeri, nella teoria delle equazioni, delle potenze in generale, dei logaritmi e simili, e più che altrove, almeno io credo, nella genesi delle varie specie di numeri.

Ed infatti si può chiedere se i numeri devano studiarsi come simboli indicanti le misure delle grandezze matematiche (metodo sintetico) e derivare lo loro proprietà da quelle delle grandezze matematiche, oppure se i numeri devano considerarsi come enti a sè, ai quali si attribuiscano successivamente le proprietà necessarie per la loro applicabilità alla misura delle grandezze (metodo analitico); od anche se sia possibile scegliere un metodo intermedio, che, senza nuocere al rìgore scientifico indispensabile, semplifichi dal punto di vista didattico lo svolgimento di questo argomento.

Ora mentre da una parte il Bettazzi, il Biasi, lo Stolz ed altri seguono il primo metodo e invece il Peano, il Ricci e il Burali-Forti si attengono al secondo, a parere mio il Gazzaniga è il primo che introdusse la via di mezzo, conservando alla trattazione dell' argomento chiarezza e rigore. Di qui derivauo le principali differenze tra il libro del Gazzaniga e gli altri trattati d'Algebra comparsi ln Italia e fuori in questi ultimi anni.

Come introduzione di ogni capitolo concernente una classe particolare di enti numerici l' A. pone delle osservazioni preliminari sull'origine dei loro concetti. Così egli trova l'incentivo al concetto di numero intero nel pensiero di gruppo numerabile, di numero frazionario nel pensiero di oggetto divisibile in parti eguali, di numero irrazionale nel pensiero di sistema continuo di punti della retta, di numeri negativi immaginarii e complessi nel pensiero di vettori o segmenti considerati anche nella loro direzione.

Quanto alla questione della definibilità o meno di questi enti, egli, in pieno accordo coi cultori del Calcolo logico, non dà la definizione del numero, ma lo postula attribuendogli alcune delle proprietà già riscontrate nelle grandezze dalle quali nelle osservazioni preliminari ha dedotto l'idea dell'ente stesso: e delle varie proprietà dell'ente numerico particolare assume come postulati soltanto quelle indispensabili, indipendenti, e non incompatibili fra loro.

Le osservazioni preliminari, m'incorre l'obbligo di notarlo, potrebbero essere tolte senza che il libro dal punto di vista scientifico soffrisse alcun demerito: l'autore le ha poste più che altro per ragioni didattiche.

L'analisi dei postulati veramente irreducibili relativi ai varii enti numerici fatta dal Gazzaniga nel preparare questa III.ª edizione ha portato di conseguenza l'aggiunta di qualche teorema che non si trovava nelle edizioni precedenti: ma, oltre il fatto che in tutte le dimostrazioni il rigore non è disgiunto dalla chiarezza, è preferibile qualche teorema di più alla tacita ammissione di proprietà importanti, a certe pseudo-dimostrazioni di altri testi che il pubblico ritiene buoni e sono pessimi perchè tradiscono il vero scopo dello studio della matematica, consistente nell'educare i giovani a ragionare rigorosamente, nell'abituarli a quella « onestà intellettuale » che precede e prepara « l'onestà morale ». Nel testo è facile distinguere i varii postulati, perchè contraddistinti con numeri chiusi in due parentesi.

Quanto al modo di esporre le definizioni, le leggi operative, le proposizioni o teoremi costituenti la parte maggiore dei tre volumetti, il libro del Gazzaniga ha molti punti di somiglianza con altri buoni trattati; mi sembra però che il coordinamento, il rigore e la chiarezza emergano più spiccatamente in esso che negli altri. Ripeto, vi è qualche teorema di più, ma non vi sono lacune; tutto è spiegato.

Le definizioni sono poste in particolare evidenza essendo in esse segnati con caratteri speciali i vocaboli e le frasi a cui si riferiscono; i teoremi sono ordinatamente indicati con numeri senza parentesi; i titoli dei paragrafi e certe parole o frasi importanti nel seguito sono distinte da un carattere speciale. Anche la disposizione di un libro e la varietà dei caratteri tipografici hanno una certa importanza dal punto di vista didattico, per facilitare lo studio al giovane dopo la lezione. Vi sono anzi libri che devono la loro fortuna a queste due sole qualità ed altri che per queste soltanto fecero concorrenza commercialmente riuscita a libri migliori; per ciò ho creduto accennare anche ad esse, benchè naturalmente nel testo del Gazzaniga esse siano le ultime da porre in luce.

Finora mi sono occupato dell' indirizzo adottato dal Gazzaniga in quanto si riferisce all' aritmetica generale considerata come parte integrante di ogni trattato di Algebra elementare. Perchè cominciare senz' altro dal calcolo letterale (ben sapendo che il supposto numerico nei principî della matematica nei licei non può essere che il numero razionale positivo, e che ad un liceo giungono giovani da varî ginnasi e con varî metodi istituiti), dai polinomî e da tutte quelle *regole* (che non si sa dove vengano) non recanti che confusione, oscurità e noia? Meglio, come fa appunto il Gazzaniga, descrivere tutto il campo aritmetico con ordine e chiarezza, dichiarando senza titubanze dannose ciò che si crede definibile, dimostrando senza sottintesi e senza omissioni tutto ciò che è dimostrabile.

Con tale metodo non solo il giovane studente si convince della continuità logica e scientifica tra l'Aritmetica e l'Algebra elementare, ma lo studio di questa perde quel carattere di stranezza e di nebulosità che la rende ostica, di solito, da principio.

In fine di ogni capitolo in una breve aggiunta il Gazzaniga dimostra che il numero postulato in principio, sia pure come segno soltanto, insieme con le sue proprietà e regole operative, è applicabile come simbolo operativo a certe categorie di oggetti geometrici o fisici. In sostanza il Gazzaniga rivendica al numero la sua indole aprioristica pur conservando empirica la sua origine, e compie la trattazione delle proprietà di esso sopprimendo ogni risorsa intuitiva, pur non dimenticando a quali condizioni deve sottostare l' aiuto che altre scienze attendono dall'Aritmetica e dall' Algebra per lo sviluppo e per le applicazioni loro proprie. Di qui le aggiunte alle quali accennai prima.

Data la cura posta nello studio dei varî enti numerici dei quali si serve l'Algebra, nella II.ª parte il Gazzaniga, premesse poche definizioni chiare e precise, nel capitolo IV.° « Eguaglianze identiche », può svolgere con brevità e con facilità il calcolo letterale sino alla divisibilità dei polinomi; nei testi ordinarî tale parte esige uno sviluppo assai più lungo e tuttavia lascia gravi lacune e molti dubbi.

Rigorosissimo e originale nel metodo è il § 4 di questo capitolo ove si studiano le variazioni di $P(x)$ al variare di x, la condizione di identità tra due polinomii a coefficienti reali e dello stesso grado, la forma del resto di $P(x)$ diviso per $x - a$, la divisibilità di $P(x)$ per binomì della forma $(x - a)$, la ricerca del *MCD* e del *MCM* dei polinomii.

Il cap. VII.° tratta delle *equazioni*. In seguito ad un'osservazione giustissima del Ciamberlini, il Gazzaniga dice EQUAZIONE *ogni eguaglianza posta tra due espressioni algebriche all'intento di trovare, se vi siano, valori delle lettere che rendono identicamente zero la differenza delle espressioni stesse.* Questa definizione toglie l'inconveniente che si presentava con quella dei vecchi autori quando la ricerca delle soluzioni conduceva a concludere che . . . . soluzioni non ve ne erano!

Le proprietà delle equazioni sono esposte in modo semplice, come sono svolti in forma chiara e breve i metodi per risolvere una equazione di I.° e di II.° grado ad una incognita.

Anche la definizione di *sistema di equazioni* è dal Gazzaniga modificata per porla in armonia con quella da lui adottata per l'equazione: nessuna osservazione particolare ho da fare per lo studio e la risoluzione dei sistemi stessi, dirò soltanto che il Gazzaniga analizza con cura tutti i casi più comuni e più notevoli per la pratica.

La III.ª parte ha nel suo primo capitolo (l'VIII.° dell'intero libro) un appendice al cap. I.° ove si studiano alcune proprietà dei numeri primi non indispensabili per un corso di algebra elementare e che oggi i programmi ufficiali, irrazionalmente e con profitto assai scarso (per non dire nullo) assegnano alla IV.ª classe del Ginnasio (1). Il cap. IX.°

(1) Questo cenno lo scrissi in fine di Ottobre, quando non erano comparsi ancora i nuovi programmi di Matematica per le scuole classiche. Ora (4 Dicembre) le nuove disposizioni ministeriali assegnano appunto alla III.ª liceale la teoria dei numeri primi togliendola dalla IV.ª ginnasiale e coordinano più razionalmente i programmi scientifici dei Licei. cosicchè l'osservazione mia ha valore retrospettivo. Non soltanto i nuovi programmi soddisfanno i desideri di molti insegnanti (non escluso il sottoscritto), ma danno indirettamente valore grandissimo all'opera qui analizzata. La I.ª edizione (poco diversa nell'ordinamento dalla III.ª) risale già al 1896 ed allora molti obbiettarono che essa non seguiva i programmi ufficiali. Tale accusa non si può ripetere nel Dicembre 1900.

contiene l'analisi completa delle variazioni di una potenza al variare della base o al variare dell' esponente come preparazione al concetto di potenza ad esponente *reale* e allo studio delle progressioni e dei logaritmi. Il cap. X.° tratta delle *Applicazioni geometriche* (teoremi geometrici espressi per mezzo di relazioni algebriche, formule algebriche interpretate come teoremi geometrici, trigonometria). Ivi le *funzioni trigonometriche* sono definite rigorosamente come *misure*, rispetto al raggio del cerchio, di certi segmenti particolari e non si parla mai di *linee trigonometriche* come fanno ancora molti generando falsi apprezzamenti e false indicazioni per gli scolari. E poichè lo scopo finale della trigonometria è l' applicazione dell' aritmetica e dell' algebra a problemi geometrici, astronomici e fisici, è naturale che essa faccia parte di un libro di algebra elementare.

Il testo del Gazzaniga contiene note storiche e tre buone raccolte di esercizi (una per ciascuno dei tre volumetti) ricche e pregevoli per la novità e per l' importanza. Nella scelta dei problemi l' autore ha fatto posto nella II.ª parte a questioni interessanti la fisica e nella III.ª ad argomenti d' indole geometrica.

Concludendo: il libro del Gazzaniga è frutto di studio, di esperienza e di grande amore per la scuola.

G. B. Marangoni.

A brief History of Mathematics. An authorized Translation of Dr. Karl Fink's *Geschichte der Elementar - Mathematik, by* Wooster Woodruf Beman *and* David Eugene Smith. Chicago, The Open court publishing Company, 1900, 8.°, p. xii + 338 [Prezzo del vol. 6 sh.]

Se, come vuole un antico proverbio, anche i libri hanno il loro destino, la sorte che venne riserbata alla *Geschichte der Elementar-Mathematik* del compianto Dott. Fink non può dirsi che oltremodo lieta. Compilata, senz' attingere alle fonti, da uno nuovo alle ricerche storiche, redatta sopra un piano il quale lascia qualche cosa a desiderare, scritta con uno stile mai brillante e non sempre corretto, era presumibile che non potesse avere se non un' esistenza effimera e dovesse venire eclissata e quindi fatta dimenticare da altri migliori lavori congeneri, la cui apparizione veniva da più parti ad alte grida invocata. Invece, dopo dieci anni (che devono giudicarsi fra i più fecondi in istudî sopra la storia della matematica), le è accordato l' onore altissimo di venire tradotta da due persone che, in questi ultimi tempi, si fecero assai favorevolmente conoscere come autori di pregevoli opere matematiche destinate agli studenti americani (v. questo *Bollettino* 1899, p. 124 e 1900, p. 76). Essi, nel mentre si accinsero a tradurla nella loro lingua, ne avvertivano alcune lacune o mende e si sforzarono di toglierle con aggiunte bene ispirate ed opportuni emendamenti.

Trattandosi di un lavoro giudicato sin da quando apparve in tedesco crediamo superfluo il ritesserne qui un'analisi critica e ci restringiamo ad indicare i principali fra gli errori che lo bruttano anche nella versione inglese.

p. 142. Le formule che danno la somma delle potenze simili delle radici di un'equazione in funzione dei coefficienti, appartengono non a Newton, ma ad Alberto Girard.

p. 158. È attribuita ad Eulero la dimostrazione del teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche, mentre è noto sin dai tempi di Gauss, non essere essa conclusiva.

p. 165. Non è Jacobi, ma Abel, che è adolescente tentò di risolvere le equazioni del quinto grado.

p. 175. Che il merito principale di Jacopo Riccati consista nell'avere introdotto in Italia la filosofia di Newton, è una proposizione che avrebbe bisogno di prova.

p. 179. L'attribuzione ai Pitagorici di nozioni sulla teoria degli isoperimetri è dovuta ad un noto equivoco in cui cadde il Montucla.

p. 188-89. L'integrazione nel campo complesso, introdotta da Cauchy, va collegata, non già alla moderna teoria delle funzioni di variabili reali, ma sibbene a quella delle funzioni di variabili complesse.

p. 200. L'introduzione sistematica del *diorisma* è di consueto attribuita, non ad Apollonio, ma a Leone, discepolo di Platone.

p. 211 e 243. L'elica cilindrica è ben diversa dalla curva a doppia curvatura inventata da Archita. Nel primo dei luoghi or citati, un'asserzione di Gemino è riferita imperfettamente.

p. 246. A proposito delle figure regolari dello spazio a quattro dimensioni è citata un'opera della cui esistenza abbiamo forti ragioni per dubitare.

p. 267. È lecito identificare la geometria differenziale con la teoria della curvatura delle superficie?

p. 270. Linea 2.ª dal basso: invece di 46 leggasi 96.

p. 318. Dalle ricerche recenti dell' Heiberg risulta essere la patria di Sereno, non Antissa, ma Antinouopoli.

G. L.

G. MILHAUD. *Les philosophes géomètres de la Grèce. Platon et ses prédécesseurs.* Paris, Alcan, 1900, 8.° p. 387 [Prezzo 6 fr.]

Questo volume fa parte della nota *Collection historique des grands philosophes* ed ai cultori della filosofia è specialmente diretto. Tuttavia, sia perchè si riferisce all' epoca in cui filosofia e matematica procedevano in accordo perfetto, sia perchè è scritto da persona che alla storia delle scienze esatte fornì già un non ispregevole contributo (1), va segnalato ai nostri lettori. Quelli fra essi che non ebbero finora occasione di studiare l'opera scientifica dei geometri greci precursori di Euclide, ne apprenderanno ivi i principali risultati; mentre gli altri giungeranno a formarsi una chiara idea della parte fondamentale che aritmetica e geometria rappresentano nei sistemi filosofici di Pitagora e di Platone. Ma poichè l'originalità del libro sembra risiedere, piuttosto nella illustrazione e nell'interpretazione delle idee professate dal divino filosofo, che nell'esposizione della storia della matematica pre-euclidea, così esce dal compito nostro l'esaminarne, ed eventualmente criticarne il contenuto. G. L.

F. SCHILLING. *Ueber die Nomographie von M. d'Ocagne. Eine Einführung in dieses Gebiet.* Mit 28 Abbildungen. Leipzig, Teubner 1900, 8.° gr. p. 47 [Prezzo Mk. 2].

Ai lettori del *Bollettino* sono già noti i metodi grafici che il sig. M. d'Ocagne ha coordinati sotto il nome di *nomografia* (v. T. II, 1899, p. 126-127). Desiderando farne conoscere la natura e gli scopi ai suoi compatrioti, per diffonderne l'uso ed aumentarne le applicazioni, il Prof. Schilling ha pensato di pubblicare per le stampe la conferenza, che annunciamo, da lui tenuta dinnanzi alla Società matematica annessa all'Università di Gottinga. Lo stile chiaro, i molteplici esempi e le numerose figure renderanno indubbiamente in generale ben accetta questa pubblicazione, incoraggieranno pure molti ad affrontare lo studio delle cinquecento pagine di cui consta il lavoro originale del chiaro ingegnere francese, e permetteranno certamente di orientarsi in un campo di studî dalla cui cultura le matematiche applicate ragionevolmente attendono gran frutto. G. L.

Prager Tychoniana gesammelt von Prof. Dr. F. J. STUDNICKA *k. k. Hofrath.* Prag, Verlag der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, 1901, 8.° gr. p. 69.

È noto che coll'ascensione al trono di Danimarca di Cristiano IV cominciò a diminuire lo straordinario favore che Ticone Brahe aveva goduto sotto il governo del re Federico II. I sussidî, che erano stati sino allora profusi a larga mano al celebre astronomo, vennero gradatamente a mancare, sicchè venne un giorno (1597) in cui egli, adunati i suoi strumenti, credette opportuno di abbandonare Uranienburg,

(1) *Les origines de la science grecque* (Paris, Alcan, 1893).

la celebre corte astronomica di cui egli era stato architetto e sovrano. Fortunatamente la fama mondiale di cui egli godeva gli fece ben presto trovare nell' imperatore Rodolfo II un altro augusto protettore, al quale egli è debitore della carica di astronomo di corte, che egli occupò in Praga sino all' istante della sua morte (1601). Memore di siffatta circostanza, il Prof. Studnicka — che alla letteratura ticoniana somministrò già dei contributi importanti — appressandosi il terzo centenario della morte dell' eminente astronomo danese, pensò di compilare un catalogo ragionato di tutti i cimelî e i ricordi che a lui si riferiscono e nella capitale della Boemia si conservano. Così ebbe vita l' opuscolo che annunciamo; il quale, mentre, grazie a quanto contiene verrà altamente pregiato dagli storici, per le bellissime riproduzioni fotolitografiche di cui è adorno, verrà giudicato dai bibliofili come un vero tesoro.

Delle tre parti di cui è diviso una concerne le opere manoscritte, un' altra le opere a stampa possedute e postillate da Ticone, una terza gli strumenti scientifici. Le notizie date in ciascuna sembrano cósì interressanti che noi crediamo chiunque in futuro vorrà accingersi a scrivere una nuova biografia del celebre maestro di Keplero reputerà inevitabile una visita preliminare a Praga.

G. L.

Carl Friedrich Gauss *Werke. Achter Band. Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.* In Commission bei B. G. Teubner. 8.°, p. 458 [Prezzo Mk. 24].

Dopo una pausa di circa un quarto di secolo, la Società delle Scienze di Gottinga riprende la pubblicazione delle opere di Gauss. Chi presieda a tale lavoro, come esso venga condotto, che cosa se ne possa ragionevolmente attendere è già noto ai nostri fedeli lettori (v. *Bollettino*, T. I, p. 110-111 e T. III, p. 62-63). Perciò, nel segnalare la comparsa del primo volume della nuova serie delle opere del « princeps mathematicorum », basterà che noi segnaliamo brevemente quali argomenti siano in esso trattati e quali persone ne abbiano curata la pubblicazione. Ma non possiamo tacere che l' importanza di tale volume non è minore di quanto era presumibile fosse. A provarlo basti dire che esso permise di completare la storia della geometria non-euclidea, col richiamare alla memoria e far collocare nella debita luce uno dei primi che coltivarono questo ramo di scienza (v. l' interessante articolo di P. Stäckel, *Friedrich Ludwig Wachter, ein Beitrag zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie*, Math. Annalen, T. LIV, p. 49-85); ed a questo esempio altri molti ne potremo aggiungere se lo spazio non ci fosse tanto misurato.

Ecco le notizie preannunciate sul contenuto del volume in questione: Aritmetica ed Algebra. Analisi e teoria delle funzioni [Fricke]. Calcolo numerico. Teoria delle probabilità (in particolare Teoria dei minimi quadrati. [Börsch, Krüger]. Fondamenti della geometria. Geometria situs. Problemi e teoremi di geometria elementare. Applicazione dei numeri complessi alla geometria. Teoria delle superficie [Stäckel].

G. L.

E. Picard. *Sur le développement depuis un siècle de quelques théories fondamentales dans l'analyse mathématique. Conférences faites à Clark-University (États-Unis).* Paris, Colie 1900, 8.°, p. 90 [Prezzo 1 fr. 50].

Ecco un libretto bello e buono, dotto e suggestivo ad un tempo; esso riescirà utile tanto ai principianti, che bramano orientarsi nel vasto campo dell'Analisi, quanto ai già provetti, che desiderano rendersi conto di quali siano le idee direttrici del grande movimento analitico moderno; agli uni ed agli altri esso indicherà quali siano i problemi che ancora restano a risolversi nelle teorie già fondate e qual ne sia l'importanza, onde è presumibile serva di incentivo ad investigazioni future. Le tre conferenze di cui consta trattano rispettivamente: 1.° Dell'estensione che ricevettero alcune nozioni matematiche ed in particolare l'idea di funzione in quest'ultimo secolo, 2.° Di alcune vedute generali sulla teoria delle equazioni differenziali, 3.° Della teoria delle funzioni analitiche e di alcune funzioni speciali. Dell'ampiezza di vedute dell'autore e dello spirito moderno che informa la sua opera fanno fede le seguenti sagge parole, con cui finisce il volume e con cui noi chiudiamo questo annuncio.

« Noi abbiamo gettato un rapido sguardo sopra qualcuno dei rami della Scienza matematica. Voi avete potuto vedere più di una volta l'imbarazzo in cui io mi sono trovato, quando volli, per le esigenze della mia esposizione, fare una classificazione in certe teorie. La compenetrazione reciproca delle varie discipline è oggi effettivamente un fatto capitale e diverrà sempre più la fonte di scoperte importanti. In questo riguardo vi è una grande differenza tra l'opera nostra ed i tempi un po' anteriori. Noi proviamo fatica oggi a comprendere certe storie ove si vedono dei geometri sprezzare gli analisti o viceversa; noi sentiamo che è finita per sempre l'èra delle scuole chiuse e attaccate strettamente ad un unico punto di vista. È assai verosimile che l'erudizione rappresenti in avvenire in Matematica una parte più importante che in passato. I matematici perderanno forse quel privilegio della precocità, che meraviglia tanta gente; essi si accosteranno ai fisici ed ai naturalisti, che devono in generale cominciare più tardi i loro lavori personali. Finendo mi si permetterà di dare un consiglio agli studenti di matematica che mi fecero l'onore di ascoltarmi; raccomanderò loro di non rincantucciarsi troppo presto nelle ricerche speciali. A loro è necessario di acquistare dapprima delle vedute generali sopra le varie parti della nostra scienza; senza le quali le loro ricerche rischierebbero di rimanere sterili e che più tardi costerebbero loro uno sforzo assai più grande ». G. L.

Riassunto delle Conferenze su l'Algebra e la Geometria quali teorie deduttive, tenute dal Prof. ALESSANDRO PADOA *nella R. Università di Roma l'anno* 1900. (litografato) pag. 60.

L' A. applica i concetti ed i metodi proprî alla logica matematica nella forma sotto cui li ha presentati il Prof. Peano. Nell'*Introduzione* egli espone le generalità da usarsi e quindi si volge ad applicarle all' Algebra. L' applicazione alla Geometria è riserbata ad una futura II. Parte. G. L.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen. Herausgegeben von Prof. D. H. BURKHARDT *und* Prof. D. W. FRANZ MEYER. Leipzig., Teubner.

V. Bollettino, III. 1900, p. 52.

I Band. 5es Heft. (1900. Prezzo Mk. 6,40). O. Hölder. *Galois'sche Theorie mit Anwendungen* (continuazione e fine). — E. Netto *und* K. T. Vahlen. *Gleichungssysteme.* — A. Wiman. *Endliche Gruppen linearer Substitutionen.* — P. Bachmann. *Niedere Zahlentheorie.* — K. T. Vahlen. *Arithmetische Theorie der Formen.* — P. Bachmann. *Analytische Zahlentheorie.* — D. Hilbert. *Theorie der algebraischen Zahlkörper.* — D. Hilbert. *Theorie des Kreiskörpers.* — G. Landsberg. *Arithmetische Theorie algebaischer Grössen.* — H. Weber. *Komplexe Multiplikation.*

II Band. 4es Heft (1900. Mk. 4,80). L. Maurer und H. Burkhardt, *Kontinuirliche Transformationsgruppen.* — M. Bôcher. *Randwertaufgaben bei gewönlichen Differentialgleichungen.* — H. Burkhardt und W. Franz Meyer. *Potentialtheorie* (*Theorie der Laplace-Poisson'schen Differentialgleichung*). — A. Sommerfeld. *Randwertaufgaben in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen.*

Lezioni sulla Teoria delle Funzioni ellittiche tenute nella R. Università di Messina dal Prof. GIULIO VIVANTI *e raccolte dagli studenti.* Corso dell'anno 1899-1900. Messina, Libreria Trimarchi. Litogr. p. 313, 8.° [Prezzo L. 10].

Cenno storico.

Parte I. *Teoria generale delle funzioni analitiche* (*sunto*). Serie di potenze. Serie dedotte. Funzione analitica secondo Weierstrass.

Contegno di una funzione nell'intorno di un punto di singolarità essenziale. Classificazione delle funzioni analitiche. Funzioni con soli poli. Funzioni intere. Funzioni con una sola singolarità essenziale a distanza finita. Funzioni con un numero infinito di punti singolari.

Parte II. *Funzioni ellittiche*. Le funzioni σ, ξ, p. Rappresentazione della funzione σ con un prodotto semplicemente infinito. Definizione e proprietà delle funzioni ellittiche. Espressione generale di una funzione ellittica mediante le caratteristiche dei poli. Proprietà della funzione p. Degenerazione delle funzioni ellittiche. Altre funzioni ausiliari. Funzioni θ di Jacobi. Variazioni delle θ per l'aumento di un semiperiodo all'argomento. Variazioni delle θ per l'aumento di un periodo all'argomento. Valori delle θ per valori speciali dell'argomento. Formole varie. Funzioni ellittiche di Jacobi. L'integrale ellittico di 2.ª specie. Integrali ellittici di 3.ª specie.

Parte III. *Trasformazione delle funzioni ellittiche*. Preliminari. Studio della trasformazione razionale. Studio della trasformazione generatrice P. Studio della trasformazione Q. Trasformazione di Landen; applicazione di essa al calcolo dell'integrale completo K. Moltiplicazione e divisione delle funzioni ellittiche.

NOTIZIE

Un grande giornale di storia delle matematiche era un *desideratum* di tutti coloro che si dedicano a questa materia, sin da quando nel 1887, per un concorso di circostanze che non giova ricordare, il *Bullettino di Biblografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche* del Principe Boncompagni cessò le sue pubblicazioni. Questo desiderio sta per essere soddisfatto grazie al nuovo piano con cui uscirà la *Bibliotheca mathematica* a partire dal I Vol. della sua terza serie, grazie all'accordo intervenuto fra il direttore di quel periodico, Signor G. Eneström, e la Casa Teubner, tanto benemerita per le scienze esatte (1).

Dal fascicolo (doppio) che vide la luce il 30 Aprile u. s. si apprende che ogni puntata del nuovo giornale comprenderà una serie di articoli originali (distribuiti in ordine cronologico degli argomenti ivi svolti), poi le necrologie di scienziati morti di recente, indi notizie relative a corsi di lezioni sopra la storia delle matematiche e sopra le maggiori imprese bibliografiche in corso di esecuzione. Notevole e

(1) Il prezzo di ogni volume, di circa 35 fogli in 8.° gr. è di 20 Mk.

assai ben intesa una rubrica contenente picoole osservazioni sopra la seconda edizione delle *Vorlesungen* di M. Cantor. Ad essa tengono dietro finalmente un elenco di recenti pubblicazioni e una breve cronaca scientifica.

Augurando al al nuovo periodico di corrispondere sempre alle aspettative in esso riferite, presentiamo qui l' indice del fascicolo sinora pubblicato:

Ziele und Aufgaben eines Organs für mathematisch-historiche Forschung und für aktuelle Fragen auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. Von G. Eneström.

Die Pythagorischen Reihen der Seiten und Diagonalen von Quadraten und ihre Umbildung zu einer Doppelreihe ganzer Zahlen. Von F. Hultsch.

Archimedes' Ephodikòn. Von W. Schmidt.

Archimède connaissait-il le paradoxe hydrostatique? Par P. Duhem.

Note sur la trigonométrie de l'antiqutié. Par H. G. Zeuthen.

Notice sur un manuscrit arabe traitant de machines attribuées à Héron, Philon et Archiméde. Par Carra de Vaux.

Notes sur la Pseudo-Géometrie de Boëce. Par P. Tannery.

Zwei Beiträge zur Geschichte der Physik im Mittelalter. Von M. Curtze.

Sur quelques niveaux du seizième siècle. Par F. Kucharzewski.

Die Entwickelung der Zeichen- und Formelsprache in der Trigonometrie. Von A. von Braunmühl.

Le ricerche inedite di Evangelista Torricelli sopra la curva logaritmica. Di G. Loria.

Notiz zur Geschichte der Simpsonschen Regel. Von G. Heinrich.

Les " Œuvres Complètes de Christiaan Huygens „. Par J. Bosscha.

La solution de Christiaan Huygens du problème de la chaînette. Par D. J. Korteweg.

Integration durch imaginäres Gebiet. Ein Beitrag zur Geschichte der Funktionen-Theorie. Von P. Stäckel.

Zur Biographie von Jacob Steiner. Von E. Lampe.

Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den natürlichen Koordinaten. Von E. Wölffing.

Lista bibliografica della teoria degli aggregati 1892-1899. Di G. Vivanti.

Sophus Lie. Ausführliches Verzeichniv seiner Schriften, zusammengestellt von F. Engel in Leipzig. Mit Bildnis in Heliogravüre als Titelbild (1).

(1) Questo scritto venne poi pubblicato a parte (Leipzig, Teubner 1900; 8.° gr.; p. 40. Prezzo Mk. 2).

Carl Immanuel Gerhardt. Von Felix Müller in Loschwitz. Mit Bildnis.

Ferdinand Rosenberger. Von S. Günther in München. Mit Bildnis.

Kurze Nekrologie: H. E. Wappler. Von G. Eneström. L. G. Gascò. Von A. Gutzmer.

Zum siebenzigsten Geburtstage Moritz Cantors. Von M. Curtze in Thorn.

Programme du cours d'histoire des mathématiques de l'université de Gand. Par P. Mansion.

Die Vorarbeiten für die allgemeine mathematische Bibliographie. Von G. Valentin.

Sur l'état d'avancement du répertoire bibliographique des sciences mathématiques. Par C. A. Laisant.

Uber die geplante internationale naturwissenschaftliche Bibliographie. Von J. H. Graf.

Mathematiker-Versammlungen im Jahre 1899.

Le congrés international des mathématiciens à Paris, 1900. Par J. Boyer.

Le congrés d'histoire des sciences à Paris, 1900. Par G. Eneström.

Kleine Bemerkungen zur 2. Auflage von Cantors Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Von P. Tannery, G. Eneström, H. G. Zeuthen, A. von Braunmühl.

Vermischte historische Notizen. Von M. Steinschneider, G. Eneström.

Anfragen. Von G. Eneström, G. Valentin, J. G. Hagen, P. Stäckel.

Recensionen.

Neu erschienene Schriften.

Wissenschaftliche Chronik.

*
* *

Maurolico e l'Università di Messina. — Per solennizzare il 350.º anniversario dell'Università di Messina, i professori dell'Università stessa hanno pubblicato un grosso volume in 4.º contenente varie monografie relative alla storia dell'Ateneo messinese, ed un altro simile volume è stato pubblicato dalla R. Accademia peloritana. Ambi i volumi portano il titolo: « CCCL anniversario dell'Università di Messina ». Nel secondo si legge (p.15-41) un lavoro di L. Perroni-Grande intitolato: *F. Maurolico professore dell'Università messinese e dantista*, il quale contiene un documento ufficiale comprovante in modo indiscutibile (contro l'opinione del Macri ed altri) che il Maurolico fu professore nell'Università di Messina. È un atto notarile in data 9 novembre 1569, approvato dal viceré il successivo 17 gennaio 1570, col quale il Senato di Messina nomina il Maurolico professore di matematica (geometria, aritmetica speculativa, astrologia, musica speculativa, prospettiva, ed ogni altra così attinente alla matematica) nell' Università, coll' obbligo d' impartire 4 lezioni per settimana, e collo stipendio annuo di onze 40 (pari a L. 510). L' esistenza di questo documento si trova notata nel *Sommario storico documentato nel Collegio e della Università degli studi di Messina, di anonimo gesuita,* pubblicato per cura del prof. G. Tropea nel primo dei due volumi accennati (p. 37-122, o in particolare p. 61 — dove per errore si legge 1559 invece di 1569 — e 118).

*
* *

SECONDO CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI. — A questa riunione che ebbe luogo a Parigi nei giorni 6-12 Agosto di quest' anno presero parte circa 250 scienziati. L'ufficio generale di presidenza venne così costituito: *Presidente-onorario* Hermite, *Presidente effettivo:* Poincaré, *Vice-Presibenti:* Czuber, Gordan, Greenhill, Lindeloef, Lindemann, Mittag-Leffler, Moore, Tikhomandritzky, Volterra, Zeuthen. *Segretario generale:* Duporc; *Segretarii:* Bendixson, Capelli, Minkowski, Ptaszycki, Whitehead. Delle varie sezioni gli uffici di presidenza furono invece composti come segue: I (Aritmetica ed Algebra) Hilbert *pres.*, Cartan *segr.* II. (Analisi) Painlevé, Hadamard. III. (Geometria) Darboux, Niewenglowski. IV. (Meccanica) Larmor, Levi-Civita. V. (Bibliografia e storia) Principe R. Bonaparte, d'Ocagne. VI. (Insegnamento e metodo) Cantor, Laisant.

Il terzo Congresso verrà tenuto in Germania (forse a Baden-Baden) nel 1904.

*
* *

UN NUOVO DOCUMENTO CONCERNENTE LA MATEMATICA MEDIOEVALE. — Il Vol. XXXVI delle *Notices et Extraits des manuscrits de la Bibliothéque nationale et autres Bibliothéques,* contiene, fra l'altro, *Une corréspondance d'écolâtre du XI Siécle* pubblicata dall'Abbate Clerval con una dotta introduzione di P. Tannery. L' interesse che presenta questa pubblicazione è duplice. Da essa si trae anzitutto la prova che verso l'anno 1025 gli scolastici erano, in fatto di cognizioni geometriche, non superiori ai Greci anteriori a Pitagora, onde è certo che Gerberto non era riuscito a stabilire alla fine del Sec. X un insegnamento della Geometria. In secondo luogo essa somministra dei nuovi documenti, concernenti la *Geometria* di Boezio, dei quali dovranno tenere gran conto coloro che in avvenire si occuperanno di una questione che, malgrado gli studî che ha provocati, sembra ancora assai lontana da una soluzione soddisfacente per tutti.

*
* *

RAFFAELE CAVERNI, di cui è recente la perdita deploratissima, nacque nel Marzo del 1837 a S. Quirico, borgo vicino a Montelupo sulla strada che va da Empoli a Pisa. Fin da giovinetto vestì l'abito clericale e, dopo di avere insegnato Teologia e Matematica nel Seminario di Firenzuola (nella Romagna Toscana), gli fu conferita la parrocchia di S. Bartolomeo, distante tre miglia da Firenze. Nelle ore libere frequentava la Biblioteca nazionale di codesta città e poi componeva articoli per riviste ed opere a parte; fra le quali ricorderemo i *Problemi naturali di Galileo Galilei e di altri autori della* *sua scuola* (Firenze, 1876), *Voci e modi nella Divina Commedia dell' uso popolare* (Id. 1877), *Dei nuovi studi della filosofia* (Id. Ib.), *Dell' antichitàdell' uomo* (Id. 1881), *Un' estate in montagna* (Id. 1884), *Fra il verde e i fiori* (Id. 1885), *Con gli occhi per terra* (Id. 1888).

Ma il suo lavoro capitale è rappresentato dai cinque poderosi volumi formanti la *Storia del metodo sperimentale in Italia*, colla quale il Caverni si fece conoscere da tutto mondo scientifico e col quale egli si sarebbe assicurato un posto eminente fra gli storici della scienza, ove preconcetti di scuola non avessero troppo spesso ottenebrato in lui il retto giudizio, sì da fargli perdere la precipua dote di uno storico, cioè l' imparzialità.

Morì il 30 Gennaio di quest' anno, fra il compianto universale (1).

*
* *

L' Accademia Pontaniana di Napoli ha proposto come tema al premio Tenore pel prossimo anno una *Esposizione elementare dei principii del Disegno assonometrico con applicazioni alle Arti.* Premio L. 510. I lavori dei concorrenti devono farsi pervenire anonimi al Segretario generale dell' Accademia non più tardi del 31 Marzo 1901.

*
* *

Alcune pubblicazioni recenti sulla storia della matematica. Heiberg, *Quelques papyrus traitant de mathématiques* (Bull. de l'Acad. des Sciences et de Lettres de Danemark, 1900).

M. Cantor, *Carl Friedrich Gauss. Vortrag gehalten am 14 November 1899 in Heidelberg* (Neue Heidelberger Jahrbücher, 1900).

F. Hultsch. *Hipparchos über die Grösse und Entfernung der Sonne* (Ber. der k. Sächs. Ges der Wissensch, 1900).

G. Loria. *Le scienze esatte nell' antica Grecia.* Libro III. *Il substrato matematico della filosofia naturale dei Greci* [I. Ipotesi cosmologiche e misurazioni astronomiche anteriori ad Ipparco. II. La Sferica. III. L' apogeo dell' Astronomia greca. IV. Gli albori della Fisica matematica. V. Erone d' Alessandria. VI. I geodeti minori]. — Libro IV. *Il periodo argenteo della geometria greca* [I. Gemino. II. Teone da Smirne. III. Pappo d' Alessandria. IV. Il Neo-Platonismo. Proclo, Marino, Simplicio. V. Eutocio. VI. Sereno]. (Mem. della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, 2.ª Serie, Vol. XII) (2).

*
* *

L' Enciclopedia delle Scienze matematiche pure ed applicate, di cui i lettori del *Bollettino* seguono la pubblicazione nell' originale tedesco, sta per essere tradotta in francese per cura del Prof. Molk dell' Università di Nancy e verrà pubblicata dalla Casa Gauthier-Villars di Parigi.

*
* *

Giubileo di G. V. Schiaparelli. — Compiendo quarant' anni dal giorno in cui il celebre astronomo entrò nell' Osservatorio di Brera, un gruppo numeroso di ammiratori e discepoli pubblicò un elegante volume intitolato *All' astronomo G. V. Schiaparelli. Omaggio 30*

(1) Notizie gentilmente fornite dal Prof. G. Bellacchi.
(2) Gli estratti si trovano in vendita presso la Libreria C. Clausen, Torino.

Giugno 1860 — 30 Giugno 1900, ove è esposta cronologicamente la serie delle sue scoperte. Segue un elenco bibliografico delle sue opere a stampa. Siamo certi che l'illustre scienziato, che è tuttora in prima linea nell'esercito militante per la conquista del vero, aggiungerà molti nuovi elementi a quella serie ed a questo elenco.

* * *

Tema proposto dall'Accademia delle Scienze di Berlino. - Sia $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., $f_n(z)$ un sistema fondamentale d'integrali di una equazione differenziale lineare omogenea e coefficienti algebrici. Si domanda di studiare la funzione z delle variabili $\frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_1}, \ldots, \frac{u_n}{u_n}$

$$u_1 f_1(z) + u_2 f_2(z) + \ldots + u_n f_n(z) = 0.$$

In particolare si chiede di dare una rappresentazione di quella funzione di z nel caso in cui essa non prenda che un numero finito di valori per dati valori delle variabili. Si cercherà anche in quale misura queste funzioni particolari di z possano essere utilizzate nell'integrazione delle equazioni differenziali lineari dell' n^{mo} ordine.

Premio 5000 marchi. I lavori dei concorrenti possono essere scritti in tedesco, latino, francese, inglese od italiano, e devono venire presentati prima della fine dell'anno 1901.

* * *

Reinhold Hoppe, o con maggiore precisione, Ernst Reinhold (Reginhald) Edmund Hoppe, nacque il 16 Novembre 1816 a Naumburg a. S., sesto degli undici figli che ebbe Ernst August Dankegott Hoppe, predicatore del duomo. A diciannove anni egli rimase orfano di padre e madre. Compiuti il 30 Agosto 1838 gli studi secondari, frequentò successivamente le Università di Kiel (due semestri), Greifswald (due semestri) e Berlino (tre semestri), ove il 24 Marzo 1842 ottenne il certificato di maturità. Il 25 Novembre 1850 conseguì a Halle la dignità dottorale e tre anni dopo fu abilitato alla libera docenza presso l'Università di Berlino. Riusciti infelicemente parecchi tentativi da lui fatti per dedicarsi all'insegnamento secondario (al quale sembra fosse contraria la sua indole), nel 1859 egli cominciò ad esercitare a Berlino il suo diritto di insegnare in quell'Ateneo, e come libero docente si spense il 7 Giugno 1900. Dal 1872 dirigeva l'*Archiv für Mathematik und Physik* fondato dal Grunert. In questo egli pubblicò gran parte (200 circa) dei 250 articoli a cui circa si fa ascendere il numero delle sue memorie. Gli argomenti da lui trattati si può dire che abbracciano tutta la Matematica; così al Calcolo infinitesimale egli contribuì con importanti ricerche sopra il calcolo delle derivate superiori delle funzioni e con osservazioni concernenti i fondamenti del calcolo differenziale; alla Geometria differenziale delle curve e superficie egli diede dei contributi che sembrano destinati a rimanere: anche la Geometria (analitica) a più dimensioni attrasse più volte la sua attenzione; e così dicasi per la Meccanica analitica e la Fisica matematica.

Chi desidera completare questi dati e conoscere non solo Hoppe *matematico*, ma anche Hoppe *filosofo* e *filologo*, non solo il pensatore ma anche l'uomo, ricorra alla bella necrologia che ne pubblicò il Prof. E. Lampe nelle *Verhandlungen der Deutschen physikalischen Gesellschaft* (II Jahrg. 1900).

*
* *

Una nuova lingua internazionale. — Una questione proposta di recente in *L'intermédiaire des mathématiciens* ha offerto una propizia occasione al Sig. C. Méray per dare alcune interessanti notizie sopra una nuova lingua internazionale; il nome dell'illustre scienziato che se ne è fatto apostolo è garanzia della serietà di questo recente tentativo di soddisiare un antico desiderio; siccome a questo non può rimanere estraneo un giornale, come il *Bollettiuo*, avente per cômpito di promuove o facilitare il movimento delle idee, così crediamo opportuno riprodurre qui tradotto il breve articolo dell'eminente professore dell'Università di Digione:

« Esiste una lingua artificiale, chiamata *Esperanto*, ed i suoi adepti, già in numero considerevole, si moltiplicano ogni giorno più rapidamente.

Ne è autore un medico russo, il Dott. Zamenhof, di Varsavia, la cui prima pubblicazione sull'argomento apparve nel 1887, con la firma pseudonima *Doktoro Esperanto* (il dottore Sperante), costituita con nomi tolti a quella lingua; da ciò il nome che essa ha preso e conservato.

Lo scopo dell'Esperanto si confonde con quello del Volapuk, altra lingua artificiale, proposta nel 1879, e di cui il ricordo non è ancora perduto. Gli autori dell'una e dell'altra si sono proposti di porre, *accanto* alle lingue naturali, *uno stesso* idioma abbastanza *facile* da praticare per potere essere adoperato da *tutti gli uomini* (almeno di civiltà europea) per lo scambio *internazionale* delle loro idee. Ma nei risultati, come nella esecuzione, tutto è differente nelle due lingue. Il Volapuk ha goduto in principio di un favore senza precedenti, perchè prometteva soddisfazione ad un bisogno la cui urgenza era divenuta estrema; ma quasi subito fù lasciato perchè si vide che gravi difetti lo rendevano incapace di mantenere le sue promesse. Invece l'Esperanto ha dovuto sostenere la lotta più penosa (che non è totalmente finita) contro lo scredito profondo che la clamorosa caduta del Volapuk aveva a torto gettato su qualunque lingua avente le pretese di rappresentare una parte internazionale; ma finalmente è riuscito vincitore, ed ora la sua area di diffusione non cessa di allargarsi, perchè, sia esaminata in sè stessa, sia messa alle prova mille volte in pratica, il suo valore non si è mai dimostrato inferiore all'ampiezza delle sue vedute.

Una straordinaria facilità è il merito più cospicuo, perchè più importante, dell'Esperanto. *A priori* essa sembra incredibile, tanto l'imperfezione delle lingue naturali, impastate pezzo per pezzo ed a caso da gruppi di uomini privi di coltura intellettuale, senza previdenza, senza riflessione, ha radicata in noi l'illusione che, all'infuori della lingua materna, qnalunque altra è di difficile assimilazione; ma essa non può non saltare agli occhi, appena che questi si fissino sulle prime linee dell'Esperanto. Per esempio, avendo appresa nello scorso febbraio l'esistenza dell'Esperanto ed avendolo esaminato per curosità, io non ho impiegate che *tre settimane* a leggere come il francese (o poco meno), anzi a scriverne il mio *primo* brano, e questo era abbastanza passabile, giacchè, dopo avere subite alcune piccolissime correzioni, potè trovare posto in un giornale esperantista. Attualmente, a meno di qualche inevitabile incertezza nelle prime pagine, io mi sentirei in grado di scrivere una Memoria scientifica in Esperanto intelligibile, e di parlare un po' questa lingua, dopo una settimana o due di esercizì orali.

Questa facilità, senza paragone con quella che presentano le lingue straniere più accessibili (non escluso il latino ecclesiastico o scientifico), è stata ottenuta mediante la riduzione della grammatica e delle regole così brevi e così poco numerose, che è necessario *meno di una giornata e mezza o due* di studio per impossessarsene a fondo, mediante la scelta fatta *esclusivamente*, pel vocabolario, di elementi linguistici *già comuni* a parecchi idiomi europei, preferendo sempre quelli il cui carattere *internazionale* era più spiccato.

I risultati dell'esperienza personale testè riferita, essendo evidentemente assicurati a qualche persona che siasi dedicata a lavori intellettuali, per conto mio è certo che gli scienziati di tutti i paesi *non hanno più che da volerlo un po'*, ma collettivamente, s'intende, per avere a propria disposizione, nell' Esperanto, un veicolo internazionale delle loro idee, comodo circa quanto lo sono le loro lingue materne, e sicuro come se queste fossero comprese ovunque. L'Esperanto manca ancora dei termini tecnici speciali alle Scienze matematiche e alle altre, ma è chiaro che è possibile fornirglieli istantaneamente.

Concluderò con questi voti precisi,

1.° Che siano costruiti dei Vocabolari matematici ecc. in Esperanto per cura del Dott. Zamenhof, creatore e legislatore predestinato della lingua (o per cura di esperantisti da lui scelti), di scienziati specialisti la cui aggregazione sembra indispensabile; ognuno di siffatti Vocabolarì dovrebbe essere pubblicato a parte in una raccolta di analoga specialità destinato possibilmente ad una clientela europea; tutti dovrebbero essere fusi in un volume unico dal titolo *Dizionario universale della lingua internazionale Esperanto.*

2.° Che per condurre gradatamente il pubblico scientifico alla comunanza dell'Esperanto, e poi alla pratica di esso, le Riviste ne inaugurino l'uso nella redazione dei brevi articoli di *Cronaca* che possono intesessare gli stranieri.

Io avevo segnalato l' *Esperanto* all'attenzione degli scieuziati, mediante una lettera speciale, che venne pubblicata dalla *Revue générale des Sciences pures et appliquées* nel suo numero del 15 Aprile u. s.; ivi si troveranno maggiori particolari e indicazioni pratiche. Coloro che volessero spingersi più oltre non avranno che da dirigersi alla *Societé pour la propagande de l' Esperanto*, la quale ha per presidente il Sig. de Beaufront (Paris, Rue Marbeuf 2) e per segretario economico il Sig. René Lemaire (Epernay, Marne, France) » (1).

(1) Più minuti particolari sopra la nuova lingua si trovano in uno scritto posteriore ed ancora più interessante del Sig. Méray (L'« *Esperanto, langue auxiliaire artificielle de M. le Dr. Zamenhof*, in *L'enseignement mathématique* del 15 Luglio 1900).

Marco Bertolone, Direttore-Gerente

Genova - Tipografia R. Istituto Sordo-muti - 1900.

INDICE DEI NOMI

INDICE

RECENSIONI ED ANNUNZI.

PROGRAMMI E RIASSUNTI

DI CORSI UNIVERSITARI.

Università di Pisa: Corso di fisica matematica [Prof. G. A. Maggi], p. 88-92

NECROLOGIO.

Eugenio Beltrami di E. d'Ovidio, p. 52, 57. — Elenco delle pubblicazioni di E. Beltrami [G. L.], p. 57-62.

NOTIZIE.

I premî dell'Istituto di Francia. — Tema proposto dall'Accademia di Madrid. — Un centenario. — Due congressi. — Tema proposto dall'Istituto Lombardo, pag. 30-32.

Le opere di Gauss. — Gascò e Gerhardt. — Pietro d'Abano. — Tema d'astronomia proposto dall'Accademia Danese, pag. 62-64.

Kepler e Newton. — Per favorire le ricerche sul Calcolo geometrico. — Un vocabolario matematico Francese-tedesco e Tedesco-francese, pag. 92.

Un grande giornale di storia delle matematiche. — Maurolico e L'università di Messina. — Secondo congresso internazionale dei matematici. — Un nuovo documento concernente la matematica medioevale. — Raffaele Caverni. — Premio proposto dall'Accademia Pontaniana. — Alcune pubblicazioni recenti sulla storia della matematica. — L'Enciclopedia delle Scienze matematiche. — Giubileo di G. V. Schiaparelli. — Tema proposto dall'Accademia di Berlino. — R. Hoppe. — Una nuova lingua internazionale, pag. 121-127.

BOLLETTINO

DI

BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA

DI

GINO LORIA

ANNO IV.

1901

TORINO

CARLO CLAUSEN

LIBRAIO DELLE LL. MM. IL RE E LA REGINA

1901

Genova -- Tipografia Sordomuti.

INDICE DEI NOMI

INDICE

RECENSIONI ED ANNUNZI.

GENNAIO, FEBBRAIO E MARZO 1901.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA

E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. **6**, per l'estero Fr. **7.50**. Numeri separati L. **2** caduno. — Gli articoli da inserirsi simandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

SUI PRIMI ANNI DI GIUSEPPE LUIGI LAGRANGE.

Nota di GIOVANNI VACCA, *in Torino.*

Il vivo desiderio, che anima più d'ogni altra la generazione nostra, di penetrare nella vita intellettuale degli uomini che hanno accresciuto il patrimonio scientifico della società umana, studiando lo svolgersi ed il perfezionarsi delle loro idee (ed è forse il migliore omaggio che possiamo rendere alla loro memoria), mi ha spinto a scrivere alcune notizie su Lagrange poco note, forse inedite, nella speranza che altri possa completarle.

Le numerose biografie (1) di Lagrange sono tutte molto concise, per quanto riguarda il primo decennio della sua vita scientifica (1755-1766) da lui vissuta in Torino.

Non appare ben chiaro da esse, la materia del corso da lui professato e la data della sua nomina alla Scuola di Artiglieria.

In seguito a ricerche da me fatte all'Archivio di Guerra e Marina,

(1) Un elenco pressochè completo delle biografie di Lagrange, una ventina circa. si trova nella Bibl. Matematica Italiana di P. Riccardi, a. 1893.

recentemente riordinato e tuttora diretto dall' egregio Cav. Giulio Binda, al quale mi è grato porgere qui i miei più vivi ringraziamenti, ho potuto trovare l' atto del 26 Settembre 1755 che nominava Lagrange a *sostituito* del Maestro di matematica nelle scuole di Teorica di Artiglieria (1).

Il maestro di Matematica era un certo Carlo Andrea Rana.

Guidato poi da certe indicazioni date da Alexandre Saluces nella sua Histoire Militaire du Piémont (2), ho potuto, grazie alla cortesia

(1) L' atto si trova nella Trascr. della Coll. degli Atti autentici per l'uff. Generale del Soldo. Sta a fol. 61 v. e 62 r. di un registro intitolato: *Commissioni da* 11 Agosto 1755 *a* 3 Marzo 1757. Lo riporto intero:

Torino li 26 Settembre 1755.

Il Re.

Li incontri che abbiamo avuti dell' abilità, che Luiggi la Grangia Tornier di Torino si è acquistata nelle matematiche, del Talento che ha per vieppiù riuscire in esse, e delle altre buone qualità, che in Lui concorrono, Ci hanno disposti a destinarlo all' impiego di sostituito del Maestro di Matematica nelle Scuole di Teorica d'Artiglieria, il quale viene di rendersi vacante per la promozione di Carlo Andrea Rana al posto di Maestro persuasi che si darà tutto lo studio per riempirne lodevolmente i doveri, e per corrispondere alle nostre Grazie, ed all' aspettativa di Lui conceputasi. Colle presenti pertanto conferiamo al d.° Luiggi La Grangia Tournier l' Impiego di Sostituito del maestro di Matematica suddetto con tutti gli onori, autorità e prerogative, che ne spettano, ed appartengono e con l'annua paga di Lire settecento cinquanta di Piemonte, con ciò che debba osservare le Istruzioni, che gli verranno date dal Direttore di d.e scuole; Ordiniamo quindi allo stesso Direttore, di farlo riconoscere in tale qualità, ed all' Intendenza Generale di detta Artiglieria di farlo gioire dell' annua paga sud.a di f. 750 a Quartieri maturati sulli certificati, che da D.° Direttore o da chi nei casi d' absenza o d' impedimento d' esso verrà da Noi nominato per supplirne le veci, saranno di tempo in tempo spediti, d' aver Egli adempiuto al suo Obbligo nella conformità prescritta dal Regolamento per dette scuole de' 16 Aprile 1739 e dell' add.e al med.mo de' 16 Luglio ultimo, incominciando dalla data delle presenti, e continuando in avvenire durante la di lui servitù, ed il nostro beneplacito, che tal è la nostra mente. Dato etc.

(2) Deuxiéme édition t. I, Turin a. 1859.

Da quest' opera estraggo alcune notizie sugli studi che si facevano alla Scuola d'Artiglieria. Vi erano cinque anni di scuola comune a tutti gli allievi, durante i quali si studiavano l'aritmetica, l' algebra, la geométria piana e solida, le sezioni coniche, la stereometria, la meccanica, la balistica.

Seguivano due anni di corsi speciali per gli allievi distinti all' artiglieria ed al genio.

A p. 441 alla nota E, dovuta a Mariano D' Ayala, si trova descritta minutamente l' opera a cui accenno.

A p. 443 il Saluces riporta il passo seguente di Prospero Balbo: « La meccanica era insegnata nelle Scuole d' Artiglieria dal nostro Lagrangia: ed oggi ancora (1804) nella libreria che fu già di quelle scuole, come presso di quei discepoli, esistono manoscritte le lezioni dettate e spiegate nel 1758 e 1759 da quel giovane professore ». Vane furono le nostre ricerche, aggiunge il Saluces, per ritrovare queste lezioni.

Mi permetto qui una breve digressione. Da quanto precede appare che l' attuale R. Accademia Militare trova le sue origini, se non burocratiche, certo naturali, nella scuola di Artiglieria, fondata nel 1739 e riordinata nel 1755, anzichè in quel collegio di cadetti così vivamente descritto da V. Alfieri nella sua autobiografia, come si crede abitualmente.

Si veda p. es.:

F. L. Rogier. La R. Accademia militare, Note storiche, 1816-1860. Torino a. 1895.

del colonnello Zanotti-Bianco che dirige la Biblioteca del Duca di Genova, consultare un manoscritto inedito (1), che non è di mano del Lagrange (2), riassunto di un corso di Lezioni di Analisi infinitesimale, svolte assai probabilmente dal Lagrange, alla Scuola di Artiglieria.

È intitolato:

Principî di analisi sublime (dettati da La Grange alle Reggie Scuole di Artiglieria).

Consta di 115 fogli numerati. Esso contiene:

(fol. 4) Della teoria algebrica delle curve.

(fol. 55) Parte Seconda. Del calcolo diffierenziale ed integrale. Dalle parole che terminano il manoscritto si vede che queste lezioni formano una breve introduzione al corso di meccanica (fol. 115).

L' interesse principale che presenta questo manoscritto sta in ciò che esso costituisce, insieme alla nota lettera al Fagnano, tuttociò che Lagrange scrisse in lingua italiana (3); sebbene poi non manchi di

---

(1) Lo credo inedito, sebbene il prof. Zanotti Bianco mi abbia avvertito che già parecchi anni or sono, di quest' opera attribuita a Lagrange era stata fatta una copia per conto del Boncompagni.

(2) Come è evidente da diversi errori e lacune propri di un copista (p. es. a foglio 93 v., 94 r., 102, 103 v. etc.), oltrechè non presenta analogia colla scrittura ben nota di Lagrange.

(3) Rimangono ancora alcune altre lettere di minore interesse. Sarebbe assai interessante il sapere se altri manoscritti in lingua italiana si trovino tra quelli conservati nella Bibliothèque de l'Institut a Parigi e descritti nell' edizione francese, pubblicata dal Serret e dal Darboux, t. 14 a. 1892 p. X-XII.

Ed a proposito di questa edizione, ardisco esprimere il voto che si proceda ad una revisione del rapporto fatto da Legendre, Prony, Poisson e Lacroix il 3 Novembre 1817, che concludeva alla non pubblicazione dei manoscritti inediti di Lagrange, per la ragione che « le respect dû à la mémoire de M. Lagrange ne permettait pas qu'on livrât à l'impression des écrits trop inférieurs à ceux qui avaient paru de son vivant ». (Lagrange, *Oeuvres* t. 12 p. 387).

Questa considerazione, dopo un secolo, ha perduto molta importanza. Non è infatti chi non veda quale importanza abbia avuto per la scienza la pubblicazione dellé opere frammentarie (per accennare di alcuni) di Leonardo da Vinci, di Leibniz, fino all' VIII volume delle opere di Gauss, testè pubblicato.

Senza voler diminuire poi il merito degli editori delle opere di Lagrange, è da osservarsi che l' edizione francese non è condotta con quella scrupolosa precisione e fedeltà che sono vanto indiscutibile delle opere di Huygens, di Galileo e di Descartes ora in corso di pubblicazione.

Questa scrupolosità non è oziosa. Alcune cose che in una certa epoca possono parere insignificanti ad un editore, possono acquistare importanza in tempi posteriori.

Così p. es. nella Théorie des fonct. analyt. (t. 9 delle opere di Lagrange) l' editore ha scritto f(x) ovunque Lagrange scriveva fx. Quest' ultima notazione più conveniente in molti casi (essa è adottata nel Formulaire de Mathématiques, Turin a. 1901), può, sebbene non risulti dalla ediz. francese, valersi dell'autorità di Lagrange.

Inoltre non é fatto un raffronto delle diverse edizioni delle opere di Lagrange, cosa importante quando si voglia stabilire la priorità di Lagrange nella scoperta di parecchi teoremi (p. e. sulla formola di Taylor).

pregio per la semplicità e la chiarezza dell' esposizione dei principî del calcolo (1).

Non intendo aggiungere altre indicazioni sul soggiorno di Lagrange a Torino.

Non posso però terminare senza pensare alle dolorose ragioni che spinserò Lagrange ad abbandonare la patria.

Mentre Lagrange nel 1756, cioè alcuni mesi dopo la sua nomina alle scuole di artiglieria rifiutava di partire da Torino, sperando egli di poter proseguire negli studi senza abbandonare la patria e la famiglia (2), dieci anni dopo scriveva a D'Alembert che gli offriva di andare a Berlino al posto lasciato vacante da Eulero (3). « Rien ne serait plus propre à me tirer de l'oubli où l'on me laisse ici qu'une pareille invitation.... ».

E due mesi dopo era costretto ad aggiungere (4):

« J'attend toujours qu'on délibere si l'on veut m'accorder ou non le congè que j'ai demandé.... est-on en droit d'en user de la sorte avec moi, qui n'ai depuis dix ans qu'une miserable pension de 250 ècus (5), et qu'on a regardé jusq'ici comme une personne entierement inutile? (6)..... Je suis déterminé a me tirer d'ici à quelque prix que ce soit, et pour cela je compte sur votre parole.... ».

Ed alcuni mesi dopo in seguito alle pressioni di D'Alembert presso il re di Prussia, Lagrange riusciva ad abbandonare la patria!

Non è grato discorrere di questo triste periodo della storia italiana; ma è tuttavia necessario farlo quando si voglia rendersi conto della deficienza della nostra vita scientifica nella seconda metà del secolo XVIII, e della prima metà del secolo XIX. Essa è dovuta alla emigrazione dei nostri più chiari ingegni che cominciò con Lagrange e non terminò che nella seconda metà del secolo scorso. Ed è viva aspirazione e fermo proposito di ogni italiano che un tale periodo appartenga e per sempre alla storia del passato.

Torino, Gennaio 1901.

---

(1) Noterò p. es. il metodo, probabilmente originale, per trovare la derivata di x^m. (fol. 61 v., 62 r.).

(2) Lettera ad Euler del 19. 5. 1756 (Oeuvres, t. 14 p. 155).

(3) Lettera a D'Alembert del 24. 3. 1766 (Oeuvres, t. 13, p. 53).

(4) Lettera a D'Alembert del 14. 5, 1766 (Oeuvres, t. 13, p. 65, 66).

(5) Si tratta, come appare dal confronto coll'atto di nomina, del mezzo scudo di tre lire di Carlo Emanuelé III, quindi lo stipendio ammontava a lire italiane 880 circa.

(6) Ho udito raccontare, dicè il Bachelet, uno dei biografi di Lagrange. (Riv contempor. a, 1870, t. 61, p. 15) che in quel tempo in cui i talenti del giovane Lagrange cominciarono a levare rumore, un personaggio influente a corte.... suggeriva sul serio di dare a quel giovane un impiego nel *controllo*.....

RECENSIONI ED ANNUNZI

E. Netto. *Vorlesungen über Algebra.* 8.° I Bd. p. X + 388; 1896. II Bd. 1.° Lieferung. p. 192, 1898, 2.° Lieferung p. XI + 134, 1900. Leipzig Teubner [Prezzo Mk. 12 + 6 + 10].

L' A. avverte nella prefazione al 1.° volume delle sue lezioni essere suo scopo condurre il lettore con metodi puramente algebrici fino alle più recenti ricerche dell' algebra, che egli intende solo come studio delle equazioni e dei sistemi di equazioni algebriche; omette perciò tutte quelle teorie che, pur comunemente comprese tra le algebriche, non si riferiscono direttamente ad essa teoria.

Il primo volume è dedicato a quella che potrebbe dirsi la parte elementare della teoria delle equazioni; è diviso in tre sezioni che trattano rispettivamente delle proprietà generali delle funzioni razionali intiere di una variabile e delle equazioni algebriche, della risoluzione numerica delle equazioni, della risoluzione algebrica nei casi più semplici.

Premesse in una breve e concettosa introduzione le prime nozioni sui sistemi di numeri a più unità, l' A. entra subito nel cuore dell' algebra dando due dimostrazioni, l' una di Gauss, l'altra di Cauchy del teorema fondamentale dell' esistenza delle radici di un' equazione algebrica; dalla teoria dell' interpolazione e della divisibilità delle funzioni razionali intiere deduce poi la decomposizione delle funzioni razionali, la riduttibilità, o meno, di una funzione razionale intiera nel campo assoluto di razionalità, la semplificazione delle equazioni con radici multiple, lo sviluppo di una funzione razionale in serie ricorrente etc. — Segue la teoria delle funzioni simmetriche, le formule di Newton, Waring per le somme delle potenze simili delle radici di un' equazione algebrica, le equazioni a derivate parziali per le funzioni simmetriche, la trasformazione delle equazioni algebriche (trasformazione lineare, di Tschirnausen, la forma di Jerrard dell' equazione di 5. grado etc.). L' A. tratta quindi della resultante di due funzioni intiere, del discriminante di un' equazione algebrica, e dalla teoria della resultante deduce un' altra dimostrazione, di Gordan, del teorema fondamentale dell' algebra. La prima sezione termina con un capitolo dedicato alle forme quadratiche ed alle loro proprietà fondamentali.

La seconda sezione, sulla risoluzione numerica delle equazioni, è ricca di formole e risultati speciali. Alle regole di Cauchy, Newton, Laguerre per la determinazione di un limite superiore del modulo delle radici di un' equazione, al teorema di Rolle ed allo sviluppo abbreviato di Taylor, l' A. fa seguire i teoremi di Fourier, Cartesio, Newton, Sylwester sul numero massimo delle radici reali di un' equazione a coefficienti reali, comprese in un dato intervallo: dà poi due dimostrazioni diverse del teorema di Sturm e le formole di Sylwester per le funzioni della serie di Sturm. La lezione successiva contiene, in forma personale, l' esposizione del metodo di Hermite, che dalla teoria delle forme quadratiche perviene a risultati equivalenti a quelli di Sturm; un' altra lezione è poi dedicata ai metodi di Cauchy e di Kronecker per la separazione delle radici, alla regola di Newton, ad altri teoremi particolari sulla determinazione delle radici razionali. Segue l'esposizione dei metodi di Newton, Bernoulli e più generalmente degli infiniti algoritmi, donde per iterazione si è condotti al calcolo approssimato delle radici di un' equazione e del grado della relativa approssimazione; l' A. dà infine le ricerche di Lagrange sull' equazione ai quadrati delle differenze e sullo sviluppo in frazione continua delle radici reali di un' equazione.

Meno ampia è la terza sezione, dedicata alla risoluzione algebrica. Essa contiene la risoluzione delle equazioni cubica e di 4.° grado secondo i metodi di Eulero, Hudde, Ferrari, Lagrange; la teoria delle radici dell' unità, le ricerche classiche di Lagrange, Gauss, Jacobi sull' equazione per la divisione del cerchio ed il relativo metodo di risoluzione.

Il secondo volume è diviso in due sezioni, che trattano rispettivamente dell' eliminazione e delle teorie di Galois sulle equazioni algebriche.

La prima sezione costituisce la parte più interessante e personale dell' opera: in essa l' A. si propone di riassumere i più importanti studì relativi all' eliminazione ed alla risoluzione di un sistema di equazioni algebriche, in guisa da presentare al lettore un quadro, più che è possibile, organico e completo della teoria. Premesse le proprietà fondamentali delle funzioni intiere di più variabili, definito il concetto di radice di un' equazione o di un sistema di equazioni con più incognite, l'A. prende a studiare il sistema di due equazioni algebriche con due incoguite e ne definisce l' *eliminante* e la *risultante*. Per eliminante egli intende quella funzione razionale intiera di una tra le incognite, che si ha costruendo la resultante delle due equazioni, pensate come funzioni dell' altra incognita soltanto; per risultante invece la resultante delle due forme binarie costituite dai termini di grado massimo nelle due equazioni: il grado dell' eliminante dà allora il numero delle radici comuni alle due equazioni ed è uguale al prodotto dei loro gradi, quando la risultante è diversa da zero; quando invece questa sia nulla, ogni fattore lineare comune alle due forme diminuisce di un' unità almeno il grado dell' eliminante. Alla determinazione *effettiva* di questo grado serve la regola di Minding, che l' A. deduce dal poligono di Newton relativo ad una funzione algebrica: dà poi il metodo di Labatie, per il quale la determinazione delle radici comuni alle due equazioni è ricondotta a successive ricerche di massimi comuni divisori.

La lezione seguente contiene le proprietà fondamentali delle funzioni simmetriche di più serie di variabili; l' A. considerà quindi un sistema di m equazioni algebriche con m incognite e, riferendosi sempre al caso dianzi trattato di due equazioni, espone i metodi di eliminazione di Poisson e Bezout, sia per equazioni affatto generali, sia per sistemi particolari, il che lo conduce alla definizione di radici multiple ed infinite di un sistema, alla considerazione di sistemi, le cui equazioni abbiano comune infinite radici, ed alla classificazione, secondo Kronecker, dei sistemi secondo il loro *rango*, cioè secondo le dimensioni della varietà delle loro radici. Dalle proprietà generali dell' eliminante di un sistema l' A. deduce un teorema di Liouville, fecondo di applicazioni geometriche, e due teoremi di Noether ed Hilbert sulla rappresentazione di una funzione razionale intiera Φ, che ammetta tutte le radici, in numero finito od infinito, del sistema dato; espone quindi molto concisamente il metodo di eliminazione, delineato da Kronecker nei suoi: « Grundzüge » e dimostra il teorema esser necessarie e sufficienti $m+1$ equazioni algebriche a definire in modo completo e senza fattori estranei un sistema qualunque di equazioni algebriche in m variabili (cioè la varietà definita dal sistema); dà infine un cenno sommario dei metodi di eliminazione di Cayley e Sylwester.

La questione dell' indipendenza, o meno, di più funzioni razionali intiere in m variabili è ricondotta dall' A. ad un problema di eliminazione, donde seguono delle relazioni interessanti tra l' eliminante ed il Jacobiano di un sistema di m funzioni razionali intiere in m variabili; l' A. definisce quindi il discriminante di un sistema di m equazioni o di una sola equazione in m incognite, assegnandone le proprietà più importanti, e dal metodo di eliminazione di Bezout deduce un teorema di Jacobi, che generalizza per un sistema *generale* di m equazioni con m incognite una formola nota di Eulero e la formola d' interpolazione di Lagrange. La lezione successiva è dedicata all' esposizione della teoria di Kronecker, della caratteristica di un sistema di equazioni; e la determinazione di questa caratteristica vien ricondotta, coi metodi di Hermite, alla determinazione della classe di una certa forma quadratica: dalla teoria delle caratteristiche l' A. deduce poi nuovamente il teorema di Bezout e la quarta dimostrazione di Gauss del teorema fondamentale dell' algebra. La sezione termina colla risoluzione di un sistema di equazioni lineari e coll' esposizione di un importante teorema d' irriduttibilità dell' Hilbert.

Nell' ultima sezione, sui metodi di Galois e sulle equazioni algebriche, ci sembra che l' A. proceda forse troppo saltuariamente, dimostrando via via quelle verità, di cui vuole o deve fare immediata applicazione ad una od altra classe d' equazioni. Così egli è condotto dallo studio delle equazioni cicliche ed abeliane alle prime proprietà dei gruppi finiti d'operazioni e in particolare dei gruppi abeliani. La riduzione, secondo i metodi di Kronecker, delle equazioni abeliane alla successiva risoluzione di equazioni cicliche lo porta a trattare del gruppo lineare di Cauchy e dei suoi casi particolari. Seguono poi nuovamente considerazioni d'indole generale (funzioni appartenenti ad un dato gruppo, il teorema di Lagrange, composizione di un gruppo, gruppo di Galois di un' equazione, transività e intransività dei gruppi, primitività ed imprimitività etc.). Se questo modo di esporre può essere utile, in quanto di ogni verità dimostrata fa subito vedere la portata e l' ufficio, d' altra parte però nuoce forse all' unità organica ed alla chiarezza e rende più difficile al lettore il formarsi un concetto sintetico ed adeguato della teoria.

Le lezioni seguenti son tutte dedicate alle applicazioni della teoria generale: dalle prime proprietà dei numeri e dei corpi algebrici, in particolare delle espressioni radicali l' A. deduce i teoremi relativi alla risolubilità di un' equazione per radicali, la riduzione di queste equazioni a quelle il cui grado è la potenza di un numero primo p, la determinazione di queste equazioni di grado p e p^2. Segue lo studio del *casus irreductibilis* dell' equazione di 3.° grado e più generalmente della risolubilità completa o parziale di una equazione a coefficienti reali con radicali reali, l' equazione dei flessi di una cubica, le « Tripelgleichungen », le equazioni metacicliche di quinto grado. L' ultima lezione è dedicata infine allo studio dell' equazione generale di quinto grado: contiene la riduzione alle forme normali di Jerrard, Brioschi, Klein, i metodi di risoluzione di Hermite, Brioschi, Kronecker, la dimostrazione del teorema di Kronecker sulla non esistenza di risolventi con un solo parametro per essa equazione.

Questa rapida scorsa attraverso l' opera del Netto ne dimostra chiaramente l'importanza, e per la copia dei risultati e per aver, prima di tutti, cercato di riunire in un' esposizione elementare ed organica le difficili teorie dell' eliminazione, finora racchiuse solo in monografie particolari, alcune delle quali di non facile lettura. In questo e nell' aver cercato di volgarizzare i metodi aritmetici di Kronecker sta, secondo noi, il significato ed il merito principale dell' opera. Vi è di certo qualche lieve menda, che può facilmente sfuggire in un' opera veramente ricca di risultati come è quella del Netto, e lo spirito schiettamente aritmetico a cui tutta l' opera è informata ne rende la lettura non molto facile e piana: cionostante il libro del Netto reca un notevole e prezioso contributo all' incremento dell'algebra e segna un vero progresso nella storia di questa scienza.

Onorato Niccoletti.

E. Lebon. *Histoire abrégée de l'astronomie.* Avec 16 portraits. Paris, Gauthier-Villars. 1899, 8.°, p. VII + 288 [Prezzo 8 fr.].

L' A. distingue lo sviluppo storico dell' Astronomia in tre grandi epoche: *periodo antico, periodo moderno* e *periodo contemporaneo.* Il primo si chiude verso la metà del Sec. XVI, il secondo circa trecent' anni dopo e l' ultimo s' inizia verso la metà del Sec. XIX; il primo abbraccia quindi più di venti secoli, mentre tre soltanto ne comprende il secondo e circa mezzo l' ultimo; eppure la storia del primo potè venir narrata dall' A. in sole 18 pagine, mentre 84 fu necessario dedicare al secondo e 126 al terzo; questi dati numerici, coll' irresistibile eloquenza delle cifre, bastano a porgere un'idea della vertiginosa rapidità con cui, col progresso della civiltà, crebbe il numero dei cultori dell' Astronomia ed in conseguenza si aumentò il numero delle teorie che ne sono parte integrante.

Il primo dei suindicati pericoli (per usare delle parole dell'A.) « è caratterizzato da osservazioni che divengono sempre più importanti presso tutti i popoli, dalle ipotesi geniali sulla costituzione dell' universo emesse da due filosofi — Pitagora e Platone —, delle scoperte di Ipparco, e sopratutto della spiegazione data da Tolomeo pei fenomeni celesti.

« Il periodo moderno si estende dalla metà del Sec. XVI alla metà del Sec. XIX; si distingue per l' adozione dell' ipotesi razionale da Copernico proposta per spiegare i movimenti planetarì, dell' enunciazione — frutto delle lunghe e pazienti ricerche di Keplero — delle leggi che governano siffatti movimenti attorno al sole; delle inattese scoperte fatte da Galileo osservando col telescopio da lui costruito; della capitale scoperta, dovuta al genio di Newton, della legge di attrazione universale; dai nuovi metodi matematici di Lagrange e Laplace, che abilitarono a stabilire le prime teorie dei moviment degli astri del sistema solare; dal perfezionamento incessante dei telescopì che permise a Herschel di scoprire un pianeta più lontano di Saturno.

« Il periodo contemporaneo comprende la seconda metà del Secolo XIX; esso si distingue per la precisione con cui la Meccanica celeste giunge — grazie alle dotte ricerche di matematici, di cui i più eminenti furono Le Verrier, Adams, Tisserand — a predire per epoche lontanissime, quasi senz' errore, le posizioni che occuperanno nel cielo il Sole, la Luna ed i pianeti, e sopratutto per l' applicazione che un grande numero di astronomi seppero fare delle nuove invenzioni nelle scienze fisiche, allo studio della costituzione del Sole e delle stelle ».

Per ciascuno di questi periodi l' A. indica quali furono i Corifei, anzi di tutti dà una succosa biografia; per ciascuno segnala, non solo le investigazioni astronomiche, ma anche le opere geodetiche che vennero iniziate o condotte a termine; non solo le indagini di alta matematica che vennero sfruttate, ma anche gli apparati che furono inventati od adoperati; non solo i più decisivi lavori individuali, ma anche i frutti delle più cospicue associazioni mondiali (come ad es. l' Associazione geodetica internazionale, quella per la delineazione delle carte del cielo o per l'organizzazione del servizio metereologico), aventi scopi che più o meno s' accostano a quelli che si propone la Astronomia, intesa nel senso più largo di questa parola. Sicchè, specialmente l' ultima parte dell' opera del Sig. Lebon, fornisce al lettore una ricchissima collezione di notizie interessanti, per procurarsi le quali egli dovrebbe altrimenti assogettarsi a lunghe e faticose ricerche sulle fonti, analoghe a quelle dinanzi a cui l' A. nostro non si è arrestato.

Il libro è elegantemente stampato ed adorno dei ritratti in fototipia, perfettamente eseguiti, di alcuni eminenti cultori dell' Astronomia matematica e fisica (Copernico, Galileo, Keplero, Newton, Herschel, Laplace, Arago, Le Verrier, Faye, Janssen, Loewy, Perrier, Newcomb, Tisserand, S. Koweleswski, Poincarè (1)); esso si chiude con un « Dizionario biografico e bibliografico » e con un « Indice analitico delle materie »; quindi, se per quelle qualità estetiche verrà accolto festosamente da chi ama i libri belli, per queste solide qualità verrà cercato da chi vuol arricchire la propria biblioteca di una comoda fonte di notizie. G. L.

G. Peano. *Formulaire de Mathématique. Édition de l'an 1901.* (*tome III de l'édition complète*). Turin, Bocca et Clausen 1901, 8.° p. VIII + 230 [Prezzo L. 8].

In questa nuova edizione della sua opera, il fervente apostolo della Logica matematica in Italia ha fatto numerose modificazioni ed im-

(1) Speriamo che in una prossima edizione autore ed editore si accorderanno per aggiungere i ritratti di Gauss e Schiaparelli.

portanti aggiunte, le quali fanno fede della serietà dei metodi che egli scelse per far trionfare le proprie idee. Qualunque sia per essere il giudizio definitivo che l'avvenire è chiamato a pronunciare intorno al valore del Calcolo logico, il presente volume del *Formulario* è destinato a rimanere un'ottima opera di consultazione, capace di prestare preziosi servizi a chiunque desidera notizie storiche e bibliografiche degne di fede, non solo intorno alla Logica matematica, ma anche intorno all'*Aritmetica*, la *Teoria delle funzioni analitiche*, i *Numeri complessi* ed i *Vettori;* perciò va data lode, non solo al Prof. Peano, ma anche al suo egregio collaboratore Dott. Vacca. L'attingere notizie dal *Formulario* non è difficile grazie ai copiosi indici con cui esso si chiude. G. L.

MAX SIMON. *Analytische Geometrie des Raumes.* I *Teil: Gerade Ebene, Kugel.* Mit. 55 Figuren. Leipzig. Göschen 1900, 8.° p. 152. [Prezzo del vol. legato Mk. 4].

» — *Analytische Geometrie del Raumes.* II *Teil: Die Flächen zweiten Grades.* Mit. 29 Figuren. Leipzig, Göschen 1901, 8.° p. 176. [Prezzo del vol. legato Mk. 4. 40].

Questi due volumi — che portano i numeri IX e XXV nella nota « Sammlung Schubert » — costituiscono un trattato elementare di geometria analitica dello spazio, naturale continuazione dell'*Analytische Geometrie der Ebene* del medesimo autore, che già segnalammo ai nostri lettori (v. *Bollettino* T. III, 1900, p. 85). La nuova opera dell'egregio Professose del Liceo di Strasburgo possiede le doti di chiarezza ed eleganza di cui l'antico va adorno; e contiene esposte delle teorie che sino ad ora erano state considerate (probabilmenle a torto) come non addatte a venire introdotte ia una prima trattazione analitica della Geometria dello spazio: tali sono quelle dei complessi di sfere, della sferica analitica e dei complessi degli assi di una quadrica (per asse di una quadrica s'intende, seguendo il Reye, la perpendicolare condotta da un punto dello spazio sul relativo piano polare). Ulteriori particolari sull'architettura dell'edificio eretto dal Simon e sui materiali con cui venne costruito emergono dal seguente indice delle materie.

PARTE I.

I Cap. *Coordinate.* § 1. Il sistema di tre assi ortogonali. § 2. Distanza di due punti; equazione di un luogo geometrico. § 3. Raggi per l'origine. § 4. Due raggi. § 5. Due punti e la loro congiungente. § 6. Divisione di un segmento.

II Cap. *Piano e retta.* § 7. Il piano. § 8. Equazione generale del piano. § 9. La retta. § 10. Piano e retta. § 11. Piano e piano.

III Cap. *Il complesso lineare.* § 12. Coordinate della retta. § 13. Il complesso lineare.

IV Cap. *Principio di dualità.* § 14. Fascio di piani. § 15 Sferica analitica. § 16. Equazioni del punto in coordinate di piani. § 17. La punteggiata.

V Cap. *Trasformazione delle coordinate.* § 18. Trasformazione delle coordinate.

VI Cap. *La sfera.* § 19. Equazione della sfera; potenza di una sfera rispetto ad un punto. § 20. Piano tangente e piano polare. § 21. Il complesso lineare di sfere. § 22. L'inversione.

PARTE II.

I Cap. *Le superficie di second' ordine e seconda classe in generale.* § 1. L'equazione omogenea di secondo grado tra quattro variabili. § 2. Polare e discriminante. § 3. L'elemento tagente. Divisione delle superficie. § 4. Polo e piani polari. § 5. Centro, piani diametrali e diametri. § 6. Quadriche rigate.

II Cap. *Gli assi secondo Reye.* § 7. Gli assi di Reye. § 8. Gli assi per un punto. § 9. Il complesso degli assi di un paraboloide.

III Cap. *Superficie di secondo grado improprie.* § 10. Il cono. § 11. Il cono degenere. § 12. Il cono riferito ai suoi assi. § 13. Il cilindro. § 14. Il cilindro riferito ai suoi assi. § 15. Il cilindro paraboloico.

IV Cap. *Le superficie di second' ordine a centro in generale.* § 16. Il cono asintoto. § 17. Sezioni piane. § 18. Sezioni speciali. § 19. Il complesso degli assi di una quadrica a centro rappresentata da un'equazione ridotta a forma canonica. § 20. Proprietà focali delle quadriche a centro.

V Cap. *Le superficie di second' ordine trattate separatamente.* § 21. L'ellissoide. § 22. L'iperboloide ad una falda. § 23. L'iperboloide a due falde.

VI Cap. *Il paraboloide.* § 24. Equazione canonica della superficie. § 25. Sezioni piane del paraboloide.

VII Cap. *Gli assi secondo Reye del paraboloide.* § 26. Gli assi. § 27. Il cono di assi. § 28. Proprietà focali del paraboloide. § 29. Forme dei due paraboloidi.

VIII Cap. *Cubatura delle superficie di second' ordine.* § 30. Cubatura delle superficie a centro. § 31. Cubatura del paraboloide.

G. L.

F. Müller. *Vocabulaire mathématique français-allemand et allemand-français, contenant les termes téchniques employés dans les mathématiques pures et appliquées. Mathematisches Vokabularium französisch-deutsch und deutsch-französisch enthaltend die Kunstausdrücke der reinen und angewandten Mathematik. Erste Hälfte.* 4.⁰ p. IX + 132. Leipzig. Teubner. [Prezzo Mk. 8].

È l'opera di cui demmo l'annunzio e la prefazione tradotta sin dallo scorso anno (v. *Bollettino*, T. III, p. 92-96 1900); essa corrisponde alle aspettazioni generali e — stante la grande somiglianza fra le lingue italiana e francese — riuscirà utilissima anche ai nostri connazionali. Ma un lavoro siffatto non può pretendere di essere completo e perfetto, onde noi siamo certi di interpretare il desiderio del dotto Autore invitando i nostri lettori a comunicarci le aggiunte da farsi per renderlo migliore; noi le pubblicheremo di mano in mano ci giungeranno. Intanto, per dare l'esempio, osserviamo che non ci venne fatto trovare nel *Vocabolario* del Sig. Müller: 1.⁰ la traduzione dei termini tedeschi: *Filarevolventen, Planevolventen, Planevoluten*, ben noti ai cultori della Geometria differenziale delle curve sghembe; 2.⁰ la nozione di *funzioni potenziali complesse* (« complexe Potential-functionen »; v. *Jahrb. üb. die Forschr. der Mathematik*, T. XXIII, 1891, p. 413) del Beltrami (*Rend. del R. Ist. Lombardo* 1887, 1891 e 1894); 3.⁰ l'equivalente francese del termine « sphärotische Fläche » introdotto da C. Neumann (*Beiträge zur einzelnen Theilen der math. Physik*, Leipzig 1893). Potremmo aggiungere l'indicazione di parecchi nomi di curve piane speciali, ma ce ne asteniamo perchè le relative correzioni emergeranno da un'opera attualmente in corso di stampa; ed osserveremo piuttosto che una delle linee chiamata da S. Lie *Minimalcurve* e dal Darboux *lignes de longueur nulle*, se può indicarsi col nome di *courbe minimum*, non ci sembra meritare il nome di *courbe de courbure minima* suggerito dall'autore.

G. L.

K. Boehm, *Zur Integration partieller Differentialsysteme*. Leipzig, Teubner, 1900. 55 p. 8.⁰ [Prezzo Mk 1. 80].

L'autore si propone di semplificare i criteri stabiliti dalla Signora Kowalewsky per l'integrabilità d'un sistema di m equazioni a derivate parziali tra m funzioni d'un numero qualunque di variabili, e di determinarne, quando esistono, gl'integrali sotto forma di serie di potenze, — lasciando da parte lo studio della convergenza di tali serie. Dopo aver largamente sviluppato il suo metodo per $m = 1$, egli lo estende al caso di m qualunque. — Questo è tutto quanto si può dire dell' opuscolo del Boehm senza entrare in uno sviluppo di formole che sarebbe incompatibile colle consuetudini del *Bollettino*.

G. VIVANTI.

C. RUNGE. *Praxis der Gleichungen* (Sammlung Schubert XIV). Mit 8 Figurem. 8.º p. 196. Leipzig, Göschen 1900 [Prezzo del vol. legato Mk. 5, 20].

Come fa supporre il titolo che porta, questo libro si dirige specialmente ai cultori della matematica applicata, ai quali esso insegna tutti i metodi a cui si può oggi ricorrere da chi voglia risolvere una o più equazioni numeriche, algebriche o trascendenti. Nella I Sezione vengono studiate successivamente le equazioni lineari con una, due o parecchie incognite, e le regole insegnate sono da ultimo applicate ai noti sistemi offerti dalla teoria dei minimi quadrati. La II Sezione è consacrata alle equazioni ad un' incognita non lineari, con applicazione all' inversione delle serie. I metodi esposti vengono poi estesi nella Sezione successiva ai sistemi di equazioni non lineari e viene mostrato come essi possano applicarsi anche alle equazioni di primo grado. L' ultima Sezione concerne esclusivamente le funzioni razionali intere; ecco quali sono gli argomenti che riguardo ad esse vengono trattati: Determinazione di una funzione intera mediante i suoi coefficienti o mediante un certo numero di valori; determinazione del numero delle radici reali; calcolo delle radici reali; metodi grafici; applicazione dei logaritmi addittivi; equazioni trinomie; metodo di Graeffe per calcolare le radici; teorema di Sturm. Un grande numero di esempì numerici rende l' opera del Runge di una indiscutibile utilità pratica.

G. L.

S. PINCHERLE. *Introduzione al corso di Algebra complementare e di Geometria analitica. Appunti redatti per uso degli studenti.* Bologna, Zanichelli 1901. 8.º p. 66. [Prezzo L. 2].

« Scopo di questa introduzione », scrive l' A., « è di riassumere brevemente nelle sue parti esenziali, la genesi dei numeri reali e delle operazioni fondamentali dell'aritmetica, e di stabilire in modo preciso la corrispondenza biunivoca fra i numeri reali ed i segmenti della retta, corrispondenza che sta a fondamento della Geometria analitica ».

Quale sia la via seguita per conseguire l' intento è abbastanza dichiarato dal seguente indice di materie :

Cap. I. *I numeri razionali. A.* I numeri interi. *B.* La divisibilità. Le congruenze. *C.* I numeri frazionari.

Cap. II. *I numeri reali. A.* Classi, successioni, sezioni. *B.* I numeri irrazionali. *C.* Le potenze. *D.* Riassunto delle proprietà dell'insieme dei numeri reali.

Cap. III. *La corrispondenza fra i numeri reali ed i segmenti. A.* I postulati della retta. *B.* Misura dei segmenti di una retta.

Lo stile rigoroso, semplice e limpido con cui è scritto il presente opuscolo, rendendolo accessibile a tutti, gli assicurano larga diffusione fra la gioventù studiosa, a cui si dirige ed a cui va raccomandato.

G. L.

Annuaire pour l'an 1901, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. Paris, Gauthier-Villars. [Prezzo 1 fr. 50, franco 1, 85].

Questo nuovo elemento della celebre serie di annuari pubblicato dall'Ufficio delle longitudini, oltre alla consueta ricchissima collezione di notizie indispensabili all'ingegnere ed allo scienziato, contiene i seguenti articoli originali, tutti, per varie ragioni, importanti:

A. CORNU. *Le transport eléctrique de la force.*

H. POINCARÉ. *Rapport sur le projet de révision de l'arc de méridien de Quito.*

M. LOEWY. *Notice sur la conférence astronomique internationale tenue a l'Observatoire de Paris en Juillet 1900.*

M. BASSOT. *Notice historique sur la fondation du système métrique* (relazione documentata a cui ricorrevano tutti gli storici fautori del nostro sistema di misure).

BOUQUETE DE LA GRYE. *Note sur la XIII^e Conférence de l'Association géodésique internationale tenue a Paris du 25 Septembre au 6 Octobre sous la présidence de M. Faye.*

JANSSEN. *Note sur les travaux exécutés à l'Observatoire du sommet du Mont Blanc en 1900.*

JANSSEN. *Les progrés de l'aéronatique. Discours prononcé le 15 Septembre 1900 à l'ouverture du Congrés d'aéronautique tenu à Meudon.*

GUYOU. *Discours pronuncé aux funérailles de M. de Bernadières le 4 Février 1900.*

Accrescono pregio al volume parecchie figure intercalate nel testo e tre carte magnetiche. G. L.

A. FÖPPL. *Vorlesungen über technische Mechanik.* III Band: *Festigkeitslehre.* II Auflage. Mit. 79 Figuren im Text. 8.° p. XVI + 472. Leipzig, Teubner, 1900 [Prezzo del vol. legato Mk. 12].

I. Ricerche generali sullo stato di tensione. II. Deformazione elastica. III. Flessione dell'asta rettilinea. IV. Il lavoro di deformazione. V.

Aste a linea mediana curva. VI. Aste su base cedevole. VII. Stabilità delle lastre piane che hanno sostegni lungo tutto il loro contorno. VIII. Stabilltà di recipienti sottoposti a pressioni interne od esterne. IX. La stabilità di torsione. X. La stabilità di schiacciamento. XI. Fondamenti della teoria matematica dell'elasticità. — Riassunto delle formole più importanti.

Prof. W. Pflieger. (Direktor der Realschule zu Münster in Elsass). *Elementare Planimetrie* (Sammlung Schubert II). 8.º p. VII + 430. Leipzig, Göschen, 1901. [Prezzo del vol. legato Mk. 4, 80].

I. Le figure dello spazio. II. Il segmento ed il piano. III. Figure geometriche illimitate. IV. Congruenza ed eguaglianza. V. Il circolo e l'angolo. VI. Il teorema geometrico. VII. La retta bisecante ortogonalmente un segmento e le costruzioni fondamentali. VIII. Le strisce. IX. Parallele e bisettrici. X. Intersezioni e contatti. XI. Il triangolo. XII. Paragone di superficie piane. XIII. Il problema di Apollonio. XIV. Misura, proporzionalità e similitudine. XV. I poligoni. XVI. Misura del cerchio. XVII. Forme armoniche. XVIII. Proprietà armoniche del cerchio; affinità circolare (Kreisverwandschaft). XIX. Duplice trasformazione di due cerchi. XX. Il fascio di cerchi.

NECROLOGIO

Carlo Hermite *di C. Jordan* (1).

La Scuola matematica francese ha testè perduto, nella persona di C. Hermite, il suo capo ed il suo maestro.

Sarebbe indubbiamente temerario volere analizzare, in fretta e sotto il colpo prodotto dalla prima emozione, la lunga serie dei suoi lavori, che ha gettata tanta luce su tutta la seconda metà del Secolo XIX. Una tale impresa esige maggior tempo ed uno spirito più riposato. Ci limiteremo, quindi, rivolgendo al nostro venerato Collega il supremo addio, che la sua modestia ci ha vietato di pronunciare sopra la sua tomba, a indicare a grandi linee, per quanto lo concederà la nostra memoria, alcune delle scoperte di cui noi siamo a lui debitori.

Nel 1843, Hermite, a vent'anni era appena entrato nella Scuola

(1) Traduzione autorizzata di un cenno necrologico inserito nei *Comptes rendus hebdomadaires des Seances de l'Académie des Sciences, N. 3* (21 Janvier 1901).

politecnica. Dietro consiglio di Liouville, egli scrisse a Jacobi per comunicargli i risultati da lui ottenuti sulla divisione delle funzioni Abeliane, funzioni allora appena conosciute. L'illustre geometra tedesco, occupato in quel momento dell'edizione delle sue Opere, non esitò a farvi figurare, a lato dei propri lavori, la lettera del suo giovane corrispondente. Egli gli scriveva poco dopo: « Non Le rincresca, Signore, se alcune delle Sue scoperte si sono incontrate con alcune mie antiche ricerche. Siccome Ella dovette cominciare dove io ho finito, esiste di necessità una piccola sfera di contatto. Ma in avvenire, se Lei mi onorerà della Sue comunicazioni, io non avrò che da imparare ».

La predizione del sommo geometra non doveva tardare a verificarsi.

Nelle quattro lettere seguenti, che Jacobi ci ha pure conservate, Hermite si era proposto anzitutto di generalizzare la teoria delle funzioni continue; ma bentosto si trovò condotto ai problemi più vasti della teoria aritmetica delle forme, ove non tardò ad ottenere risultati mirabili.

Sin dal principio dei suoi lavori, egli indica parecchi metodi per ridurre le forme quadratiche con un numero qualsivoglia di indeterminate. Un po' più tardi, l'introduzione delle variabili continue nella teoria lo conduce a scoprire delle verità più nascoste.

Egli dà la soluzione completa del problema dell'equivalenza delle forme quadratiche generali o delle forme decomponibili in fattori lineari; determina la trasformazione di queste forme in sè stesse; dimostra, con un procedimento totalmente nuovo e puramente aritmetico, i celebri teoremi di Sturm e Cauchy sopra la separazione delle radici nelle equazioni algebriche. Introduce la nozione feconda di forme quadratiche a variabili coniugate e deduce dalla loro teoria una nuova dimostrazione dei bei teoremi di Jacobi sul numero delle decomposizioni di un numero in quattro quadrati.

Egli arriva finalmente a questa meravigliosa proposizione che le radici delle equazioni algebriche a coefficienti interi e con lo stesso discriminante sono esprimibili mediante un numero limitato d'irrazionalità distinte.

Lo studio algebrico delle forme è pure l'oggetto delle sue meditazioni. La nozione di invariante, la quale domina questa teoria, era rimasta un po' confusa, sino al giorno in cui Cayley la pose in piena luce in una celebre memoria dell'anno 1858; Cayley, Sylvester e Hermite si spartirono il nuovo dominio che era stato loro dischiuso.

I loro lavori sono talmente legati fra loro da una fraterna rivalità, che sarebbe difficile e quasi neppure desiderabile il precisare la parte di ciascuno nell'opera comune. Sembra però che si possa attribuire specialmente a Hermite la legge di reciprocità, la scoperta dei covarianti associati, quelli degli invarianti gobbi e la formazione del sistema completo dei covarianti delle forme cubiche e biquadratiche e degli invarianti delle forme del quinto ordine.

Queste importanti investigazioni d' Aritmetica e d' Algebra non bastano alla sua attività; nel contempo egli proseguiva i suoi studi sopra le trascendenti; in una serie di ricerche memorabili egli risolveva il problema dalla trasformazione delle funzioni iperellittiche, e dagli sviluppi in serie delle funzioni ellittiche egli deduceva delle formole importanti relative al numero delle classi delle forme quadratiche.

In pari tempo poneva le basi della teoria delle funzioni modulari e risolveva, sino nei particolari più minuti, la questione tanto difficile della loro trasformazione, dando così assai prima un modello a coloro che dovevano ai giorni nostri riprendere e generalizzare questa teoria.

L' impressione prodotta sui geometri dall' insieme di questi lavori è riassunta benissimo in questo motto pittoresco che noi udimmo un giorno pronunziare da Lamé: « Leggendo le memorie di Hermite, viene la pelle d' oca! ».

Nel 1856, a trentaquattro anni, Hermite entrava nell' Istituto di Francia; nel 1862 veniva creata per lui una cattedra alla Scuola Normale; poco dopo diveniva anche professore alla Scuola Politecnica ed alla Sorbona.

In quest' epoca, l' insegnamento superiore era, è necessario riconoscerlo, un po' antiquato. Le grandi scoperte mediante le quali Gauss, Abel, Jacobi, Cauchy avevano trasformata la Scienza durante un mezzo secolo, venivano passate sotto silenzio, quasi non interessassero che alcuni rari iniziati. Hermite le gettò arditamente nel dominio pubblico. Questa audacia ben intesa portò i suoi frutti: ne fa fede la nostra giovane e brillante scuola di geometri. Tutti furono allievi di Hermite e devono alle sue lezioni, ai suoi benevoli incoraggiamenti una gran parte dei loro successi.

Questa monarchia pacifica non si arrestava alle nostre frontiere: Hermite teneva corrispondenza con tutta l'Europa dotta, e dappertutto i giovani ingegni potevano fare assegnamento sopra i suoi consigli ed il suo aiuto.

Ma nè i doveri del suo insegnamento, e nemmeno l' età potevano pregiudicare la fecondità del suo spirito. Da questo secondo periodo datano infatti un grande numero di bei lavori che in nulla cedono alle opere della sua giovinezza.

Tuttavia una evoluzione sensibile si produce nell' oggetto delle sue ricerche. L' Aritmetica e l' Algebra, sino allora predominanti, stanno per cedere il passo al Calcolo integrale.

La transizione è segnalata da una Memoria celebre sulle equazioni del quinto grado, di cui egli dà la risoluzione di queste mediante le funzioni ellittiche.

Vengono poi le ricerche sull' interpolazione, su alcuni nuovi metodi di sviluppo delle funzioni in serie di polinomi, sulla continuità degli integrali definiti dipendenti da un parametro, ecc.

Nella teoria delle funzioni ellittiche, Hermite scopre una formola fondamentale che permette di decomporle in elementi semplici e, quindi, di integrarle. Egli studia, per primo, le funzioni biperiodiche di seconda specie.

Giungiamo finalmente alla memoria sulla funzione esponenziale, degno coronamento di lunghe indagini sopra gli sviluppi in frazioni continue. In essa egli mostra che il numero e è trascendente. Lindemann ha riconosciuto più tardi che altrettanto succede per π. Il problema della quadratura del circolo, invano tentato durante tanti secoli, è pertanto dimostrato irrisolubile.

È legittimo rivendicare ad Hermite una parte di questo bel risultato, dal momento che fu ottenuto imitando la via che egli aveva seguito riguardo all' esponenziale. Ora sarebbe un formarsi un' idea ben incompleta dell' ufficio degli spiriti superiori misurandoli esclusivamente sulle nuove verità che essi enunciarono esplicitamente. I metodi che essi legarono ai loro successori, lasciando loro la cura di applicarli a nuovi problemi che forse essi stessi non prevedevano, costituisce un'altra parte della loro gloria, talora anzi la principale, come lo prova l' esempio di Leibniz.

Da quasi un secolo noi lavoriamo a svolgere i germi fecondi che Gauss e Cauchy seminarono nei loro scritti; altrettanto accadrà per Hermite. Ecco altri due esempi atti a dimostrarlo:

Il notevole gruppo di sostituzioni che egli incontrò nelle sue indagini sulle funzioni Abeliane funge come elemento essenziale nella soluzione di un problema completamente diverso, cioè quello della risoluzione delle equazioni col mezzo di radicali. Si presenta ancora nella discussione della seconda variazione degli integrali definiti.

Le forme quadratiche a variabili coniugate sono la base indispensabile delle ricerche sopra la riduzione delle forme più generali, a coefficienti reali o complessi.

Hermite amava la Scienza per sè stessa e non si preoccupava delle applicazioni; esse si presentarono spontaneamente e come un di più. All' equazione di Lamé, la cui integrazione costituisce l' ultimo dei suoi lavori, egli ha collegata tutta una serie di problemi di Meccanica: rotazione di un solido, determinazione della curva elastica, oscillazioni del pendolo conico.

Per formarsi un' idea esatta del posto occupato da Hermite nel mondo matematico, bisogna avere assistito, come accade a noi, alle indimenticabili feste del suo giubileo nel 1892. Tutti i suoi amici, i suoi discepoli si erano dati appuntamento a questa commovente cerimonia; tutte le Società scientifiche d' Europa avevano inviati indirizzi e rappresentanti.

Lo stesso anno ha assistito al giubileo di Pasteur. Oggi Pasteur e Hermite non sono più; a noi non restano che il ricordo dei loro esempì e le loro opere; ma queste bastano a rendere eterna la loro memoria.

Ci sia concesso, finendo, di esprimere un voto a nome della Sezione di Geometria.

L' opera scientifica di Hermite è assai sparsa; oltre alle memorie principali, essa abbraccia molte lettere e note disperse qua e là ma recanti tutte l' impronta dell' unghia del leone. L'Accademia si onorerebbe e renderebbe un grande servizio ai geometri curando la pubblicazione delle Opere complete di Carlo Hermite.

Elenco delle pubblicazioni di C. Hermite (1).

1842.

1. Lieu géometrique des pôles d'une section comique par rapport à une autre. Nouv. Ann. T. I.

2. Considérations sur la résolution algébrique de l'équation du cinquième degré. Nouv. Ann. T. I

1843.

3. Sur la division des fonctions abéliennes ou ultra-elliptiques. C. R. T. XVII.

1844.

4. Sur la théorie des trascendentes à difféerentielles algébriques. C. R. T. XVIII, Giorn. di Lionville, T. IX.

1845.

5. Principaux théorèmes de l'analyse des fonctions elliptiques. Mém. de la Soc. Scientifique de Nancy.

1846.

6. Extraits de deux lettres à M. C. G. J. Jacobi. Giorn. di Crelle. T. XXXII.

(1) Malgrado la cura posta nel compilare questo elenco (da cui ad arte escludemmo le Questioni proposte nel periodico *The Educational Times*) non ci sentiamo di garantire che esso sia completo; pronti a colmare le lacune che venissero in esso segnalate, crediamo però che esso basterà ai nostri lettori per formarsi un concetto, non disforme dal vero, della prodigiosa produzione di chi fu fino a ieri il Nestore degli analisti moderni.

(G. L.).

1848.

7. Sur la division des fonctions Abéliennes ou ultra-elliptiques. Mém. des Sav. Etr. T. X.

8. Note sur la réduction des fonctions homogènes à coefficients entiers et à deux indéterminées. Giorn. di Crelle, T. XXXVI.

9. Note sur la théorie des fonctions elliptiques. Camb. and Dubl. math. Journal, T. III.

1849.

10. Sur une question rélative à la théorie des nombres. G. di Lionville, T. XIV.

11. Sur la théorie des fonctions elliptiques. C. R. T. XXIX.

12. Démonstration élementaire d'une propriété rélative aux divisienrs de $x^2 + Ay^2$. Giorn. di Lionville, T. XIV.

1850.

13. Extraits de lettres à M. Jacobi sur différents objets de la théorie des nombre. Giorn. di Crelle T. XL.

14. Sur la théorie des formes quadratiques ternaires. Giorn. di Crelle T. XL.

1851.

15. Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres Giorn. di Crelle T. XLI, 1851, C. R. T. XXXI, 1851 [V. n. 18].

16. Mémoire sur les fonctions algébriques. C. R. T. XXXII.

17. Mémoire relatif aux fonctions à doubles périodes. C. R. T. XXXII.

1852.

18. Sur l'introduction des variables continnes dans la théorie des nombres. C. R. T. XXXIV [V. n. 15].

19. Sur l'extension du théorème de M. Sturm à un système d'équations simultanées. C. R. T. XXXV.

1853.

20. Un théorème de Fermat. Nouv. Ann. T. XII.

21. Remarques sur le théorème de M. Sturm. C. R. T. XXXVI.

22. Mémoire sur la décomposition d'un nombre en quatre carrés. C. R. T. XXXVII.

1854.

23. Sur un mémoire de M. Cayley relatif aux déterminants gauches. Cambridge and Dublin math. Journal. T. IX.

24. Sur la théorie des fouctions homogènes à deux indéterminées. I, II. Camb. and Dubl. math. Journal T. IX, G. di Crelle T. LII.

25 Sur la thëorie des formes quadratiques ternaires indéfinies. Giorn. di Crelle T. XLVII.

26. Sur la théorie des formes quadratiques I, II. Giorn. di Crelle T. XLVII.

1855.

27. Sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes. C. R. T. XL.

28. Remarques sur un théorème de M. Cauchy. C. R. T. XLI.

1856.

29. Extrait d'une lettre à M. Borchardt de Berlin sur le nombre des racines d'une équation algébrique comprises entre des limites données. Giorn. di Crelle T. XLII.

1857.

30. Sur le nombre limité d'irrationalités auxquelles se réduisent les racines des équations à coefficients entiers complexes. C. R. XLIV.

31. Extrait d'une lettre à M. Borchardt sur le nombre limité d'irrationalités auxquelles se réduisent les racines des équations à coefficients entiers complexes d'un degré et d'un discriminant donné. Giorn. di Crelle T. LIII.

32. Extrait d'une lettre à M. Borchardt sur l'invariabilité du nombre des carrés positifs et des carrés négatif dans la transformation des polynômes homogènes du second degré. Giorn. di Crelle T. LIII.

33. Sur les formes cubiques à deux indéterminées. Quart. Journ. T. I.

34. Corréspondance avec M. Cayley sur les cubiques temaires. Quart. Journ. T. I.

35. Sur le nombre de solutions entières et positives de l'équation $ax + + ly + cz +$ etc. $= n$. Quart. Journ. T. I.

1858.

36. Sur quelques formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques. G. di Liouville 2.a Serie T. III.

37. Sur la théorie des formes cubiques à trois indéterminées. G. di Liouville 2.a Serie T. III.

38. Sur la résolution de l'équation du quatrième degré. C. R. T. XLVI.

39. Sur quelques théorémes d'algébre et la résolution de l'équation du quatrième degré. C. R. T. XLVI.

40. Sur quelques formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques. C. R. T. XLVI.

41. Sur la résolution de l'équation du cinquième degré. C. R. T. XLVI. Annali di Mat. T. I.

1859.

42. Sur la théorie des équations modulaires. C. R. T. XLVIII e XLIX.

43. Sur l'abaissement de l'équation modulaire du huitième degré. Annali di Matem. T. II.

44. Sur l'interpolation. C. R. T. XLVIII.

45. Sur la réduction des formes cubiques à deux indéterminées. C. R. T. XLVIII.

46. Sur la théorie des équations modulaires et le résolution de l'équation du cinquième degré. Paris.

1860.

47. Sur le résultant de trois formes quadratiques ternaires, extrait d'une lettre à M. Borchardt. Giorn. di Crelle, T. LVII.

48. Sur l'invariant du 18^{me} ordre des formes du cinquième degré et sur le rôle qu'il joue dans la résolution de l'equation du cinquième degré, extrait de deux lettres à l'éditeur (C. W. Borchardt). Giorn. di Crelle, T. LIX.

49. Sur la transformation du troisième ordre des fonctions elliptiques, entrait d'une lettre à l'éditeur (C. W. Borchardt). Giorn. di Crelle T. LX, Annali di Matem. T. IV.

50. Sur la théorie des nombres. C. R. T. LIII.

1861.

51. Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégrale, par S. I. Lacroix 6.e édition. V. anche le ed. successive, l'ultima delle quali (IX.a) porta la data 1881, revue et augumentée de Notes par M M. Hermite et J. A. Serret. Paris, Vol. I, 1861; Vol. II, 1862.

1862.

52. Sur la théorie des formes quadratiques. C. R. T. LV.

53. Sur la théorie des fooctions elliptiques et ses applications à l'arithmétique. C. R. T. LV, G. di Liouville. 2.a Serie, T. VII.

1863.

54. Sur la théorie des fonctions elliptiques. C. R. T. LVII.

55. Sur les fonctions de sept lettres. C. R. T. LVII.

1864.

56. Sur un nouveau développement en série des fonctions. C. R. T. LVIII.

57. Sur quelques formules relatives aux modules dans la théorie des fonctions elliptiques. G. di Liouville, 2.a Serie, T. IX.

58. Remarques sur le développement de cos am. u G. di Liouville, Serie 2.a, T. IX.

59. Sur les théorémes de M. Kronecker relatifs aux formes quadratiques. G. di Liouville, Serie II, T. IX.

60. Extrait d'une lettre à M. Brioschi. Giorn. di Grelle, T. LXIII.

1865.

61. Extrait d'une lettre à M. Borchardt. Giorn. di Crelle, T. LXIV.

62. Sur quelques développements en série de fonctions de plusieurs variables. C. R. T. LX.

63. Sur l'équation du cinquième degré. C. R. T. LXI.

64. Sur l'équation du cinquième degré. C. R. T. LXII.

1866.

65. Sur le rayon de courbure des courbes gauches. Nouv. Ann. de Math., 2.a Serie, T. V.

1867.

66. Sur l'intégrale $\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Annali di Matem. 2.a Serie, T. I.

1868.

67. Sur le développement en série des intégrales elliptiques de première et de seconde espèce. Annali di Matem. 2.a Serie, T. II.

1869.

68. Sur l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-n)\sqrt{1-n^2}}$. Annali di Mat., 2.a Serie, T. III.

69. Sur la transcendante E_n. Annali di Mat., 2.a Serie, T. III.

70. Sur l'expression du module des transcendantes elliptiques, en fonction du quotient de deux périodes. Annali di Mat. 2.a Serie, T. III.

1870.

71. Sur l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{\text{sen } a \text{ d } x}{1-2x\cos a+x^2}$. Bull. des Sciences Math., T. I.

1871.

72. Sur la construction géométrique de l'équation relative à l'addition des intégrales elliptiques de première espèce. Bull. des Sciences math., T. II.

1872.

73. Sur l'intègration des fonctions circulaires. Proc. of the London math. Soc. T. IV.

74. On the elimination of arbitrary functions. Messenger of Math., 2.a Serie, T. II.

75. Sur l'intégration des fonctions rationnelles. Nouv. Ann. de Math. 2. Serie, T. XI, 1872; Ann. de l'Ecole norm. sup. 2. Serie T. I.

76. Sur l'équation $x^3+y^3=z^3+u^3$. Nouv. Ann. de Math. 2.a Serie, T. XI.

1873.

77. Extrait d'une lettre à M. Borchardt (sur quelques approximations algébriques). Giorn. di Crelle T. LXXVI.

78. Extrait d'une lettre à M. Paul Gordan (sur l'expression U sen x + V cos x + W), Giorn. di Crelle T. LXXVI.

79. On an application of the theory of unicursal curves. Proc. of the London math. Society, T. IV.

80. Sur la fonction exponentielle. C. R. T. LXXVII. [V. n. 83].

81. Sur l'irrationalité de la base des logarithmes hyperboliques. Rep. of the Brit. An. 1873; Messenger of Mathematics, 2.a Serie, T. III.

82. Sur une équation transcendante. Bull· des Sciences math. T. IV.
83. Cours d'analyse de l'Ecole polytéchnique. T. I. Paris.

1874.

84. Sur la fonction exponentielle. Paris. [V. n. 79].
85. Sur quelques intégrales indéfinies. Journ. de l'Ec. pol. XLIV Cah.
86. Extrait d'une lettre à M. Borchardt sur la transformation des formes quadratiques ternaires en elles mêmes. Giorn. di Crelle T. LXXVIII.
87. Sur l'intégrale $\int_0^{\pi} \left(\frac{\text{sen}^2 x}{1 - 2a \cos x + a^2} \right)^n dx$. Nouv. Correspondance math. T. I.

1875.

88. Extrait d'une lettre à M. L. Fuchs de Gottingue (sur quelques équations différentielles linéaires). Giorn. di Crelle, T. LXXIX.
89. Extrait d'une lettre à M. Borchardt sur la transformation des formes quadratiques ternaires en elles mêmes. Giorn. di Crelle, T. LXXIX.
90. Lettre à M. Borchardt sur la fonction de Jacob Bernoulli. Giorn. di Crelle, T. LXXIX.
91. Sur le développement de l'inverse du sinus d'amplitude et de son carré, suivant les puissances croissantes de la variables. Assoc. française.

1876.

92. Sur les cartes topographiques. C. R. T. LXXXII.
93. Extrait d'une lettre à M. L. Königsberger sur le développement des fonctions elliptiques suivant les puissances croissantes de la variable. Giorn. di Crelle. T. LXXXI.
94. Extrait d'une lettre à M. Borchardt (sur les nombres de Bernoulli). Giorn. di Crelle T. LXXXI.
95. Sur une formule de M. Delauny. Nouv. Corrésp. math. T. II.
96. Lettre à M. Gordan. Math. Annalen. T. X.
97. Question 95. Nouv. Corr. math. T. II.
98. Sur un théorème d'Eisenstein. Proc. of the Lond. math. Society. T. VII.
99. Sur un exemple de réduction d'intégrales abéliennes aux fonctions elliptiques· An. de la Soc. scientifique de Bruxelles. T. I. B.
100. Sur les developpements de la fonction $F(x) = sn^a x \cdot cn^b x \cdot dn^c x$ où les exposants sont entiers. Stockholm Akad. Handl. Bihang. T. III.

1877.

101. Extrait d'une lettre adressée à M. L. Fuchs (recherche des coordonnées d'une cubiques en fonction explicite d'un paramètre). Giorn. di Crelle T. LXXXII.
102. Études de M. Sylvester sur la théorie algébrique des formes. C. R. T. LXXXIV.
103. Sur quelques applications des fonctions elliptiques C. R. T. LXXXV. [V. nn. 103, 113, 118, 124, 132, 156].

1878.

104. Sur quelques applications des fonctions elliptiques. C. R. T. LXXXVI. [V. nn. 102, 113, 118, 124, 132, 156].

105. Sur la théorie des fonctions sphériques. C. R. T. LXXXVI.

106. Sur la formule de Maclaurin (Extrait d'une lettre à M. Borchardt). Giorn. di Crelle T. LXXXIV.

107. Sur la formule d'interpolation de Lagrange. (Extrait d'une lettre à M. Borchardt). Giorn. di Crelle. T. LXXXIV.

108. Extrait d'une lettre à M. Lindemann (observations algébriques sur les courbes planes). Giorn. di Crelle T. LXXXIV.

109. Sur le pendule. (Extrait d'une lettre adressée à M. Gylden de Stockholm). Giorn. di Crelle T. LXXXVI.

110. Note sur une formule de Jacobi. Mém. de la Société royale des Sc. de Liége, 2.a Serie, T. VI.

111. Sur l'équation de Lamé. Ann. di Matematica, 2.a Serie. T. IX.

112. Sur la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples. Ann. de la Soc. scientifiques de Bruxelles, T. II. B.

113. Sur les formules de M. Frenet. Giorn. di Teixeira, T. I.

1879,

114. Sur quelques applications des fonctions elliptiques. C. R. T. LXXXIX (V. nn. 102, 103, 118, 124, 132, 156).

115. Equations différentielles linéaires. Bull. des Sciences math., 2. Serie T. III.

116 Sur l'intégrale $\int_0^1 \frac{z^{a-1} - z^{-a}}{1-z} dz$. Atti della R. Accad. di Torino, T. XIV.

117. Sur l'indice des fractions rationnelles. Bull. de la Soc. math. de France, T. VII.

118. Sur l'integrale $\int_0^{2\pi} f(\sin x, \cos x)\, d\, x$ Giorn. di Teineira, T. II.

1880.

119. Sur quelques applications des fonctions elliptiques. C. R. T. XC. (V. nn. 102, 103, 113, 124, 132, 156).

120. Sur une proposition de la théorie des fonctions elliptiques. C. R. T. XC.

121. Sur la série de Fourier et autres représentations analytiques des fonctions d'une variable réelle. C. R. T. XCI.

122. Sur une formule d'Euler. Journ. de Math., 3.c Serie, T. VI.

123. Sur une extension donnée à la théorie des fractions continues par M. Tchébychef. (Extrait d'une lettre à M. Borchardt). Giorn. di Crelle, T. LXXXVIII.

124. Sur l'intégration de l'équation différentielle de Lamé. (Extrait d'une lettre adressée à M. E. Heine). Giorn. di Crelle. T. LXXXIX.

1881.

125. Sur quelques applications des fonctions elliptiques. C. R. T. XCIII. [V. nn. 102, 103, 113, 118, 132, 156].

126. Extrait d'une lettre à M. Gyldén. Astron. Nachrichten No 2402.

127. Sur les fontions Θ (x) et H (x) de Jacobi Collectanea matem. in mem. D. Chelini, Milano.

128. Sur une série. Mathésis, T. I.

129. Sur une représentation analytique des fonctions, au moyen des transcendantes elliptiques. Extrait d'une lettre à M. Dini. Annali di Matem. 2.a Serie, T. X.

130. Sur les équations différentielles linéaires du second ordre. Anuali di Matem., 2.a Serie, T. X.

131. Sur l'intégrale Eulérienne de seconde espèce. (Extrait d'une lettre adressée à M. Schwarz di Gottingue). Giorn. di Crelle T. XC.

132. Sur quelques points de la théorie des fonctions. (Extrait d'une lettre à M. Mittag-Leffler). Giorn. di Crelle T. XCI; Bull. des Sciences math. 2.a Serie, T. V; Act. Soc. Fennicae, T. XII, Helsingfors.

1882.

133. Sur quelques applications des fonctions elliptiques. T. XCIV. [V. nn. 102, 103, 113, 118, 124, 156].

134. Sur l'intégrale elliptique de troisième espèce. C. R. T. XCIV.

135. Sur une application du théorème de M. Mittag-Leffler dans la théorie des fonctions. (Extrait d'une lettre adressés à M. Mittag-Leffler). Giorn. di Crelle T. XCII; Act. Soc. Feuniecae T. XII, Helsingfors.

136. Cours de la Facolté des Sciences sur les intégrales définies, la théorie des fonctions d'une variable imaginaire et les fonctions elliptiques. (Litographié). Paris [V. nn. 161, 174].

1883.

137. Remarque au sujet de cette note (Lipschitz, *Sur un point de la théorie des fonctions elliptiques*). C. R. T. XCVII.

138. Sur une relation donnée par M. Cayley dans la théorie des fonctions elliptiques. Acta mathem. T. I.

139. Sur quelques points de la théorie des nombres. Acta mathem. T. II.

140. Sur la fonctions $sn^a x$. Acta Soc. Fennicae, T. XII, Helsingfors.

141. Sur une formule relative à la théorie des fonctions d'une variable. Amer. Journal T. VI.

142. Sur les produits infinis. Giorn. di Teixeira T. VI.

143. Sur la réduction des intégrales hyperelliptiques aux fonctions de première, de seconde et de troisième espèce. Bull. des Sc. mathem. 2.a serie, T. VII.

144. Extract from a letter to Mr. Sylvester. Amer. Journal. T. VI.

1884.

145. Sur un développement au fraction continue. Acta mathem. T. IV.

146. Sur l'usage des produits infinis dans la théorie des fonctions elliptiques. Acta mathem. T. IV.

1885.

147. Note au sujet de la communication de M. Stieltjes (*Sur une fonction uniforme*). C. R. T. CI.

148. Discours pronuncé aux obsèques de M. Bouquet. C. R. T. CI.

149. Sur les fonctions holomorphes. Journ. de Mathem. 4.a Serie, T. I.

150. Sur quelques conséquences arithmétiques des formules de la théorie des fonctions elliptiques. Acta math. T. V.

151. Note (all'*Extrait d'une tettre adressée à M. Hermite par M.* Obrastroff). Bull. des Sciences math. 2.a Serie, T. IX.

152. Sur la théorie des fractions continues. Bull. des Sciences math. 2.a Serie, T. IX.

153. Snr une application de la théorie des fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Ann. de l'Ec. normale sup., 3.a Serie, T. II.

154. Sur la réduction des intégrales hyperelliptiques, extrait d'une lettro à M. le prof. Chrystal. Proc. of the R. Soc. of Edimburgh, T. XII.

155. Sur une identité trigonométrique. Nouv. Ann. de Mathem., 3.a serie T. IV.

1886.

156. Rosenhain. C. R. T. CIV.

157. Sur quelques applications des fonctions elliptiques, Paris. [V. nn. 102, 103, 113, 118, 124, 132].

158. Sur les valeurs asymptotiques de quelques fonctions numériques. (Extrait d'une lettre adressée à M. Fuchs). Giorn. di Crelle T. XCIX.

159. Remarques sur les formes quadratiques de déterminant négatif. Bull. des Sciences math, 2.a Serie, T. X.

160. Extraits de deux lettres adressées à M. Craig. Amer. Journal., T. IX.

1887.

161. Remarques arithmétiques sur quelques formules de la théorie des fonctions elliptiques. Giorn. di Crelle, T. C.

162. Cours de la Faculté des Sciences. Rédigé en 1882 par M. Andoyer, élève à l'Ecole normale. 3.e éd. revue par M. Hermite. (Lithographié). Paris. [V. nn. 135, 174]·

1888.

163. Remarques sur la décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques. Ann. de la Faculté des Sciences de Toulouse, T. II.

164. Sur la tranformation de l'intégrale elliptique de seconde espèce. Ann. de la Faculté des Sciences de Toulouse. T. II.

165. Sur un mémoire de Laguerre, concernant les équations algébriques. Mem. dell'Accademia pontificia dei nuovi Lincei, T. III.

166. Démonstration nouvelle d'une formule relative aux intégrales Eulériennes de seconde espèce. Extrait d'une lettre adressée à M. Lerch. Sitzungsberichte der k. böhm. Ges. der Wissensch., Prag.

167. Sur la transformation de l'intégrale elliptique de seconde espèce. Extrait d'une lettre adressée à M. M. Lerch. Mem. della Soc. delle Scienze di Boemia, VII Serie, T. II.

1889.

168. Discours prononcé aux funérailles de M. Halphen. C. R. T. CVIII.

169. Discours lu dans la séance publique annuelle du lundi 30 décembre 1889. C. R. T. CIX.

1890.

170. Sur les polynômes de Legendre. Extrait d'une lettre adressées à M. F. Caspary. Giorn. di Crelle T. CVII.

171. Sur les racines de la fonction sphérique de seconde espèce. Extrait d'une lettre à M. Lerch. Ann. de la Fac. des Sciences de Toulouse. T. IV.

172. Sur les polynômes de Legendre. Rendic. del Circolo matematico di Palermo, T. IV.

173. Discours prononcé à l'inauguration de la nouvelle Sorbonne. Bull. des Sciences math., 2.a Serie, T. XIV.

1891.

174. Sur une formule de Jacobi concernant l'intégrale elliptique à module imaginaire. Mittheil. der Hamburg. math. Gesellschaft. T. III.

175. Leçons sur les intégrales définies, la théorie des fonctions d'une variable imaginaire et les fonctions elliptiques, faites à la Faculté des Sciences. 4.e éd. entiérement rëfondue. (Lithografié). Paris. [V. nn. 135, 161].

1892.

176. Note sur M. Kronecker. C. R. T. CXIV.

177. Sur la transformation des fonctions elliptiques. Rend. del Circolo matem. di Palermo, T. V.

178. Sur la transformation des fonctions elliptiques. Ann. de la Faculté des Sciences de Toulouse, T. VI.

179. Sur l'addition des arguments dans les fonctions elliptiques. Giorn. di Teixeira. T. XI.

180. Sur la transformation des fonctions elliptiques. Rozpravy êeske Akad. cisâre Frantiska Josefa, T. I, Prag.

1893.

181. Notice sur les travaux de M. Kummer. C. R. T. CXVI.

182. Discours [Nell'opuscolo: « *1822-1892. Jubilé de M. Hermite (24 Décembre)* ». Paris, 1893].

183. Sur une extension de la formule de Stirling. Math. Ann. T. XLI.

184. Sur la généralisation des fractions continues algébriques. Extrait d'une lettre à M. Pincherle. Annali di Matem., 2.a Serie, T. XXI.

185. Remarque sur la définition du logarithme des quantités imaginaires Casopis. T. XXII.

1894.

186. Note sur la théorie des fonctions elliptiques. Paris [inserite anche nelle ed. 4. e 5. del *Calcul différentiel* di J. A. Serret].

187. Remarques sur les nombres de Bernoulli et les nombres d'Euler. Sitzunzsber. der k. böhm. Ges. der Wiess.

188. Sur la fonction Eulérienne. Extrait d'une lettre à M. Ed. Weyr. Casopis, T. XXIII.

189. Sur une intégrale définie. Extrait d'une lettre à M. Ed. Weyr. Casopis, T. XXIII.

190. Sur les polynômes entiers à une variable. Nyt Tidsskrift for Math. T. V B.

1895.

191. Notice sur M. Cayley. C. R. T. CXX.

192. Sur le logarithme de la fonction gamma. Americ. Journal T. XVII.

193. Extrait d'une lettre adressée à M. Craig. Amer. Journal T. XVII.

194. Sur la fonction log Γ (a). Giorn. di Crelle. T. CXV.

195. Sur l'équation bicarrée. Mathésis. 2.a Serie, T. V.

196. Sur le nombres de Bernoulli. Mathésis 2. Serie T. V. Supplem.

197. Extrait d'une lettre. Bull. intern. de l'Acad. de l'Emp. François Joseph. T. I. Prag.

198. Appell et Goursat, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales.* Avec une préface de M. Hermite. Paris, 1895.

1896.

199. Sur les polynômes de Bernoulli. Extrait d'une corréspondence entre M. Sonin et M. Hermite. Giorn. di Crelle, T. CXVI.

200. Sur une extension du théorème de Laurent. Extrait d'une lettre à M. L. Fuchs. Giorn. di Crelle T. CXVI.

201. Sur une formule de M. Fontené. Bull. des Sciences math., 2. Serie. T. XX.

1897.

202. Notice sur M. Weierstrass. C. R. T. CXXIV.

203. Notice sur M. F. Brioschi. C. R. T. CXXV, 1897 [trad. ital. in questo *Bollettino*, T. I, 1898 (1)].

---

(1) A proposito di tale traduzione l' Hermite scrisse (in data 2 Marzo 1898) al direttore di questo periodico una lettera che si giudica opportuno di riprodurre qui tradotta, come illustrante i rapporti di amicizia che egli ebbe col Brioschi.

« La Sua intenzione di pubblicare una traduzione della mia Necrologia di Brioschi, di cui Ella mi dà comunicazione in termini tanto lusinghieri, mi commove estremamente. Non è un' autorizzazione che io Le do ora, sono i ringraziamenti più sinceri che io La prego di gradire, nel mentre Le esprimo quanto io mi senta onorato di essere scelto a manifestare il Suo rammarico ed i Suoi sentimenti di ammirazione pel grande matematico, per l' uomo eccellente per tante ragioni che abbiamo perduto. Quanto egli mi manca; quanto, nelle circostanze attuali, io sarei stato felice di confidargli le mie inquietudini, col consueto abbandono dell' amicizia! L' Analisi non era il solo tema delle nostre conversazioni e delle nostra corrispondenza;

204. Sur quelques développements en séries dans la théorie des fonctions elliptiques. Nel vol. pubblicato « In memoriam N. J. Lobatschevisckij », Kasan.

205. Sur quelques propositions fondamentales de la théorie des fonctions elliptiques. Papers read at the internat. mathem. Congress, Chicago.

206. Question 951. L'Intermédiaire des mathématiciens, T. IV.

1898.

207. Expression approchée de l'aire du segment d'une courbe. Mem. della Soc. di Kasan, 2.a Serie, T. VIII.

208. De la sommation d'une série considérée par Abel. Mem. della Soc. di Kasan, 2.a Serie, T. VIII.

209. Oeuvres mathématiques de Riemann, traduites par M. L. Laugel, avec une préface de Ch. Hermite, Paris.

1899.

210. Extrait d'une lettre à M. Lindelöf. Ofv. af Finska Vetenskaps Soc. Förhand., T. XL.

1900.

211. Extrait de la correspondance entre M. Ch. Hermite et V. A. Anissimoff sur la forme des intégrales des équations différentielles à coefficients périodiques. Recueil. math. publié par la Soc. math. de Moscou, T. XXI.

212. Extraits de quelques lettres à M. S. Pincherle. Annali di Matem., 3.a Serie, T. V.

1901.

213. Sulle frazioni continue. Le matematiche pure ed applicate, T. I.

NOTIZIE

Onoranze ad Eugenio Beltrami. — La facoltà di Scienze della Università di Roma, per onorare la memoria del Prof. Eugenio Beltrami, si fece iniziatrice di una sottoscrizione internazionale, i cui frutti saranno destinati alla pubblicazione delle opere complete dell' insigne scienziato, ed alla istituzione di un premio che ne ricordi ai giovani il nome illustre.

noi passavamo dall' Algebra e dal Calcolo integrale all' occupazione di Roma, a Cairoli, a Crispi, all' ore turbate e pericolose che il nostro tempo ha spesso attraversate. La sua parola aveva per me il valore che dà l'esercizio delle alte funzioni che egli ha esercitate; io non l'udrò più, ma ne è rimasta l'eco, assieme all'impressione indimenticabile della sua lealtà semplice e franca. Brioschi ha legato a Lei ed a tutti coloro che lo conobbero un ricordo pieno di rimpianto, di rispetto e d'onore; io ne sarò fedelmente e per sempre il guardiano, è dal profondo del cuore che Glielo assicuro, rinnovandole l'espressione della mia gratitudine e pregandola di credere ai miei sentimenti di alta stima e più profonda simpatia ».

La Facoltà si rivolge perciò a tutti i cultori della Scienza, sperando nel loro appoggio. Qualunque offerta verrà raccolta con grato animo; a chi sottoscriverà per una somma non inferiore a L. 50 (in oro per l'estero) sarà inviata una copia delle opere complete (tre o quattro grossi volumi di 2000 pagine complessive).

Le offerte devono essere dirette all'Ing. Isaia Sonzogno, Segretario della Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri, Piazza S. Pietro in Vincoli 5, Roma.

D'altronde la facoltà di Scienze della Università di Pavia, pochi giorni dopo la grave perdita del più eminente dei suoi membri, il prof. Eugenio Beltrami, deliberava che in quella Università dovesse erigersi un ricordo allo scienziato geniale, all'Uomo che alle somme qualità della mente unì le più pregevoli virtù dell'animo.

In quella Università egli fu iniziato agli studi matematici, in essa egli ritornò quando il suo nome era divenuto illustre nel mondo scientifico, e per quindici anni, durante l'epoca più feconda della sua attività, dettò lezioni impareggiabili per chiarezza di esposizione e profondità di dottrina. È quindi giusto che la sua memoria sia degnamente onorata nell'Ateneo, che è anche il centro dell'alta coltura per la regione che a lui diede i natali.

Il Comitato, eletto dalla Facoltà di Scienze (*Presidenza onoraria:* G. Celoria, L. Cremona, G. Schiaparelli; *Presidente effettivo:* L. Maggi; *Membri:* F. Aschieri, L. Berzolari, C. Formenti, E. Pascal, C. Somigliana) per raccogliere i fondi necessari al nobile intento, non teme che l'opera sua possa essere, anche in piccola misura, di impedimento a quelle altre onoranze di carattere nazionale, o forse più vasto, che altrove saranno tributate ad Eugenio Beltrani. E ricordando la stima universale, il grandissimo affetto di cui egli era circondato quando viveva fra noi, ha sicura fiducia che l'iniziativa della Facoltà sarà appoggiata e sostenuta da quanti hanno avuto la fortuna di conoscerlo e di apprezzarlo.

Col titolo *Solenne commemorazione del Professore Eugenio Beltrami, Senatore del Regno, n. in Cremona il 16 Novembre 1835, m. in Roma il 18 Febbraio 1900, 24 Giugno 1900* (Cremona Fezzi, 1900), venne pubblicato, per cura del Municipio di Cremona, un elegante opuscolo, adorno di un bel ritratto dell'illustre estinto, il cui principale contenuto è formato dall'interessante elogio pronunciato dal Prof. Francesco Porro, per incarico dell'autorità cittadina del luogo ove vide la luce l'autore del « Saggio d'interpretazione della geometria non-euclidea ».

Segnaliamo finalmente ai nostri lettori l'opuscolo del Prof. E. Pascal, di recente edito da U. Hoepli col titolo: EUGENIO BELTRAMI. *Discorso letto al R. Istituto Lombardo di Scienze e lettere nell'adunanza solenne del 10 gennaio 1901.*

Marco Bertolone, Direttore-Gerente

Genova - Tipografia R. Istituto Sordo-muti - 1901.

APRILE, MAGGIO E GIUGNO 1901.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. 6, per l'estero Fr. 7.50. Numeri separati L. 2 caduno. — Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

SULLA VERSIERA.

Nota di G. VACCA.

Parecchi autori si sono occupati di questa notevole curva (1): abitualmente la si fa risalire a Maria Gaetana Agnesi. Io mi propongo però di far conoscere come questa curva fosse già nota a Guido Grandi fin dal 1703, il quale già ne aveva allora misurata l'area, ed indicata una costruzione semplice; e come poi lo stesso Grandi le abbia imposto il nome che essa porta attualmente, nel 1718.

Il primo scritto di questo matematico è la « *Quadratura circuli et hyperbolae* » etc., stampata a Pisa nel 1703 e ristampata nel 1710.

La proposizione IV dice:

« Esto semicirculus... circa diameter 1K (2) cuius ab altero extremo

(1) In quasi tutti i trattati di calcolo va sotto il nome di *visiera*, o *versiera* di Agnesi, sebbene essa non se ne attribuisca l'invenzione. Questa curva è stata oggetto di uno studio del Prof. Gino Loria (*Versiera, visiera e pseudo-versiera*, Bibl. mathematica 1897, p. 7, 33) e di parecchie domande nell'*Intermédiaire des Mathématiciens*.

(2) Il lettore è pregato di eseguire da sè le figure.

in alterius extremi tangentem KG... inclinatam IG secet peripheriam in H unde ordinetur sinus HL...

... ordinetur GD diametro IK parallela, aequalis autem ipsi IL, atque hoc semper fiat quousque per puncta D... transeat curva...

« ... Dico spatium DIKLG... ad partes G infinite extensum duplum esse quadrantis IKB... ».

In seguito nelle « *Note al trattato del Galileo del Moto naturalmente accelerato, del Padre Abate D. Guido Grandi* » (Opere di Galileo Galilei, tomo terzo Firenze, 1718) si trova il passo seguente: (p. 393) « ... la scala delle velocità sarebbe quella curva, che io descrivo nel mio libro delle quadrature alla prop. 4, nata da' seni versi, che da me suole chiamarsi la *versiera*, in latino però *versoria*...

« Stimo bene, attesa l'utilità che può ricavarsi in Meccanica da questa curva, il darne ora questa facile descrizione...

« Sia il mezzo cerchio ADBT, e nel punto estremo A lo tocchi la retta AE, a cui dall'altro termine del diametro T si conducano le rette TK, TE, seganti la periferia in D, B, ed ordinate le DS, BN nel semicircolo si compiscano i rettangoli KASC, EANV. La curva che passa pei punti A, C, V,... così determinati è la nostra *Versiera*... ».

Infine, nell'opera postuma di Newton: « *Method of Fluxions and Infinite Series* », pubblicata da John Colson soltanto nel 1736-37, (pag. 97 della traduz. di Buffon, Paris, 1740) si ritrova ancora la stessa curva, con una costruzione analoga (id., p. 117) a quella sopra riportata di G. Grandi.

Terminerò questa breve nota rilevando col Grandi (p. 401) « ... non essere altrimenti così sterili, ed inutili, come a prima faccia appariscono, e da molti si spacciano, le Geometriche speculazioni intorno alle linee curve, potendo ciascheduna avere grand' uso nelle più profonde ricerche della Fisica e della Meccanica, ... » « ... siccome non credo che Apollonio prevedesse mai, quanto dovessero un giorno essere utili per la Meccanica, per l'Ottica e per l'Astronomia, le tante proprietà da lui speculate in astratto sopra le sezioni coniche ».

Genova, 30 Marzo 1901.

RECENSIONI ED ANNUNZI

W. Ahrens. *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*. Mit. einer Tafel und vielen Figuren im Text. Leipzig, Teubner 1901, 8.° p. XII + 428 [Prezzo del vol. legato Mk. 10].

Se, come afferma l'Ozanam « les jeux de l'esprit sont de toutes les saisons et de tous les âges; ils instruisent les Jeunes, ils divertissent les Vieux, il conviennent aux Riches, et ne sont pas au-dessus de la portée des Pauvres; les deux sexes s'en peuvent accomoder sans choquer la bienséance », all'opera di cui ci apprestiamo a dare notizia tutti faranno buon viso. Siccome d'altronde « saepe notavimus, nusquam homines quam in ludicris ingenioseres esse: atque ideo ludos Mathematicorum curam mereri, non per se, sed artis inveniendi causa » (Leibniz) e « répandre dans le public des choses aussi intéressantes, c'est vulgariser les doctrines de l'Arithmétique et de la Théorie des nombres » (Ed. Lucas), così l'opera stessa merita di essere collocata al livello dei lavori prettamente scientifici. È noto che essa non è la prima di tal genere; ben lo sa l'Egregio autore il quale ebbe cura di prendere notizia di quelle precedenti, per toglierne il meglio e completarle nei punti in cui meno perfette gli apparvero.

Gli argomenti trattati dall' Ahrens sono tanto varî che per porgere al lettore un' idea approssimata di ciò che il suo libro contiene, ci è forza indicare partitamente i temi dei ventitrè capitoli di cui consta.

Cap. I. Sotto il titolo di *trasbordi difficili* l' A. raccoglie alcuni problemi aventi come tipi due questioni che i nostri lettori certamente conoscono e di cui ecco gli enunciati: « Un lupo, una pecora ed un cavolfiore devono essere trasportati da una riva all'altra di un fiume col mezzo di un battello che può contenere una sola di quelle tre cose, facendo in modo che la pecora non si trovi mai sopra una riva sola col lupo o col cavolo, affinchè non sia divorata dal primo e non mangi il secondo ». « Tre mariti gelosi si trovano con le loro mogli sulla riva di un fiume ed hanno a loro disposizione soltanto una barca capace di due persone; come regolare il passaggio affinchè mai accada che una donna si trovi senza il proprio marito in compagnia di un altro uomo? » Questi problemi, nonchè altri congeneri più difficili, si risolvono con ragionamenti semplici diretti, senza Algebra.

Cap. II. Il *problema di Tait* che serve di tipo alle questioni quì trattate è il seguente: « Dati 4 scellini e 4 sterline disposti alternativamente in quattro linee, spostarli con quattro operazioni per modo da ottenerne una disposizione in cui siano contigui gli scellini e contigue le sterline; in ogni operazione devono venire mosse soltanto due monete contigue senza alterare la loro posizione relativa ». Questo problema si generalizza subito supponendo che le monete di ciascuna specie siano n; ma si risolve in modi differenti secondochè n è pari o dispari, modi a cui si giunge senza invocare il sussidio del calcolo.

Il Cap. III — intitolato *Sistemi di numerazione* — si apre con un cenno intorno ai varî metodi che vennero proposti ed impiegati per indicare i numeri (1). Uno speciale paragrafo viene dedicato al sistema binario, adoperando il quale è possibile indicare tutti i numeri col solo uso di due caratteri 0, 1; esso funge da concetto fondamentale per parecchi giuochi più o meno difficili ed eleganti (2).

Sia lecito a chi scrive di completare le notizie date dall'A. intorno a siffatto sistema con una osservazione interessante esposta dal Kronecker in una lezione fatta all'Università di Berlino l'8 Luglio 1891. Siano $p_0, p_1, p_2, p_3 \ldots.$ i numeri primi disposti in un ordine arbitrario ma fisso, p. es. l'ordine naturale 2, 3, 5, 7, 11, ...; allora qualunque numero N potrà porsi sotto le forme $p_0^{x_0}\, p_1^{x_1}\, p_2^{x_2} \ldots$ ove $x_0\ x_1\ x_2 \ldots$ sono numeri determinati, positivi o nulli; essendo invariabile l'ordine in cui si seguono quei numeri primi si potrà scrivere: $N = \{ x_0, x_1, x_2 \ldots. \}$ Ora sopra uno qualunque dei numeri $x_0\ x_1\ x_2 \ldots.$, purchè sia maggiore di 1, si potrà operare similmente, scrivendo

$$x_k = p_0^{x_{k_0}}\, p_1^{x_{k_1}}\, p_2^{x_{k_2}} \ldots = \left[x_{k_0}\ x_{k_1}\ x_{k_2} \ldots \right]$$

e quindi ottenere:

$$N = \{ [x_{00}\ x_{01}\ x_{02} \ldots] \, [x_{10}\ x_{11}\ x_{12} \ldots] \, [x_{20}\ x_{21}\ x_{22} \ldots] \ldots \}$$

Similmente si potrà operare su ciascuno dei numeri x_{hk} differenti da 0,1 scrivendo $x_{hk} = \left(p_0^{x_{hk0}}\, p_1^{x_{hk1}}\, p_2^{x_{hk2}} \ldots \right) = \left(x_{hk0}\ x_{hk1}\ x_{hk2} \ldots \right)$ e quindi

$$N = \{ [(x_{000}\ x_{001}\ x_{002} \ldots)(x_{010}\ x_{011}\ x_{012} \ldots) \ldots], [(x_{100}\ x_{101}\ x_{102} \ldots)$$
$$(x_{110}\ x_{111}\ x_{112} \ldots) \ldots] \ldots. \}.$$

Potendosi questa operazione proseguire finchè si abbia almeno un numero > 1, si vede che, qualunque sia N, si potrà sempre rappresentarlo con una serie opportunamente ordinata di 0 e 1.

Anche gli altri sistemi di numerazione possono dare origine a ricreazioni matematiche; lo provano i due ultimi §§ del Capitolo indicato dall'opera dell'Ahrens.

---

(1) Ai sistemi enumerati dall'A. si può aggiungere quello a base 8 in cui taluni ravvisarono grandi vantaggi; *v. L'intermédiaire des mathématiciens*, Tom. VII, 1900, p. 371.

(2) Un'altra applicazione del medesimo sistema, ma di ordine differente venne fatta nel 1898 da G. Peano nella nota *La numerazione binaria applicata alla stenografia* (Atti dell'Acc. di Torino, T. XXXIV). Cfr. G. Vacca in *L'intermédiaire des mathématiciens*, T. VIII, 1901, p. 87.

Nel Cap. IV sotto il titolo di *Problemi relativi a travasi* l'A. tratta questioni proposte da geometri i quali s'inspirano al seguente problema, che si trova già in Tartaglia e Bachet: « Due amici vogliono dividere fra loro in parti eguali *otto* litri di vino; questo si trova appunto in un recipiente di otto litri; a loro disposizione si trovano poi un recipiente da *cinque* litri ed uno da *tre*, entrambi vuoti; come si può, con tali mezzi, effettuare la chiesta ripartizione? » Tale questione si generalizza supponendo prima soltanto che i tre recipienti contengano risp. a, b, c litri, poi supponendo di più che le parti dei due amici debbano essere, non eguali, ma in un assegnato rapporto; se

$$b+c-1 \leq a \leq 2b+2c+1 \quad \text{oppure} \quad b+c-2 \leq a \leq 2b+2c+1$$

la ripartizione è sempre possibile in un modo, qualunque sia il dato rapporto. Una seconda generalizzazione si ottiene supponendo che si tratti di effettuare la ripartizione fra tre amici mediante quattro recipienti.

I problemi trattati nel Cap. V, a differenza di quelli considerati nei precedenti, hanno un'importanza pratica avendo come tipo il seguente: « Una superficie piana deve essere coperta di pietre aventi la forma di poligoni regolari; quali forme si possono adoperare se si vogliono usare 1) poligoni della stessa specie, 2) poligoni di specie differenti ». Il problema con la condizione 1) è subito risolto da una proposizione, che si fa risalire alla Scuola Pitagora, secondo la quale un piano si può ricoprire soltanto con triangoli equilateri, quadrati o esagoni regolari. Il problema stesso con la condizione 2) si risolve invece con una non difficile discussione, che il lettore troverà nell'opera originale assieme ai risultati interessanti a cui guida.

Il Cap. VI comprende questioni di vario genere e varie difficoltà, interessanti, non foss'altro, per i nomi di coloro che se ne occuparono; dopo un problema risolto da Bachet, si trova quello ordinariamente designata col motto « mutus dedit nomen cocis », poi quello chiamato *battement de Monge*, e finalmente la ricerca (proposta dal Kirkmann) delle condizioni affinchè due individui possano essere ciascuno zio e nipote dell'altro.

Nel cominciare, col Cap. VII della sua opera, lo studio dei giuochi che si eseguono mediante strumenti, il nostro autore espone alcuni dati storici ed alcune considerazioni generali sulla possibilità ed il valore di una teoria *matematica* di uno di quelli che hanno per base una scacchiera. Quindi fa conoscere un procedimento per effettuare il giuoco detto *molino* o *tela* sotto la sua forma più semplice, per poi passare a quello — detto del lupo o della pecora — che si effettua sull'ordinaria scacchiera.

Il giuoco del *solitario*, la cui teoria (dovuta al Reiss) trovasi nel Cap. VIII, è quello fra i passatempi designati con tal nome di cui parla Leibniz in una lettera al Montmort del 17 Gennaio 1716. Esso si basa sull'uso di una tavola ove sono fatti 33, 37 o 41 buchi disposti risp. come segue:

```
                                                        .
    . . .             . . .                           . . .
    . . .           . . . . .                       . . . . .
. . . . . . .     . . . . . . .                   . . . . . . .
. . . . . . . ,   . . . . . . . ,               . . . . . . . . . ;
. . . . . . .     . . . . . . .                   . . . . . . .
    . . .           . . . . .                       . . . . .
    . . .             . . .                           . . .
                                                        .
```

tutti meno uno di questi buchi sono occupati da altrettante palline; la legge fondamentale del giuoco consiste in ciò che quando due buchi occupati sono seguiti in linea retta (orizzontale o verticale) da uno vuoto, si può far passare la pallina occupante il primo in quest'ultimo sopprimendo la pallina intermedia. Scopo del gioco è di far rimanere una sola palla, ripetendo un numero sufficiente di volte l'operazione additata da quella legge.

Più elevato ed importante è il tema del IX Cap.; è il *problema delle otto regine* a cui diede tanta ricomanza l'essersene occupato il sommo Gauss, il quale più volte ne tenne parola nel suo carteggio con Schumacher. Per dichiararne il contenuto ricordiamo che nel giuoco degli scacchi una regina può muoversi tanto parallelamente ai lati dello scacchiere, quanto parallelamente alle due diagonali. Ora in quel problema si tratta di « disporre in uno scacchiere di 8^2 caselle 8 regine per modo che nessuna di esse possa essere *mangiata* dalle altre ». Esso venne enunciato verso la metà del Sec. XIX ed ammette 92 soluzioni. Generalizzandolo, nasce il problema di disporre in uno scacchiere di n^2 caselle n regine per modo che nessuna possa essere *mangiata* dalle altre; per $n = 2$ o 3 il problema è insolvibile, ma per $n > 3$ esso ammette un numero finito di soluzioni che si possono trovare (come disse Gauss) con tentativi metodicamente condotti (« durch ein methodisches Tatonnieren »).

Analoga in un certo senso, ma differentissima nella sostanza, è la questione seguente, trattata nel successivo Cap. dell'opera in discorso: « quale è il numero N minimo di regine con cui si può giungere ad una regione qualsivoglia di una scacchiera contenente n^2 caselle? » Si trova che per $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ si ha ordinatamente $N = 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7$. Questioni analoghe possono proporsi riguardo alla torre, al re, ecc.; non tutte furono sino ad ora risolte.

Il nome di Eulero è collegato ad un altro celebre problema di scacchi, che egli non ha già concepito per primo, ma di cui per primo egli gettò i fondamenti per una soluzione soddisfacente. È il problema di far muovere sopra una ordinaria scacchiera un *cavallo* per modo che egli tocchi ciascuna casella una ed una sola volta. Quante belle ricerche abbia provocate, quante pregevoli soluzioni abbia ricevuto apprenderanno i lettori dal Cap. IX dell'opera che andiamo esaminando. Noi ci limitiamo a segnalarne l'esistenza ed a notare come quel problema ne abbia ispirati di analoghi, nascenti da quello, sia sorrogando il *cavallo* con la *torre*, o con altro pezzo, oppure adoperando una scacchiera a tre dimensioni. In ogni caso si presenta il problema aritmetico di trovare il numero di mosse necessario per percorrere l'intiera scacchiera.

Col Cap. XII si rientra nel dominio proprio dell'aritmetica; non appartiene infatti a questa scienza, intesa nel significato più alto, la teoria dei *quadrati magici?* Sotto questo nome s'intende infatti notoriamente un quadrato diviso in n^2 caselle, nelle quali i numeri 1, 2, ... n^2 sono disposti per modo che la somma dei numeri posti in una parallela ad un lato ovvero in una delle diagonali è sempre la stessa. Per ottenere una figura siffatta si conoscono parecchi procedimenti, alcuni applicabili quando n è dispari, altri quando n è pari. La questione si complica volendo che un quadrato resti magico togliendo da esso i $4(n-1)$ numeri che stanno sul suo contorno, che altrettanto accada pel quadrato residuo ecc.; siffatte figure, dal nome del loro inventore, si dicono *quadrati di Stifel*. Altre figure analoghe ai quadrati magici vennero considerate e costituite; il Sig. Ahrens indica sommariamente i lavori che vennero ad essi consacrati e passa nel Cap. XIII (1) a trattare con una certa diffusione di alcune nuove figure che egli chiama *quadrati di Eulero*. Tale nome viene dato ad una distribuzione degli n^2 elementi

$$\begin{array}{l} A_1\ A_2 \dots A_n \\ B_1\ B_2 \dots B_n \\ \cdot\ \ \cdot \cdot \cdot\ \ \cdot \\ L_1\ L_2 \dots L_n \end{array}$$

nelle caselle in cui è diviso un quadrato, distribuzione tale che ogni linea ed ogni colonna contenga lettere e numeri tutti fra loro differenti; essa è possibile solo quando si possono trovare due numeri p, q che siano, essi e la loro differenza $p - q$ primi con n. Aggiungendo la condizione che anche in ciascuna diagonale si trovino lettere e

(1) Riguardo alla prima delle questioni ivi studiate si vegga la recente memoria di G. Tarry, *Le problème des 36 officiers* (Ass. française, Congrès de Paris 1900).

numeri diversi, si ha invece un *quadrato di Gauss*. Ad altre condizioni poi corrispondono i quadrati detti *diabolici*, o *latini*, o *cabalistici*, ecc.

Le costruzioni di tutti questi quadrati sono problemi in cui si tratta di distribuire certi elementi con determinate condizioni; essi sono quindi analoghi a quelli *(Anordnungs—probleme)* trattati nel Cap. XIV e di cui ecco gli enunciati: I. Un certo numero di bimbi ballano in giro, come si devono distribuirli affinchè ciascuno si trovi una sola volta accanto a ciascun altro? II. Supposto che si abbiano dei fanciulli e delle fanciulle in egual numero, si domanda di trovare tutti i modi di distribuirli in giro alternatamente per modo che ogni bimbo si trovi una sola volta accanto a ciascuna bimba. III. Le ragazze di un collegio vanno ogni giorno a passeggio distribuite in tante coppie; come si deve fare ogni volta la distribuzione affinchè ogni ragazza si trovi una ed una sola volta accoppiata con ciascuna delle altre? Considerando come differenti due coppie differenti anche pel solo ordine, questo problema si trasforma in altro che, *mutatis mutandis*, si presenta nei tornei di scacchi. IV. n^2 persone vanno a passeggio distribuite in n file; trovare tutti i modi in cui ciò può accadere, quando s' imponga che mai due individui si trovino più volte nella medesima fila. V. *Problema del Kirkman.* Quindici collegiali vanno a passeggio ogni giorno in file di tre; come ordinarle ogni giorno affinchè in una settimana ciascuna si trovi nello stesso rango una volta con ognuna delle altre? Questo problema, debitamente generalizzato e spogliato dalla sua veste concreta, si presenta in alcune questioni di Algebra superiore, epperò venne studiato anche da matematici dell' altezza di Cayley e Sylvester.

Di natura analoga è il notissimo *ludus Joseph*, argomento del XV Cap. dell' opera in esame; concepito astrattamente e convenientemente generalizzato esso coincide con la seguente questione aritmetica: « Si suppongano segnati sulla periferia di un cerchio n punti e designati ordinatamente con i numeri $1, 2, \ldots, n$; si contano a partire dal punto 1 e procedendo nel senso $1\ 2 \ldots n$, d punti, e si immagina soppresso il punto d'arrivo; si ripete la stessa operazione partendo dal punto successivo $d + 1$, e così si prosegue indefinitamente; si vuol sapere qual numero porta l' e^{mo} dei punti soppressi ». Tale questione venne risolta in tutta la sua generalità verso il 1895 da H. Schubert e poi da altri.

Il Cap. XVI rappresenta un intermezzo teorico, quasi una preparazione a quei problemi ove trovano applicazione le nozioni sull'*Analysis situs* esposte in quello. Tali problemi sono trattati nei cinque capitoli seguenti, di cui ecco in breve la materia:

Cap. XVII. *Ponti e labirinti.* 1. Problema euleriano dei ponti: « Il fiume Pregel forma, biforcandosi, nelle vicinanze di Königsberg l'isola detta Kneiphof; sul fiume stesso si trovano 7 ponti, 5 dei qnali congiungono l'isola alla terraferma; è possibile percorrere successivamente tutti quei ponti passando per ciascuno una volta soltanto? » La risposta è negativa. 2. Labirinti.

Cap. XVIII. *Giuoco del dodecaedro di Hamilton.* Sotto questo nome s'intende la seguente questione proposta e risolta dal celebre inventore dei quaternioni: « Percorrere tutti gli spigoli di un dodecaedro in modo da passare successivamente per tutti i vertici, dati essendo i primi cinque che si devono incontrare ».

Cap. XIX. *Problema dei quattro colori.* L'esperienza ha dimostrato che quattro colori sono in generale necessari e sufficienti per colorire qualunque carta geografica, supponendo che le varie regioni ritratte abbiano linee non punti di confini. La dimostrazione di tale fatto empirico venne tentata indarno dal Cayley prima, dal Kempe poi; essa è tuttora un *desideratum.*

Cap. XX. *Giuoco del quindici.* (« jeu du taquin » dei Francesi). Questo giuoco, inventato da un sordomuto americano, acquistò in Germania una rapidissima immensa diffusione. Lo si giuoca mediante una cassetta quadrata divisa in 16 caselle pure quadrate e mediante 15 gettoni designati coi numeri 1, 2, . . . , 15; questi vengono posti a caso in quelle caselle; spostandoli, approfittando della casella vuota, si tratta di collocarli nella seguente disposizione, considerata come normale:

(1)	(2)	(3)	(4)
(5)	(6)	(7)	(8)
(9)	(10)	(11)	(12)
(13)	(14)	(15)	

La teoria matematica di questo giuoco di pazienza è dovuta a due matematici americani: Johnson e Story. Il giuoco stesso venne modificato e complicato con ulteriori condizioni, che non è il caso di quì riferire.

Cap. XXI. *Il giuoco del domino.* Il problema generale di geometria di situazione a cui da luogo questo giuoco è la costruzione di catene di dadi succedentesi l'uno all'altro con la legge fondamentale di esso giuoco.

I due rimanenti capitoli dell'opera dell'Ahrens trattano argomenti differenti dai precedenti. Il Cap. XXII, dal titolo *Tempo e calendarî,* comincia con alcune nozioni preliminari sopra gli anni bisestili, per passare poi ad esporre un sistema di calendario universale ed i fondamenti pel calcolo dell'epoca in cui, in un determinato anno, cade la festa di Pasqua; termina con un cenno dell'eterna questione se il Sec. XX sia cominciato il 1.° Gennaio del 1900 o del 1901. Invece l'ultimo Cap. tratta delle costruzioni geometriche effettuabili mediante carta piegata; esse provengono da un matematico indiano, nostro contemporaneo, Sundara Row, e concernano la costruzione 1.° di un rettangolo, 2.° di un triangolo isoscele, 3.° di un triangolo rettangolo di dati ipotenusa e data altezza, 4.° di un esagono regolare, 5.° di un ottagono regolare, 6.° di un poligono regolare di 3, 5 o 15 lati, 7.° di un'ellisse.

Chiude l'opera un elenco cronologico dei lavori concernenti le questioni trattate nel testo (il quale comprende non meno di 340 numeri) ed un particolareggiato indice per materie.

G. L.

O. Stolz und J. A. Gmeiner. — *Theoretische Arithmetik.* I *Abtheilung: Allgemeines. Die Lehre von den rationalen Zahlen. Zweite umgearbeitete Auflage der Abschnitte* I-IV *des* I *Theiles der Vorlesungen über allgemeine Arithmetik von* O. Stolz. - Leipzig, Teubner, 1901. IV—98 p. 8.° [Prezzo Mk. 2,40].

L'opera, dei primi capitoli della quale il presente fascicolo è un rifacimento, è troppo conosciuta ed apprezzata perchè occorra qui parlarne. Riteniamo perciò sufficiente ad esaurire il nostro compito parlare dei mutamenti introdotti in questa ristampa, mutamenti i quali sono di assai maggiore portata che non appaia da un confronto sfuggevole delle due edizioni. Ciò del resto non farà meraviglia a chi conosca le molte e profonde discussioni a cui ha dato luogo il concetto di numero nei quindici anni da che sono venute in luce le *Vorlesungen.* E va data lode agli autori di aver voluto informare il libro ai risultati di tali discussioni; mentre non può negarsi che con ciò resta lievemente alterata la semplicità e la purezza primitiva delle linee architettoniche dell'opera.

I varî modi di stabilire i principî dell'aritmetica possono raggrupparsi, come è ben noto, sotto due metodi principali; quello *reale* (*sintetico* secondo Stolz), per cui il numero si considera come il rappresentante d'un insieme di oggetti riguardati come tra loro identici (unità), e quello *formale* (*analitico*), per cui si definisce il numero mediante un insieme di proprietà che si conviene di attribuirgli. Una distinzione analoga può farsi pei numeri negativi, frazionari, irrazionali, complessi. È chiaro che, dopo avere svolta una parte della teoria col metodo reale, si può sempre passare al metodo formale; così p. es., definiti i numeri naturali come rappresentanti di aggregati di unità, si possono dedurne i numeri fratti imaginando l'unità divisa in parti eguali, oppure si possono definire questi come nuovi enti tali che due di essi $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ si dicano eguali quando $ad = bc$. Non è lecito invece, evidentemente, abbandonare il metodo formale per quello reale.

Ora il piano delle *Vorlesungen* di Stolz, per la parte che si riferisce ai numeri razionali, è questo: dopo un primo capitolo d'introduzione, viene svolta nel Cap. II la teoria reale dei numeri naturali; di qui poi si diramano i Capitoli III e IV, dedicati rispettivamente alla teoria formale e a quella reale dei numeri fratti. Però, in seguito ai recenti studî che hanno mostrato come la definizione reale di numero dia luogo ad obiezioni (v. p. 12), gli autori adottano ora, pei numeri naturali, il metodo formale, che svolgono sulle tracce di Peano. Con ciò essi si precludono l'adito a far uso più oltre del metodo reale; ed infatti, mentre i vecchi titoli dei capitoli sono conservati, la nuova *teoria sintetica dei numeri razionali* (C. IV), per quanto un po' oscura nel suo principio (1), appartiene indubbiamente al tipo formale, riducendosi in sostanza a considerare le frazioni come grandezze tali che $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ quando $ad = bc$. Nè vale il dire che le frazioni vengono rappresentate mediante segmenti d'una retta (p. 74, 82); giacchè questa figura semplicemente come un' imagine (« eine anschauliche Vorstellung ») e non come una definizione. Pertanto le lezioni di Stolz, nella loro nuova veste, ci presentano l'esposizione di una teoria puramente formale del numero; e sarebbe stato desiderabile che gli autori avessero meglio posto in luce questa caratteristica della loro opera.

Accenniamo di volo ad altre modificazioni, opportunamente intese ad accrescere pregio e praticità alla nuova edizione.

a) Le teorie generali vengono applicate ai numeri scritti nel sistema decadico (p. 29) ed alle frazioni decimali (p. 86).

b) Le regole di Schröder relative alle parentesi, accennate appena in una nota nella 1.ª edizione, sono qui più largamente sviluppate (p. 8-10).

c) I principii della teoria analitica delle radici quadrate dei numeri positivi sono svolti più completamente (p. 70-73).

d) Riguardo alle *formole distributive* viene osservato espressa-

(1) « Wenn wir aus der.... Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3,.... die Vielfachen « einer von 1 verschiedenen Zahl b d. i. die Zahlen b, $2b$,...., ab,.... herausgreifen « und der Reihe nach mit [1], [2],...., [a],... bezeichnen, so haben wir damit die « natürliche Zahlenreihe wieder erzeugt. Gegenüber der neuen Einheit [1] heisst « die Einheit 1 die *Untereinheit nach dem Nenner b*... » (p. 74).

mente che esse valgono, non solo quando le due operazioni che vi figurano sono dirette, ma anche quando sono inverse, purchè possibili (p. 45).

e) Infine i varî capitoli sono accompagnati da numerosi esercizî convenientemente scelti per chiarire le idee dei lettori sugli argomenti trattati (p. 34-36, 93-98).

G. Vivanti.

Georg Scheffers. *Einführung in die Theorie der Curven in der Ebene und im Raume.* Leipzig, Veit und Co. 8.° pag. X + 360 [Prezzo Mk. 10].

Il volume che ci apprestiamo ad analizzare costituisce la prima parte di un trattato di Geometria differenziale *(Anwendung der Differential-und Integralrechnung auf die Geometrie)* e comprende lo studio delle forme ad una dimensione — cioè delle curve piane e sghembe — fatto col sussidio dell'analisi, mediante coordinate cartesiane. Benchè questo tema abbia già ricevute numerose, svariate ed ottime esposizioni, l'egregio Professore del Politecnico di Darmstadt seppe trattarlo, non solo con grande chiarezza ed eleganza, ma anche con notevole originalità, ispirandosi in gran parte alle idee dell'illustre matematico — S. Lie — del quale egli fu discepolo e collaboratore. In particolare egli seppe introdurre in uno primo studio dei concetti — quali sono quelli di equazioni intrinsica di una curva, di invarianti differenziali, di curve di lunghezza nulla — che finora erano riserbati alle classi più elevate dei cultori delle scienze esatte.

Quali sieno gli argomenti e quale l'ordine in cui si seguono emerge del seguente indice dell'opera, che riferiamo:

I. Parte. *Curve nel piano.* 1. Rappresentazione analitica delle curve piane. 2. Movimenti nel piano. 3. Tangente di una curva piana. 4. Contatto fra curve piane. 5. Indizi di contatto per rappresentazioni speciali delle curve. 6. Contatto fra una curva ed un cerchio. 7. Curvatura delle curve piane. 8. Invarianti differenziali di una curva piana. 9. Equazione intrinseca di una curva piana. 10. Curve inviluppi nel piano. 11. Evotute ed evolventi. 12. Punti singolari delle curve piane. 13. Funzioni della posizione di un punto nel piano. 14. Equazioni differenziali ordinarie nel piano. 15. Trajettoria di una schiera di curve piane. 16. Coordinate curvilinee nel piano. 17. Reti di curve nel piano. 18. Rappresentazione di un piano sopra un altro con conservazione delle aeree. 19. Linee isoterme nel piano. 20. Sistemi di curve piane, definiti da equazioni differenziali.

II. Parte. *Curve nello spazio.* 1. Sguardo alle figure esistenti nello spazio. 2. Trasformazione delle coordinate. 3. Movimenti nello spazio. 4. Movimento infinitesimo nello spazio. 5. Rappresentazione analitica delle curve sghembe. 6. Contatto fra due curve sghembe. 7. Il triedro annesso ad una curva sghemba (formato da la tangente, la normale principale e la binormale in un punto qualunque della curva). 8. Formole relative ai coseni direttori di quel triedro. 9. Il cerchio di curvatura di una curva piana. 10. Elica ordinaria osculatrice 11. Movimento elicoidale infinitesimo del triedro annesso. 12. Invarianti differenziali di una curva sghemba. 13. Lemma per l'integrazione dell' equazione intrinseca di una curva. 14. Equazioni finite di una curva avente assegnate equazioni intrinseche. 15. Esempi di equazioni intrinseche di una curva. 16. Contatti fra curve e superficie. 17. Sfera osculatrice di una curva. 18. Rappresentazione sferica di una curva. 19. Conseguenze della rappresentazione sferica. 20. Cono di rivoluzione osculatore.

III. Parte. *Curve e sviluppabili.* (1). 1. Superficie tangenziale di una curva. 2. Nozioni sopra le superficie rigate. 3. Superficie sviluppabili. 4. Definizione generale delle eliche. 5. Inviluppo di una serie di piani. 6. Filarievolventi. 7. Planevolute e planvolventi. 9. Superficie polare di una curva. 9. La superficie rettificante di una curva. 10. Curve con le medesime normali principali. 11. Il rapporto anarmonico (2). 12. Le rette di lunghezza nulla. 13. Le curve di lunghezza nulla.

Per maggiore chiarezza ed a comodo del lettore l' autore ha raccolto in una appendice le principali formole da lui stabilite distribuendole sotto le rubriche seguenti : I. Cambiamento delle coordinate. II. Relazioni fra i coseni direttori del triedro annesso ad una curva. III. Coseni direttori del triedro annesso ad una curva , e loro derivate rispetto all' arco. IV. Determiaazione di una curva mediante l' indicatrice sferica delle sue tangenti. V. Determinazione di una curva mediante l' indicatrice sferica delle sue normali principali. VI. Determinazione di una curva mediante l' indicatrice sferica delle sue binormali. VII. Elementi delle filarevolventi di una curva. VIII. Elementi delle curve parallele ad una data. IX. Elementi dello spigolo di regresso delle superficie polare di una curva. X. Elementi dello spigolo di regresso della superficie rettificante di una curva.

Senza entrare in molti particolari storici, l' autore indica per cia-

(1) « Nella presente sezione » (scrive l'autore) « noi studiamo quelle superficie e curve, che stanno con una data curva in relazione così stretta che, soltanto dopo di averla investigata, si può completare la teoria delle curve sghembe. Questa sezione serve anche di preparazione alla teoria generale delle superficie, trattandovisi di alcune specie particolari di superficie ».

(2) Questo § rappresenta una digressione nel campo della Geometria proiettiva, necessaria per l' intelligenza di ciò che segue.

scuna teoria i geometri che per primi ne trattarono e le opere migliori che vi si riferiscono. Sia lecito a noi, finendo, di aggiungere due notizie a quelle fornite dall'autore. I. L'elica cilindrica ordinaria (cioè tracciata sopra un cilindro circolare retto) osculatrice ad una curva sembra sia stata considerata per la prima volta da W. Schell; v. l'opera *Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung* (I, Aufl., 1859, p. 82 e II, Aufl., 1898, p. 119). II. La considerazione del moto infinitesimo del triedro annesso ad una curva, della quale è nota la fecondità, sembra doversi far risalire al Beltrami, il quale di quel moto determinò tutti gli elementi nella nota *Intorno ad una proprietà delle curve a doppia curvatura* (Giornale di matematiche, T. V, 1867); l'importanza di quel moto venne subito rilevata dal Chelini, che al medesimo giunse con altre considerazioni (v. lo stesso vol. del *Giornale*, p. 190-191), e fu qualche anno dopo confermata dal Beltrami nella memoria che tratta *Del moto geometrico di un solido che ruzzola sopra un altro solido* (stesso *Giornale*, Vol. X, 1872).

G. L.

Lezioni di Algebra complementare del Dott. Gregorio Ricci. Fratelli Drucker, librai-editori, Padova e Verona, 1900; 8° pag. XVII + 466. [Prezzo L. 10].

Il nome dell'autore, Professore ordinario nella R. Università di Padova, è troppo noto, perchè io non abbia a dispensarmi dal raccomandare agli studenti universitarii queste lezioni, che furono affidate alla stampa dopo successivi perfezionamenti scientifici e didattici, che il Prof. Ricci potè fare comodamente nei varii anni che le sue lezioni d'Algebra uscirono autografate. Mi limiterò quindi ad indicare rapidamente il contenuto del libro seguendone l'ordine:

Parte prima: Calcolo combinatorio. Sostituzioni. Determinanti. Equazioni lineari. Forme algebriche. (Capitoli 6).

Capitolo primo: Definizioni di combinazioni, semplici e con ripetizione; permutazioni d'elementi, tutti o non tutti differenti. Alcune formule relative ai coefficienti binomiali.

Capitolo secondo: La formula di Newton per la potenza n^{ma} d'un binomio e quella di Leibniz per la potenza n^{ma} d'un polinomio.

Capitolo terzo: Inversioni nelle permutazioni e distinzione delle permutazioni in due classi. Sostituzioni fra n elementi e loro scomponibilità in cicli indipendenti; prodotto di sostituzioni; potenze ed ordine d'una sostituzione. Gruppo di sostituzioni, gruppi simmetrico ed alternato.

Capitolo quarto: Matrici rettangolari e quadrate e loro minori.

Determinanti e loro proprietà fondamentali; minori e complementi algebrici dei medesimi; minori principali e minori coniugati: determinanti simmetrici. Sviluppo d'un determinante mediante il termine generale, secondo i minori di sua matrice parziale, secondo gli elementi d'una linea: conseguenze relative alla somma dei prodotti degli elementi d'una linea pei complementi algebrici degli elementi omologhi di una linea parallela, a determinanti a soli zeri da un lato di una diagonale, alla elevazione d'ordine d'un determinante, a determinanti con una linea d'elementi polinomici, all'addizione di quantità proporzionate agli elementi d'una linea agli omologhi elementi di una linea parallela. Caratteristica d'una matrice. Prodotto di matrici e di determinanti. Determinanti reciproci (che son definiti più razionalmente del consueto, per modo che la reciprocità è scambievole ed il prodotto di due determinanti fra loro reciproci è 1, onde per dividere per un determinante basta moltiplicare pel recipoco del medesimo). Determinanti unità, o reciproci di sè stessi, e loro relazioni caratteristiche. Come esempii di calcolo son considerati: 1° il determinante, che ha il numero $\binom{m+p+q-3}{q-1}$ per elemento comune ad orizzontale p^{ma} e verticale q^{ma}, 2° il determinante detto delle differenze, o di Vandermonde o di Cauchy.

Capitolo quinto: Equazioni lineari omogenee; soluzioni indipendenti; soluzioni fondamentali; soluzione generale e soluzione particolare; risoluzione e discussione completa dei sistemi d'equazioni lineari omogenee (tutta *la teoria è fondata su due teoremi riguardanti i casi, in cui il numero delle incognite eguaglia o supera d'un' unità quello delle equazioni*). Risoluzione dei sistemi non omogenei d'equazioni lineari, dedotta da quella dei sistemi omogenei: regola di Cramer. Dalla condizione di simultaneità delle equazioni d'un sistema omogeneo son ricavate condizioni d'indipendenza delle linee e di annullamento d'un determinante.

Capitolo sesto: Classificazione delle funzioni. Dipendenza ed indipendenza di forme lineari. Sostituzioni lineari e loro prodotti. Modulo d'un sistema di forme lineari e del suo trasformato per sostituzione lineare. Sostituzioni inverse. Sostituzioni ortogonali, destrorse e sinistrorse. Metodo di Cayley per formare tutte le sostituzioni ortogonali d'un dato ordine. Invarianti; esistenza d'un invariante assoluto in ogni forma avente due invarianti distinti. Quadriche e loro riduzione; quadriche reciproche. Invarianti comuni a due quadriche.

Parte seconda: Numeri reali e complessi. Gruppi di numeri. Successioni. Serie. (Capitolo 6).

Capitolo primo: Campo razionale, sezioni in esso e campo irrazionale. Le prime quattro operazioni, e le loro leggi fondamentali nel campo reale.

Capitolo secondo: Elevazione a potenza, estrazione di radice e di logaritmo nel campo reale, e relative leggi fondamentali. Rappresentazione dei numeri reali sulla retta.

Capitolo terzo: Vettori, numeri imaginarii e complessi. Le prime quattro operazioni nel campo complesso. Numeri complessi opposti, reciproci, coniugati. Espressione trigonometrica e rappresentazione geometrica dei numeri complessi. Elevazione a potenza ed estrazione di radice di grado intero nel campo complesso. Radici dell' unità ed equazioni binomie.

Capitolo quarto: Gruppo di punti; punti limiti e gruppo derivato. Limiti inferiore e superiore d' un gruppo di numeri; limite infinito, positivo e negativo. Gruppo limitato. Successione di numeri reali e condizione di convergenza. Alcuni teoremi riguardanti la convergenza, la divergenza e l'indeterminatezza d'una successione, e i limiti di due. Limite di una somma, di un prodotto, di un quoziente; il numero e, come limite di $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Cenno sulle successsioni di numeri complessi.

Capitolo quinto: Serie a termini reali, convergenti e divergenti ed indeterminate; criterio generale di convergenza. Divergenza della serie armonica. Convergenza e divergenza delle serie a termini positivi. Convergenza assoluta. Serie a termini di segni opposti e teorema di Riemann sull' effetto del cambiamento d' ordine nei termini. Serie a termini complessi e teorema di Dirichlet per la loro convergenza assoluta. Addizione e moltiplicazione di serie.

Capitolo sesto: Serie esponenziale. Serie che danno il seno ed il coseno d' arco reale e loro relazione con la funzione esponenziale d' esponente imaginario puro. Logaritmi e potenze nel campo complesso.

Parte terza: Nozioni sulle funzioni di una o due variabili reali. Funzioni intiere d' una variabile complessa. Equazioni algebriche. (Capitoli 8).

Capitolo primo: Funzione reale di variabile reale; sua continuità in punto ed in intervallo; limiti inferiore e superiore dei suoi valori, e loro proprietà di valori minimo e massimo nel caso di funzione continua in un intervallo. Funzioni di due variabili reali, e di una variabile complessa, finite e continue in un campo.

Capitolo secondo: Derivate e teorema di Taylor per le funzioni intere d'una variabile. Derivate di somma, di prodotto, di potenza. Teoremi relativi ai valori del modulo di una funzione intera di una variabile complessa e teorema fondamentale dell'Algebra. Regola di Ruffini.

Capitolo terzo: Funzioni prime e funzioni prime tra loro. Scomponibilità d' ogni funzione in fattori primi. Radici complesse d'un'equazione algebrica a coefficienti reali. Relazioni tra i coefficienti e le radici d' un' equazione algebrica. Divisori d' una funzione intera e massimo comun divisore di due. Radici multiple d'un'equazione algebrica e riduzione di questa ad equazioni con sole radici semplici.

Capitolo quarto: Generalità sul peso delle funzioni e sulle funzioni simmetriche. Funzioni simmetriche elementari. Funzioni simmetriche intere omogenee ed isomorfe. Formule di Girard o Newton per le funzioni simmetriche semplici. Discriminante d'un'equazione algebrica. Le funzioni simmetriche razionali, e le funzioni alternanti.

Capitolo quinto: Risultante di due equazioni algebriche, coi metodi delle funzioni simmetriche di Eulero e di Sylvester. Teorema di Bézout sul grado della risultante dell'eliminazione d'un'incognita fra due equazioni algebriche a due incognite; suo significato geometrico.

Capitolo sesto: Generalità sulle trasformazioni lineari, e trasformate elementari. Risoluzione delle equazioni di 3.° e di 4.° grado, e discussione delle formule risolventi.

Capitolo settimo: Generalità e teorema fondamentale sul numero delle radici reali d'un'equazione a coefficienti reali, compresi tra due numeri reali e relative considerazioni geometriche. Teoremi di Budan e Fourier, di Cartesio, di Rolle, di Sturm e conseguenti criterii per il numero delle radici reali d'un'equazione algebrica a coefficienti reali e per la realtà di tutte le radici.

Capitolo ottavo: Calcolo di limiti inferiori e superiori alle radici, positive e negative, d'un'equazione algebrica a cofficienti reali. Calcolo delle radici razionali. Separazione delle radici irrazionali mediante le funzioni sturmiane e loro calcolo approssimato col metodo di Newton e Fourier.

Appendice: Quadriche definite e loro caratteri. Riduzione delle quadriche a forma canonica e completa esposizione della teoria delle equazioni algebriche, da cui essa dipende. Legge d'inerzia. Applicazioni alle teorie geometriche delle coniche e delle quadriche.

F. Giudice.

Enrico Puccini. *Il concetto dell'infinitesimo nello studio della matematica elementare. Lettera aperta al Comm. Francesco Torraca.* Pistoia, Flori 1901, 8.° p. 22 [Prezzo Cent. 50].

L'idea sostenuta dall'A. di applicare i concetti di infinitesimo ed infinito a tutte le parti della Matematica risale, se non all'infanzia, almeno all'adolescenza di questa disciplina. Innumerevoli furono i tentativi intesi ad attuarla, alcuni riusciti (per quanto si riferisce ai rami più alti), altri completamente falliti; donde la ragione del generale convincimento che quei concetti, malgrado siano in apparenza semplici e naturali, sono in realtà di quelli che si rifiutano ad una trattazione, rigorosa ed elementare ad un tempo; donde anche la spiegazione dei molteplici e svariati artificì che vennero escogitati per conseguire gli stessi scopi senza ricorrere a quantità infinite od infinitesime.

Gli argomenti scelti dal Sig. Puccini per difendere la tesi che egli prese a patrocinare non riusciranno certamente a persuadere i matematici. I quali anzi, dopo di avere notato che l'autore « ripensando a quanto è stato detto, trattando del concetto d'infinitesimo nello studio della circonferenza » (p. 19) è stato condotto ad una pretesa trisezione dell'angolo *con riga e compasso*, troveranno una nuova valida ragione per equiparare il concetto d'infinitesimo ad una di quelle armi pericolose che spesso feriscono chi le adopera, ad una di quelle armi insidiose che, nelle mani di chi non è provetto, può condurre a conseguenze deplorevoli; onde riterranno che il legislatore oculato deve ben guardarsi dal concedere a tutti il diritto di servirsene! G. L.

R. Heger. *Fünfstellige logarithmische und goniometrische Tafeln. Sowie Hülfstafeln zur Auflösung höherer numerischer Gleichungen. Für den Gebrauch an höheren Schulen.* Leipzig und Berlin, G. B. Teubner, 1900 8.° gr. p. II + 112 [Prezzo del Vol. leg. Mk. 1,60].

La materia di questo volume essendo in parte differente da quella che contengono le opere aventi un titolo analogo, è necessario che indichiamo lo scopo di ciascuna delle varie sezioni che la costituiscono.

I. Tavole dei logaritmi volgari dei numeri naturali *con 5 decimali* e dei numeri da 100,000 a 110,000 *con 7 decimali.*

II. Numeri speciali: funzioni di π, numeri astronomici, misure terresteri, gravità, lunghezza del pendolo.

III. Logaritmi volgari a 5 decimali delle funzioni goniometriche, pei primi sei gradi di 10 in 10 secondi, poi di minuto in minuto.

IV. Lunghezza degli archi circolari e valori delle funzioni goniometriche.

V. Logaritmi della somma (o della differenza) di due numeri di cui riconoscono i logaritmi.

VI. Quadrati dei numeri da 100 a 999.

VII. Radici quadrate dei numeri da 100 a 999, con quattro decimali esatte.

VIII. Tavole ausiliare per la risoluzione delle equazioni cubiche. (Dà i valori delle funzioni $x \pm x^3$, ove x è un numero compreso fra 0 e 5, composto di interi, decimi e centesimi; essa serve a risolvere tutte le equazioni cubiche, perchè queste sono sempre riducibili alla forma $x^3 \pm x + A = 0$).

IX. Segmenti di parabòla. (Questa tavola dà i valori della funzione $\frac{1}{3}x^3 + x$, ove x è un numero compreso fra 0 e 10, espresso in interi, decimi, centesimi).

X. Cilindri e paraboloidi rotondi. (Valori della funzione $x^2 - x^3$ per 0.01, 0.02,..., 0.99).

XI. Zone sferiche. (Valori della funzione $x^2 - \frac{1}{3}x^3$ per gli stessi valori di x).

XII. Cono inscritto in una sfera. (Valori della funzione $x^2 - \frac{1}{2}x^3$ per $x = 0.02, 0.04, \ldots, 1{,}98$).

XIII. Cono circoscritto al cilindro. (Valori della funzione $y = x^3 : (x - 1)$ per $x = 1.30, 1.35 \ldots, 4.00$).

XIV. Cono circoscritto ad un emisfero. (Valori della funzione $y = x^3 : (x^2 - 1)$ pei suindicati valori di n).

XV. Cilindro e cono inscritti in un emisfero. (Valori della funzione $y = \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2}x^2 - x^3$ per $x = 0.01, 0.02, \ldots 0.99$).

XVI. XVII. Due cilindri con la stessa altezza in un emisfero od in un cono. (Valori delle funzioni $y = \frac{2}{5}x - x^3$, $2 = 1 - 5x + 9x^2 - 5x^3$ per $x = 0.01, 0.02, \ldots 0.50$).

XVIII. Momento di un cono circoscritto ad una sfera di raggio 1 rispetto al centro. (Valori della funzione $y = x^2 (x - 2) : (x - 1)^2$ per $x = 2.2, 2.4, \ldots, 9.2$).

XIX. Due rettangoli simili inscritti in un triangolo isoscele. (Valori della funzione $y. (x + x^3)(1 - x)$ per $x = 0.01, 0.02, \ldots, 0.99$).

XX. Momento di un triangolo isoscele circoscritto ad un cerchio di raggio 1. (Valori della funzione $y = x^5 : (x - 1)$ per $x = 1.02, 1.04, \ldots, 5.00$).

XXI. Due cilindri simili inscritti in un cono. (Valori della funzione $y = (x^2 - x^3)(1 + x^3)$ per $x = 0.01, 0.02, \ldots, 0.99$).

XXII. Settori di circolo, di ellisse e di cicloide. (Valori della funzione $\varphi - \operatorname{sen} \varphi$ per $\varphi = 1.^\circ, 2.^\circ, \ldots, 179.^\circ$).

XXIII. Divisione di un settore circolare. (Tavole, a doppia entrata, pel calcolo della funzione $\frac{1}{2}(2\psi - \operatorname{sen} 2\psi) + \operatorname{sen}^2 \varphi \cot \varphi$).

XXIV. Divisione di un segmento ciroolare. (Tavole di valori della funzione $\varphi - \operatorname{sen} \varphi + \psi - \operatorname{sen} \psi + 2 \cos \frac{\varphi - \psi}{2} + 2 \cos \frac{\varphi + \psi}{2}$).

XXV - XXVI. Segmenti ciclo-parabolici. (Tavole di valori per le funzioni $\varphi + \frac{1}{3} \operatorname{sen} \varphi$, $\varphi - \frac{1}{3} \operatorname{sen} \varphi + \frac{4}{3} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}$, ove $\varphi = 2.^\circ, 4.^\circ, \ldots, 180^\circ$).

XXVII. Baricentro di settori o archi circolari. (Valori delle funzioni $\frac{\operatorname{sen} \varphi}{\varphi}$, $\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\varphi}$ e $\frac{\operatorname{sen} \varphi}{\varphi} - \operatorname{arc} 1.^\circ \cos \varphi$ per $\varphi = 20, 25, \ldots, 45, 50, 52, \ldots, 88, 90$).

XXVIII. Equazione di Keplero per Mercurio e Marte. (Valori della funzione $\frac{\varphi}{\varepsilon}$ — sen φ, ove $\varphi = 4.°, 8.°, \ldots, 180.°$ e ε ha uno dei due valori seguenti: 0.20560, 0.09326).

XXIX. Evolvente di circolo. (Valori della fnnzione φ — arc tg φ per $\varphi = 0.05, 0{,}10, \ldots, 7.90, 8.00$).

XXX. Tavole di mortalità.

XXVI. Numeri geografici, astronomici, fisici e chimici. (Latitudine e longitudine di osservatorì astronomici, elementi dei pianeti maggiori; densità di alcuni corpi; moduli e limiti d'elasticità; pesi specifici; pesi atomici; ecc. ecc.).

Questo semplice riassunto è sufficiente a mostrare quante cose utili ed interessanti, specialmente pei cultori delle matematiche applicate, l'A. abbia saputo reccogliere in meno di sette fogli di stampa; basti ciò a raccomandarlo alla loro attenzione. G. L.

PROGRAMMI E RIASSUNTI DI CORSI UNIVERSITARI

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Geometria superiore svolto nell'anno scolastico 1900-1901.

Art. 1.° — *Sulle corrispondenze* $(n\, n')$ *e sulle involuzioni negli enti razionali semplicemente infiniti.*

Definizioni preliminari. — Principio di corrispondenza di Chasles. — Curva di una corrispondenza. — Proposizioni varie sulla moltiplicità di un elemento unito. — Esempi.

Ramo di una curva piana. — Moltiplicità di intersezione di due curve piane in un punto comune — Ramo di tangenti aderente ad un ramo di punti. — Teorema di Zeuthen sulla moltiplicità di un punto unito in una corrispondenza.

Involuzioni di 1.ª specie. — Loro razionalità — Applicazione alle curve razionali. — Involuzioni di specie r. — Loro razionalità e proposizioni varie relative ad esse.

Art. 2.° — *Sui sistemi lineari di curve piane algebriche.*

Definizioni e proposizioni preliminari. — Un sistema algebrico di cui r punti generici appartengono a una sola curva è un sistema lineare. — Osservazioni sul grado D. — Una curva generica di un sistema irriducibile non ha punti multipli variabili. — Un sistema riducibile contiene parti fisse ovvero (oltre a queste eventualmente) è una involuzione in un fascio. — I due casi di $D = o$, $D > o$.

Curve fondamentali e loro valenza. — Se un sistema lineare irriducibile di grado D è contennto parzialmente in un sistema lineare irriducibile di grado Δ, si ha $D < \Delta$. — Sistemi completi ed incompleti. — Sistemi dedotti da un sistema completo aggiungendo o togliendo una parte fissa. — Sistemi semplici e composti. — Caso in cui le curve per un punto generico hanno ivi una tangente comune. — Condizione dell'annullarsi identico del jacobiano di tre forme ternarie.

Proprietà dei sistemi irriducibili in relazione alle singolarità base (ordinarie, con tangenti variabili). — Sistemi regolari e sovrabbondanti. — Per dati punti base $\rho_1$uplo, $\rho_2$uplo, ... e per n abbastanza grande ($\geq \Sigma \rho_i$) il sistema è regolare. — Difetto di completezza. — Sistemi lineari di ordini successivi $n-1$, n, $n+1$, ... colle stesse singolarità base. — Proposizioni varie relative ad essi.

Formole. — La relazione fondamentale $D = r + p - s - 1$. — Conseguenze per il genere $p = o$, 1. — I sistemi algebrici di grado $D = 1$ e di dimensione > 1 sono sistemi omaloidici. — Serie lineare sopra una curva. — Sua dimensione. — Applicazione all'argomento precedente (dei sistemi lineari di ordini successivi).

Art. 3.° — *Sui sistemi lineari di superficie algebriche.*

Proposizioni analoghe a quelle per i sistemi di curve piane e che comportano la stessa dimostrazione. — Linee base e punti base isolati. — Grado D di un sistema. — I sistemi di grado $D = o$. — Un punto variabile comune a tre superficie generiche ($D > o$) descrive tutto lo spazio. — I sistemi algebrici di grado $= 1$ e di dimensione > 2 sono sistemi omaloidici. — Sistemi composti. — Caso in cui le superficie per un punto generico abbiano ivi la stessa tangente. — Condizione dell'annullarsi della jacobiana di quattro forme ternarie. — Esempio. — Serie lineari sopra una curva gobba o superficie.

Sistemi lineari di snperficie definiti da linee basi. — Particolare loro determinazione. — Costruzione di una superficie con dato comportamento lungo date linee basi. — Per un gruppo dato di elementi base e per un ordine sufficientemente elevato, il sistema delle curve sezione di un piano generico con un sistema di superficie è regolare e completo. — Formola di postulazione che ne segue.

Art. 4.° — *Sulle trasformazioni razionali e birazionali del piano e dello spazio.*

Generalità sulle trasformazioni razionali fra due piani e due spazi. — Punti corrispondenti all'intorno di un punto dello spazio semplice; nel caso generale; nel caso che il punto sia sulla jacobiana delle superficie corrispondenti a piani dello spazio multiplo; nel caso che sia punto fondamentale, cioè comune a tali superficie. — Si distinguono (per lo spazio) tre specie di punti fondamentali. — Linee fondamentali di 1.ª e 2.ª specie. — Nelle trasformazioni cremoniane le superficie fondamentali formano in ciascun spazio la jacobiana.

Trasformazione quadratica nel piano. — I casi involutori. — Formole nel caso di due o dei tre punti fondamentali infinitamente vicini. — Successione di trasformazioni quadratiche. — Trasformazioni di Ionquières. — Riduzione a tipi dei sistemi lineari di genere 0, 1. — Riduzione di un fascio di curve razionali e di una rete omaloidica.

Costruzione dei sistemi omaloidici a cui appartiene una data superficie razionale. — Una quadrica appartiene a tre specie di sistemi omaloidici. — Determinazione delle parti di jacobiana corrispondenti, in una trasformazione cremoniana, a linee fondamentali di 1.ª specie, mediante la rappresentazione piana di superficie dei sistemi omaloidici. — Le trasformazioni cremoniane (22), (23), (24). — Rappresentazione piana di una superficie gobba di 3.° grado, di una superficie generale del 3.° ordine e di una superficie di Steiner. — Superficie di 4.° ordine con tre punti doppi conici e un tacnodo. — Trasformazione cremoniana (33) generale. — Trasformazione tetraedrale.

ART. 5.° — *Trasformazione di una curva piana in un' altra con singolarità ordinarie. — Sistemi lineari di curve piane con singolarità base qualunque.*

Riduzione di una curva piana qualunque ad un' altra curva piana con singolarità ordinarie per trasformazioni cremoniane. — Applicazione alla riduzione di un sistema lineare in un altro con punti base ordinarî e tangenti variabili. — Osservazioni sull' ordine e la classe dei successivi trasformati di un ramo di curva piana. — Scomposizione di una singolarità qualunque in punti multipli successivi. — Conseguenza per la moltiplicità d' intersezione di due curve in un punto. — Genere di una curva piana qualunque. — Teorema di Riemann. — Genere di una curva composta. — Curve aggiunte e prime polari di una data curva. — Altro carattere (di Segre) per un punto singolare rispetto ai punti multipli successivi in una stessa direzione. — Moltiplicità d' intersezione di una curva e di un ramo in un punto.

Sistemi lineari di curve piane con singolarità base qualunque. — Estensione delle denominazioni, proposizioni e formole dimostrate per singolarità basi ordinarie. — Numeri relativi ad un sistema lineare qualunque invarianti per trasformazioni cremoniane.

ART. 6.° — *Riduzione di una curva per trasformazioni cremoniane dello spazio — Riduzione di una curva piana ad un' altra con soli punti doppi.*

Riduzione di una curva piana o gobba ad un' altra con singolarità ordinarie mediante una successione di particolari trasformazioni (22).

— Riduzione di questa ad un'altra priva di singolarità mediante una successione di trasformazioni (23). — Applicazione ai fasci lineari di curve sopra una superficie.

Altra applicazione alla trasformazione biunivoca di una curva piana in un'altra curva piana fornita di soli punti doppi. — Trasformazione piana doppia con curva limite di 4.° ordine. — Applicazione di tale trasformazione a dimostrare nuovamente la proposizione precedente.

ART. 7.° — *Sulla geometria delle serie lineari sopra una curva algebrica.*

Nozioni preliminari. — Serie composte. — Teorema sulla composizione di una serie. — Numero dei punti doppi di una g_n^1. — Determinazione di ogni g_n^r per curve aggiunte. — La serie minima che contiene due g_n^r, $g_n^{r'}$ aventi a comune una g_n^ρ (e non una $g_n^{\rho+1}$) è una $g_n^{r+r'-\rho}$. — Gruppi indipendenti di una g_n^r. — Serie segnata da tutte le curve (superficie) di un dato ordine.

Serie complete e incomplete. — Seria caratteristica di un sistema lineare. — Serie residua di un gruppo di punti e di una serie rispetto ad una serie completa. — Somma di due o più serie. — Serie multipla di una serie data. — Condizioni che i punti di un gruppo presentano alla somma di più serie o ad una serie multipla.

Ordine e dimensione delle serie segnate dalle curve aggiunte. La relazione $n - r \leq p$ per una g_n^r completa. — Caso di $p = o$. — Serie speciali e non speciali. — Teorema diretto di riduzione. — Teorema delle serie speciali. — Una serie non speciale è completa o no secondochè $n - r = p$ ovvero $> p$. — Serie canonica: è l'unica g_{2p-2}^{p-1} esistente sulla curva: non ha punti fissi. — Sistema aggiunto puro: è invariantivo per trasformazioni cremoniane. — Teorema di *Riemann-Roch:* forme e conseguenze diverse. — Curve iperellittiche, ellittiche e razionali. — Modulo di una curva ellittica. — Teorema di *Clifford.* — Teorema inverso di riduzione. — Estensione del teorema di riduzione.

Condizioni affinchè una curva piana d'ordine m sia proiezione di una curva gobba di ordine m. — I due casi $m > p + 2$, $m \leq p + 2$. — Condizione affinchè una curva piana di ordine m sia proiezione di una curva gobba di ordine $m + 1$. — Teorema di *Noether* e *Lückensatz* di *Weierstrass.*

La serie k^{upla} di una data g_n^r è non speciale se $k \geq \chi = I\frac{n-2}{r-1}$. — Massimo valore π del genere per una curva contenente una g_n^r. — Teoremi di *Halphen.* — I difetti di completezza d_χ $d_{\chi+1}\ldots$ sono successivamente decrescenti e minori della deficienza di genere $\pi - p$. — Se $k > \chi + \pi - p$ il difetto di completezza è costante. — Caso delle curve piane. — Caso delle curve gobbe. — Superficie aggiunte di ordine $k \geq n - 2$ per tali curve e serie complete segnate da esse. — Tutte le superficie di ordine $k \geq n - 2$ segnano sopra una curva gobba priva di singolarità una serie completa non speciale. — Modificazione prodotta dalla presenza di punti singolari. — Il numero dei punti doppi di una curva gobba non può superare la deficienza di genere. — Postulazione di una curva gobba semplice per superficie di dato ordine, e teoremi relativi. — Curve di genere massimo; esistono sopra superficie di 2.° grado.

ART. 8.° — *Applicazione della geometria sopra una curva ai sistemi lineari di curve piane.*

Un sistema lineare è regolare o sovrabbondante secondochè la sua serie caratteristica è non speciale (ad es.° se $D > 2p - 2$ o $r > p$), ovvero non speciale. — Se $D > 2p$ o $r > p + 1$ il sistema è semplice — Per un sistema sovrabbondante ($s > o$) si ha $s \leq p - r + 1$. — Casi nei quali ha luogo il segno di eguaglianza. — Un sistema iperellittico sovrabbondante è composto con una involuzione piana di 2.° ordine. — Condizione affinchè un sistema iperellittico regolare sia composto (con una involuzione piana di 2.° ordine). — Esempio. — Un sistema lineare il cui aggiunto puro è riducibile, è iperellittico: la reciproca è vera se il sistema non è composto. — In questo caso il sistema è riducibile per trasformazione cremoniana a curve di ordine m con punto $(m - 2)^{\text{uplo}}$.

Curve fondamentali di un sistema lineare di genere $p = o, 1$. — Il genere π di una curva fondamentale non può superare la sovrabbondanza s. — Se $\pi = s$ e la serie residua della caratteristica non ha punti fissi, la curva fondamentale passa per tutti i punti base. — Nella stessa ipotesi $\pi = s$, se la curva fondamentale non passa per punti base ρ_1^{uplo}, ρ_2^{uplo}, ... esiste un sistema $\infty^{r + \Sigma \rho_i}$ che proviene dal dato soltanto col ridurre a $\rho_1 - 1$, $\rho_2 - 1$ .... le moltiplicità in quei punti.

Proprietà di un particolare sistema sovrabbondante. — Osservazioni sui gruppi di punti dipendenti per una curva di dato ordine. — Un sistema irriducibile sovrabbondante ha almeno nove punti base. — I due casi di un sistema irriducibile sovrabbondante definito da nove punti base.

Un sistema ∞^{r-1} riducibile contenuto in uno ∞^r, irriducibile, semplice e di genere $> o$ (dello stesso ordine) deve comporsi di una curva fondamentale di questo sistema e di un sistema irriducibile. — Se una curva è fondamentale per il sistema di curve passanti per un punto generico di un sistema irriducibile semplice dato e non lo è per questo, il sistema dato è razionale. — Le curve di un sistema ∞^r, d cui $p > o$ ed $r > p + 2$, che passano per un punto generico doppiamente formano un sistema ∞^{r-3} e di genere $p - 1$. — Estensione di questo teorema. — La dimensione di un sistema lineare, di genere $p > o$, non può superare $3p + 5$ (limite raggiunto). — Altra forma ed estensione del teorema. — Proprietà che ne segue per le curve μ — gonali.

E. Bertini.

NECROLOGIO

E. B. Christoffel. Il terzo fascicolo del Vol. LIV dei *Mathematische Annalen*, contiene, assieme ad un lungo ed importante lavoro del Christoffel, due articoli necrologici intorno a questo eminente matematico, scritti uno in comune da due matematici — C. F. Geiser e L. Maurer — l'altro di un filosofo — il Windelband — che dell'estinto fu collega ed amico.

Nato a Montjoie il 10 Novembre 1829 Elwin Benno Christoffel fu istruito prima nel Ginnasio di Colonia, poi nell' Università di Berlino; qui egli subì l'influenza del Dirichlet, alla quale mai più si sottrasse. Conseguita a Berlino la laura dottorale il 12 Marzo 1856 e poi il grado di libero docente nel 1859, per tre anni egli esercitò questo ufficio, finchè fu chiamato a succedere nel Politecnico di Zurigo al Dedekind. Ivi rimase sino al 1869, quando il Reuleaux lo fece nominare professore alla « Gewerbe-Akademie » di cui egli era direttore. Ma dopo tre anni, le difficoltà che incontrava a Berlino nell'adunare attorno a sè un nucleo di studenti capaci di seguire le sue dotte lezioni, lo indussero ad accettare il posto offertogli (1872) nell' Università di Strasburgo, a cui il governo tedesco stava per imprimere una vita novella. Ivi rimase per più di vent'anni, fino cioè al momento in cui chiese ed ottenne il meritato riposo; da allora in poi, fino al giorno della sua morte (15 Marzo 1900), tutta la sua energia intellettuale fu spesa a portare a compimento le investigazioni intraprese.

Del Christoffel rimangono, oltre a buon numero (35) di lavori, sui quali venne da tempo pronunciato un lusinghiero giudizio, molti scritti inediti attualmente depositati presso l'Università di Strasburgo; rimangono poi varî corsi di lezioni, pubblicando i quali verrebbe estesa oltre ai confini dell'Alsazia, la benefica influenza di chi, per consenso universale, era considerato un professore coscienzioso, efficace ed originale, come era classificato fra i matematici di primo ordine.

*
* *

Otto Boëklen nacque a Weinsberg il 12 Settembre 1821. Dopo di avere frequentate le scuole classiche di Backnang, studiò dal 1835-38 a Stuttgart nella scuola destinata a divenire l'odierno Politecnico; era sua intenzione di consacrarsi alla meccanica, ma la sua vista debole glielo impedì, sicchè si volse alla carriera dell'insegnante. Studiò in conseguenza a Tübingen negli anni 1839-41 e a Ginevra nel 1842-43; nel 1844 ottenne una cattedra nella Scuola reale di Ulm. Di qui passò successivamente a Ravensburg, a Lauffen, a Bopfingen ed a Sulz. Nel 1858 si addottorò a Tübingen, nel 1869 andò professore ad Hall e nel 1876 rettore della Scuola reale di Reutlingen; nel 1895 gli venne conferita una seconda laura *honoris causa* e tre anni dopo venne collocato a riposo. Nel 1899 si trasferì a Stuttgart, ove si spense il 20 Luglio 1900.

Un elenco completo delle pubblicazioni del Böklen (che ascendono a 105) si trova in fine della bella Necrologia che ne scrisse E. Wölffing e che venne inserita nel Fascicolo di Gennaio 1901 delle *Mathem.-naturwiss. Mittheilungen* pubblicate dal *Mathem.-naturwiss. Verein in Württenberg.*

NOTIZIE

I Premi dell' Istituto di Francia. — Nella seduta del 17 Dicembre 1900 vennero conferiti i seguenti premi:

Gran premio delle scienze matematiche (« perfezionare in qualche punto importante la ricerca delle classi di forme quadratiche a coefficienti interi e di due indeterminate ») al Prof. M. Lerch dell' Università di Friburgo (Svizzera). *Premio Francoeur* a E. Mallet. *Premio Poncelet* a L. Lecornu. Pel premio Bordin (« sviluppare e perfezionare la teoria delle superficie applicabili sul paraboloide di rivoluzione ») non si presentò alcun concorrente.

Il premio Lalande (per l'astronomia) toccò al Sig. Giacobini dell'Osservatorio di Nizza; il premio Damoiseau al Prof. J. von Heppelberg dell' Università di Graz; il premio Valz all' abbate Verschaffel direttore dell' osservatorio d' Abbadia ed il premio Janssen al Sig. Barnard direttore dell' osservatorio di Lick (California).

Per l' anno 1902 venne riproposto pel premio Bordin (3000 fr.; scadenza 30 Settembre 1902) il tema soprariferito, mentre come soggetto del Gran premio per le Scienze matematiche venne assegnato il seguente: *Perfezionare, in un punto importante, l' applicazione della teoria dei gruppi continui allo studio delle equazioni a derivate parziali.* Finalmente l'Accademia accorderà il premio Damoiseau (1500 fr.; scadenza 1.° Giugno 1902) a chi *completerà la teoria di Saturno data da Leverrier, facendo conoscere le formole rettificative capaci di stabilire l'accordo fra le osservazioni e la teoria.*

*
* *

TEMA DI MATEMATICA PROPOSTO DALLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE ESATTE FISICHE E NATURALI DI MADRID: « I matematici spagnuoli del Secolo XVI. Notizia biografica sui principali di essi. Ed esposizione succinta e critica delle opere che essi composero, stampate o non, degne di considerazione per qualche ragione ». Le memorie dei concorrenti devono essere scritte in castigliano o in latino, e presentate alla Segreteria dell' Accademia entro il 31 Dicembre 1902; il premio consiste in 1500 *pesetas* ed una medaglia d' oro.

*
* *

TEMA DI MATEMATICA RIPROPOSTO DALLA R. ACCADEMIA DI BERLINO PER L' ANNO 1905: « Risolvere completamenle qualche problema importante sino ad ora irresoluto relativo alla teoria delle superficie, applicando, possibilmente i metodi ed i principi di Steiner ». Premio Marchi 4000, Accessit Marchi 2000.

*
* *

CONGRESSO INTERNAZIONALE DI FILOSOFIA. La terza Sezione di questo congresso era intitolata: *Logica e Storia delle scienze.* Pel suo ordine del giorno (cfr. questo *Bollettino*, T. III, 1900, p. 32) era capace di destare l' interesse dei matematici. Che essi vi siano accorsi in buon numero ed abbiano preso parte attiva alle discussioni emerge dall' esteso resoconto pubblicato dalla *Revue de métaphisique et de morale* (8e Année, 1900).

*
* *

CORREZIONI ED AGGIUNTE all' *Elenco delle pubblicazioni di C. Hermite* (v. pag. 20-31 del presente volume) (1). Nel n. 29 si deve leggere G. di Crelle LII e nel n. 109, LXXXV; nel n. 89 si deve leggere « sur

(1) In parte provenienti da amichevoli osservazioni dei Professori M. Nöther e E. Wölffing, ed in parte dall'esame di un importante scritto di P. Mansion annesso al Fascicolo di Maggio 1901 di *Mathesis*.

la réduction des formes quadratiques »; il n. 92 è da togliersi non essendo opera di *Carlo* Hermite; vanno aggiunti:

1848.

Note (sur un théorème de Fermat). G. di Lionville, T. XIII.

1865.

Deux intégrales doubles. Ann. de l'Ec. norm. sup., T. II.

1866.

Nota ad uno scritto del Sylvester. Nouv. Ann., 2.ª Serie, T. V.

1868.

Due note alle *Leçons d'algèbre supérieure par* G. Salmon, *traduit par* M. Bazin (Paris).

Prefazione a: Valson, *La vie et les travaux du Baron Couchy* (Paris).

1873.

Sur l'elimination des fonctions arbitraires. Rep. of the Brit. Association.

1880.

Sur la différentiation des fonctions elliptiques par rapport au module. Astr. Nachrichten T. XCVI.

1884.

Sur les polynômes de Legendre. G. di Teixeira, VI.

1899.

Remarques sur une identité liée à la théorie des polynômes de Legendre. Ofversigt af Finsks Vetenkaps-Soc. Forh. T. XLII.

1901.

Extrait d'une lettre à M. Jahnke. Archiv. der Math. und Phys., 3.ª Serie, T. I.

Sur une équation transcendante. Ivi.

Cogliamo l' occasione propizia che ci si offre per annunciare ai nostri lettori che le opere complete dell' Hermite verranno pubblicate, per cura della famiglia, dalla casa Gauthier-Villars e sotto la direzione di E. Picard, genero dell' illustre estinto.

*
* *

Verein zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaftfn. Sotto questo titolo venne da qualche anno fondata in Germania una Società che si propone di promuovere l' insegnamento della Matematica, del Disegno geometrico, delle Scienze naturali e della Geografia, per quanto concerne lo scopo, l'estensione ed i metodi di tali scienze, nell'intento di assicurare ad esse il meritato posto. L'azione di tale Società si estende a tutto ciò che può agevolare il conreguimento dell'indicato scopo; comprende in particolare:

a) il perfezionamento dei mezzi didattici e il loro uso nell'insegnamento;

b) la preparazione degli insegnanti;

c) l'applicazione all'insegnamento dei progressi della scienza e della tecnica.

Il contributo annuale dei soci (scelti tanto fra i maestri, quanto fra tutti quelli che s'interessano alle questioni didattiche) è di Marchi 3, e dà diritto a ricevere tutte le pubblicazioni della Società, in particolare il periodico *Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften* (Verlag von O. Salle, Berlin), organo della Società testè entrato nel suo VII anno di vita.

*
* *

Catalogo generale della Libreria italiana dall'anno 1847 a tutto il 1899. Sotto questo titolo l'Associazione tipografico-libraria italiana, che ha sede a Milano, ha intrapresa la pubblicazione di un'opera di grande mole (circa 150 fogli di 16 pagine caduno, in 8.° gr. a due colonne) compilata dal Prof. Attilio Pagliaini, bibliotecario della R. Università di Genova. Il *Catalogo* è disposto in ordine alfabetico per autori e verrà corredato di un indice a materie. Esso comprende, oltre i libri stampati in Italia dal 1847 a tutto il 1899 in qualsiasi lingua, anche quelli editi all'estero in lingua italiana; vennero ommesse le pubblicazioni periodiche, quelle ufficiali del Governo, delle Provincie e dei Comuni, nonchè gli opuscoli di scarsissimo valore.

Di ogni libro è notato il cognome ed il nome dell'autore, il titolo, il luogo e l'anno di stampa, l'editore (od in mancanza il tipografo), il formato, il numero dei volumi, se più d'uno, e quello delle pagine, ed il prezzo originale di vendita. Basti ciò a provare che il *Catalogo generale della Libreria italiana* è un repertorio completo della produzione italiana di questi ultimi cinquantatre anni, epperò gioverà grandemente, non solo a librai ed editori, ma anche ai bibliografi, ai bibliofili ed agli studiosi in genere.

La pubblicazione è fatta a fascicoli mensili di 30 pagine; prezzo di ciascuno L. 2,50. (La libreria *Carlo Clausen, Torino* accetta associazioni).

*
* *

Momumento a F. Brioschi. All'appello rivolto agli scienziati di tutto il mondo civile per contribuire ad onorare solennemente Francesco Brioschi presero parte 1128 sottoscrittori. La cospicua somma raccolta venne erogata 1.° all' acquisto, da parte dell' Istituto tecnico superiore di Milano, della biblioteca lasciata dal sommo analista e della libera disposizione dei suoi scritti; 2.° alla pubblicazione dei suoi scritti matematici (il primo volume di tale collezione è già pronto per veder la luce); 3.° a collocare un ricordo presso il R. Istituto Lombardo e uno presso il Collegio degli Ingegneri; 4.° all'erezione di un monumento nel R. Istituto Tecnico Superiore. Questa ultima deliberazione fu già tradotta in atto e l' inaugurazione di quel monumento venne fatta il 13 Dicembre 1900, terzo anniversario della morte del Brioschi. I discorsi pronunziati in quell'occasione da G. Colombo, P. Blaserna, G. Celoria, G. Bardelli, nonchè dello studente F. Squassi, discorsi in cui è contemplata, da vari punti di vista, la meravigliosa attività del grande scienziato, vennero pubblicati in un elegante opuscolo dal titolo: *Inaugurazione del monumento a Francesco Brioschi, nel Regio Istituto Tecnico superiore di Milano*, XIII *Dicembre* MDCCCC. *Adesioni e rappresentanze, discorsi, elenco dei sottoscrittori* (Milano 1901).

*
* *

Pubblicazioni recenti sulla storia delle matematiche. H. Suter. *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke.* (Abhandl. zur Gesch. der mathem. Wissenschaften, X Heft, Leipzig, Teubner 1900; p. X + 278, 8.°, Mk. 14).

È una preziosa raccolta di articoli biografici e bibliografici concernenti i matematici Arabi; l' autore non solo enumera le ópere di questi, ma con scrupolosa cura indica quelli che esistono tuttora ed in quali biblioteche si trovano; è pertanto un lavoro che, se non costituisce una vera storia delle scienze esatte presso i seguaci di Maometto, ne è però la preparazione immediata.

H. Bosmans, *Le traité des sinus de Michiel Coignet* (Annales de la Soc. scientif. de Bruxelles, T. XXV, 2ᵉ Partie, 1901). Servendosi di un manoscritto esistente nella R. Biblioteca del Belgio, l'A. pubblica integralmente per la prima volta il *Traicté des sinus, contenant un abregé pour faire les tables des sinus, par laijde desquelles se feront les tables des tangents et secantes,* corredandolo di preziose note esplicative; del *Traicté des triangles plans* dello stesso autore, facente parte del medesimo codice, il Bosmans presenta invece un semplice riassunto, dopo di avere adunati con cura tutti i dati concernenti la vita e le opere del Coignet.

M. Simon. *Euclid und die sechs planimetrischen Bücher. Mit. Benutzung der Textausgabe von Heiberg* (Abh. zur Gesch. d. mathem. Wiss. XI Heft. Leipzig, Teubner 1901; p. VII + 141. Prezzo Mk. 5). L'A., che è un sincero ammiratore del metodo euclideo, col presente opuscolo si è proposto di diffondere in Germania la conoscenza degli

Elementi; a tale scopo egli presenta una traduzione commentata dei primi sei libri — secondo il testo pubblicato dall' Heiberg — dopo di avere, in una succosa introduzione, date notizie biografiche e bibliografiche sopra Euclide, i suoi lavori ed i suoi commentatori. Benchè il celebre Alessandrino e la sua opera capitale siano notissimi fra noi, pure lo studio del coscienzioso scritto del Sig. Simon potrà tornare utile a molti anche in Italia.

M. Cantor. *Sur l'historiographie des mathématiques* (Paris, Gauthier-Villars 1901). Discorso pronunziato al Congresso internazionale dei Matematici.

*
* *

Questione posta come tema di concorso per l'anno 1902 dalla R. Accademia di Danimarca. — Si è tentato da lungo tempo di eseguire, considerando certe forme estreme costituite da rette, parecchie numerazioni concernenti le curve gobbe algebriche, e, l'anno scorso, Berzolari e Severi, fecero di tal metodo delle applicazioni ampie e continuate. Ma tale via non porge la completa certezza della generalità dei risultati che a condizione che ogni curva algebrica appartenga ad una famiglia di curve tale 1.º che i numeri in questione rimangano gli stessi per tutte le curve che esso abbraccia, e 2.º che alcune fra tali curve siano costituite di rette.

Alla prima di tali condizioni soddisfanno le famiglie risultanti dalla classificazione segnalata da Schwarz ed eseguita su larga scala da Halphen e Naether. Tutto si riduce quindi a sapere se ognuna di tale famiglia abbracci delle curve composte di rette.

Una risposta affermativa a questa questione somministrerebbe delle vere dimostrazioni per le numerazioni trovate seguendo la via indicata ed in pari tempo un mezzo sicuro per eseguirne delle nuove. Le curve composte potrebbero egualmente servire come rappresentazioni tipiche delle varie famiglie. Invece una risposta negativa limiterebbe a certe famiglie di curve la portata delle vere dimostrazioni ottenute in tal modo. Si collegherebbe a tale questione un'altra, cioè se i risultati stessi non restino veri che per quelle famiglie, oppure se quelle dimostrazioni, debitamente modificate, non permetterebbero di estenderle alle altre famiglie, od almeno, ad una parte di queste ultime.

L'Accademia propone quindi la sua medaglia d'oro (di 320 corone) per *una risposta ben giustificata della questione di sapere se ogni famiglia di curve gobbe — secondo la classificazione ordinaria — contenga delle forme limiti costituite da rette. Nel caso in cui si debba dare risposta negativa a tale domanda, si chiedono ancora delle ricerche sia sulle condizioni cui deve soddisfare una famiglia per contenerne, sia sopra la eventuale limitazione di alcuni fra i risultati conseguiti servendosi di queste forme limiti.*

I lavori dei concorrenti devono essere scritti in una delle lingue danese, svedese, tedesca, inglese, francese o latina; e devono spedirsi al Segretario dell'Accademia (Prof. H. G. Zeuthen) non più tardi del 31 Ottobre 1902; il giudizio verrà pronunziato nel Febbraio successivo.

*
* *

NEL GIORNALISMO MATEMATICO. — Un nuovo periodico di matematiche cominciò ad essere pubblicato il 1.º Febbraio 1901, sotto la direzione del Prof. C. Alasia (Oristano), dall'editore S. Lapi di Città di Castello; s'intitola: *Le matematiche pure ed applicate. Periodico mensile di matematiche pure ed applicate, superiori ed elementari, ad uso dell'istruzione media e superiore.* (Abbonamento annuo L. 10). Qualunque sia la sorte che lo attende (e noi gliel'auguriamo assai prospera), il suo nome passerà certamente alla storia, essendogli toccato l'individiabile onore di aprirsi coll'ultimo lavoro uscito dalla penna di C. Hermite.

Altri due scritti del medesimo illustre matematico contiene il primo Fascicolo dalla 3.ª Serie dell'*Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten gegründet 1841 durch J. A. Grunert;* il quale, dopo la morte dell'Hoppe, venne acquistato dalla Casa Teubner di Lipsia, che ne affidò la direzione ai Professori E. Lampe, W. Franz Meyer e E. Jahnke. È presumibile che questo giornale assumerà un'esistenza più rigogliosa, non solo per una direzione più energica e varia, ma anche perchè viene in certo modo a surrogare la *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, che — dopo il deplorato ritiro di M. Cantor — per opera del Mehmke, sarà consacrata esclusivamente alle matematiche applicate. Dell'*Archiv* usciranno ogni anno circa 6 fascicoli, 4 dei quali comporranno un volume di circa 24 fogli, il cui prezzo è fissato in 12 Mk.

I nostri lettori apprenderanno con dispiacere che col 1.º Gennaio del corrente anno cessò *El progreso mathematico*, il simpatico giornale diretto dal Prof. Galdeano. Ne prende il posto la *Revista trimestral de Matemàticas, publicada por Don José Rius y Casas, Catedratico de Análisis matemático en la Universidad de Zaragoza,* di cui usciranno annualmente 4 fascicoli di 32 pag. ciascuno (prezzo d'abbonamento 6 fr.); essa rappresenta totalmente il giornalismo matematico spagnuolo, dopo che anche l'*Archivio de matemáticas puras y aplicadas* morì assieme al suo direttore, onde è di augurarsi che la sorte le serbi una vita lunga e prospera.

Marco Bertolone, Direttore-Gerente

Genova - Tipografia R. Istituto Sordo-muti - 1901.

Luglio, Agosto e Settembre 1901.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. 6, per l'estero Fr. 7. 50. Numeri separati L. 2 caduno. — Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

IL CATALOGO INTERNAZIONALE
DELLA LETTERATURA SCIENTIFICA.

Fra le imprese collettive progettate sullo scorcio del secolo passato una delle più cospicue ed importanti è quella che, per iniziativa della Società Reale di Londra, ha per iscopo la pubblicazione annuale di un Catalogo (per autori e per materie) di tutte le opere a stampa che usciranno a partire dal 1.° Gennajo 1901. Uno dei delegati italiani alle conferenze che ebbero luogo, per tradurre in atto il progetto formulato dal più eminente sodalizio scientifico inglese, ha reso conto in modo esauriente degli studi preparatorì che vennero fatti e delle conclusioni che essi diedero (1). Ciò che i nostri lettori desiderano certo

(1) R. Nasini. *Il catalogo internazionale di letteratura scientifica* (Atti del R. Ist. Veneto. Parte II, 1900-1901, p. 239-257; Nuova Antologia, Giugno 1901).

più di tutto di conoscere (e che agli or citati lavori non apprenderanno) è quali siano i criteri ed i metodi che presiedettero all'ordinamento per materia delle scienze esatte; per soddisfarli crediamo opportuno riprodurre qui gli indici concernenti le *Matematiche pure* e la *Meccanica*.

(*A*) Matematiche pure.

0000 Filosofia.
0010 Storia. Biografia.
0020 Periodici. Resoconti di istituti, società, congressi, ecc.
0030 Trattati generali, libri di testo, dizionarì, bibliografie, tavole.
0040 Discorsi, lezioni, conferenze.
0050 Insegnamento.
0060 Istituti. Applicazioni pratiche.
0070 Nomenclatura.
0080 Strumenti. Modelli.
0090 Apparecchi pei calcoli. Metodi grafici.

NOZIONI FONDAMENTALI.

Fondamenti dell' aritmetica.

0400 Generalità.
0410 Numeri razionali, operazioni aritmetiche.
0420 Esistenza dei numeri irrazionali e trascendenti. Processi infiniti applicati ai numeri razionali.
0430 Teoria degli aggregati.

Algebra generale (teoria delle operazioni).

0800 Generalità.
0810 Calcolo con operazioni.
0820 Teoria generale dei numeri complessi.
0830 Quaternioni.
0840 Ausdehuungslehre. Teoria dei vettori (v. anche 6430).
0850 Matrici.
0860 Altre specie particolari di numeri complessi.
0870 Logica matematica.

Teoria dei gruppi.

1200 Generalità.
1210 Gruppi discreti d'ordine finito (compresi i gruppi di permutazioni) (v. anche 2450).
1220 Gruppi discreti d'ordine infinito (v. anche 4440).
1230 Gruppi continui d'ordine finito (v. anche 5240).
1240 Gruppi continui d'ordine infinito (v. anche 5240).

ALGEBRA E TEORIA DEI NUMERI.

Elementi dell' algebra.

1600 Generalità.
1610 Polinomì razionali; divisibilità; riducibilità.
1620 Permutazioni, combinazioni, partizioni, distribuzioni.
1630 Probabilità (incluse le combinazioni delle osservazioni).
1640 Calcolo delle differenze; interpolazione.

Sostituzioni lineari.

2000 Generalità.
2010 Determinanti.
2020 Discriminanti e risultanti.
2030 Proprietà caratteristiche e tipi delle sostituzioni lineari.
2040 Teoria generale delle forme algebriche.
2050 Forme binarie.
2060 Forme ternarie.
2070 Casi particolari concernenti le forme con più di tre variabili.

Teoria delle equazioni algebriche.

2400 Generalità.
2410 Elementi della teoria; esistenza di radici; funzioni simmetriche; funzioni razionali.
2420 Realtà, molteplicità e separazione delle radici.
2430 Equazioni degli ordini 3.° e 4.°; altre equazioni particolari.
2440 Risoluzione numerica delle equazioni.
2450 Risoluzione generale delle equazioni; teoria di Galois (v. anche 1210).
2460 Equazioni simultanee.

Teoria dei numeri.

2800 Generalità.
2810 Divisibilità; congruenze lineari.
2820 Residui quadratici.
2830 Forme binarie quadratiche.
2840 Forme quadratiche con tre o più variabili; forme bilineari.
2850 Congruenze non lineari; residui cubici e d' ordine superiore.
2860 Forme di grado superiore che non possono considerarsi come prodotti di fattori lineari.
2870 Forme di grado superiore che possono considerarsi come prodotti di fattori lineari. Numeri ideali.
2880 Applicazione delle funzioni trigonometriche all' aritmetica; divisione del circolo (ciclotomia).
2890 Applicazione all' aritmetica di altre funzioni trascendenti.
2900 Distribuzione dei numeri primi.

2910 Funzioni numeriche particolari.

2920 Irrazionalità e trascendenza di numeri speciali, quali e e π. (Per le applicazioni di funzioni aritmetiche alle funzioni algebriche v. 4010).

Analisi.

Fondamenti dell' analisi.

3200 Generalità.

3210 Teoria delle funzioni di variabili reali.

3220 Serie, prodotti infiniti ed altri processi infiniti (v. 5610-5620).

3230 Principì ed elementi del calcolo differenziale.

3240 Serie di Taylor; massimi e minimi; altre applicazioni analitiche del calcolo differenziale.

3250 Principì ed elementi del calcolo integrale.

3260 Integrali definiti (semplici).

3270 Integrali multipli.

3280 Calcolo delle variazioni.

Teoria delle funzioni di variabili complesse.

3600 Generalità.

3610 Funzioni uniformi di una variabile.

3620 Funzioni multiformi di una variabile. Superficie di Riemann.

3630 Sviluppi in serie ordinati secondo funzioni differenti dalle potenze di una variabile.

3640 Funzioni di più variabili.

Funzioni algebriche e loro integrali.

4000 Generalità.

4010 Funzioni algebriche di una variabile.

4020 Funzioni algebriche di più variabili.

4030 Funzioni logaritmiche, circolari, esponenziali.

4040 Proprietà generali delle fuzioni ellittiche e delle funzioni θ di una variabile; teoremi d'addizione (v. anche 8050, 8060).

4050 Moltiplicazione, divisione, trasformazione delle funzioni ellitiche; funzioni modulari (v. anche 4440).

4060 Integrali abeliani (v. anche 8050, 8060).

4070 Funzioni periodiche e funzioni θ di più variabili.

Altre funzioni speciali.

4400 Generalità.

4410 Funzioni euleriane.

4420 Funzioni di Legendre, di Bessel ed ipergeometriche.

4430 Altre funzioni definibili mediante integrali definiti (v. 4860).

4440 Funzioni automorfe (funzioni di Fuchs e Klein) (v. anche 1220, 4050).

4450 Altre funzioni definibili mediante equazioni differenziali lineari.
4460 Altre funzioni definibili mediante equazioni funzionali (v. anche 6030).

. Equazioni differenziali.

4800 Generalità.
4810 Teoremi d'esistenza per le equazioni differenziali ordinarie e a derivate parziali.
4820 Metodi di risoluzione e di riduzione delle equazioni differenziali ordinarie.
4830 Metodi di risoluzione e di riduzione delle equazioni a derivate parziali del I ordine (incluse le equazioni differenziali della dinamica).
4840 Metodi di risoluzione e di riduzione delle equazioni e derivate parziali di ordine superiore al I.
4850 Teoria generale delle equazioni differenziali ordinarie lineari (v. anche 4450).
4860 Integrazione delle equazioni differenziali ordinarie lineari mediante integrali definiti (v. anche 4430).
4870 Teoria generale delle equazioni ordinarie non lineari del I ordine.
4880 Teoria generale delle equazioni ordinarie non lineari d'ordine superiore al I.

Forme differenziali ed invarianti differenziali.

5200 Generalità.
5210 Forme differenziali lineari; Pfaffiani.
5220 Forme differenziali d'ordine superiore al I.
5230 Trasformazione delle forme differenziali, comprese le trasformazioni di contatto.
5240 Invarianti differenziali (v. anche 1230, 1240).

Metodi analitici connessi a problemi di Fisica.

5600 Generalità.
5610 Analisi armonica, serie di Fourier (v. anche 3220).
5620 Analisi armonica, serie differenti da quella di Fourier (v. anche 3220).
5630 Generalità sulle equazioni differenziali della fisica matematica.
5640 Integrazione per serie delle equazioni differenziali della fisica matematica.
5650 Integrazione mediante integrali definiti delle equazioni differenziali della fisica matematica.
5660 Problema di Dirichlet ed altri problemi analoghi dipendenti da condizioni pei limiti.

Equazioni alle differenze ed equazioni funzionali.

6000 Generalità.
6010 Serie ricorrenti.
6020 Soluzione delle equazioni alle differenze finite.
6030 Soluzione delle equazioni funzionali.

Geometria.

Principî.

6400 Generalità.
6410 Principî della geometria; geometria non-euclidea; iperspazio.
6420 Topologia dello spazio e dell'iperspazio.
6430 Metodi di geometria analitica (v. anche 0840).

Geometria elementare.

6800 Generalità.
6810 Planimetria; rette e circoli.
6320 Stereometria; rette, piani e sfere.
6830 Trigonometria.
6840 Geometria descrittiva; prospettiva.

Geometria delle coniche e delle quadriche.

7200 Generalità.
7210 Proprietà metriche delle coniche.
7220 Proprietà proiettive delle coniche.
7230 Sistemi di coniche (v. anche 8070).
7240 Proprietà metriche delle quadriche.
7250 Proprietà proiettive delle quadriche.
7260 Sistemi di quadriche (v. anche 8070).

Curve e superficie algebriche di ordine superiore al secondo.

7600 Generalità.
7610 Proprietà metriche delle curve piane algebriche di ordine superiore al II.
7620 Proprietà proiettive delle curve piane algebriche di ordine superiore al II.
7630 Curve piane algebriche particolari.
7640 Superficie algebriche di ordine superiore al II (v. anche 8040).
7650 Superficie algebriche particolari.
7660 Curve gobbe algebriche (v. anche 8030).

Trasformazioni e metodi generali relativi a figure algebriche.

8000 Generalità.
8010 Collineazione. Dualità.
8020 Altre trasformazioni algebriche.
8030 Gruppi di punti sopra una curva algebrica; genere delle curve; principî di corrispondenza (v. anche 7620, 7660).

8040 Gruppi di curve e di punti sopra una superficie algebrica; generi delle superficie (v. anche 7640).
8050 Applicazioni delle funzioni trascendenti alle curve algebriche (v. anche 4040-4060).
8060 Applicazioni delle funzioni trascendenti alle superficie algebriche (v. anche 4040-4060).
8070 Geometria numerativa (v. anche 7230-7260).
8080 Connessi, complessi, congruenze; elementi superiori dello spazio.
8090 Sistemi (lineari o non) di curve e superficie.
8100 Figure algebriche negli iperspazi.

Geometria infinitesimale; applicazioni alla geometria del calcolo differenziale e del calcolo integrale.

8400 Generalità.
8410 Principî della geometria infinitesimale.
8420 Geometria cinematica.
8430 Curvatura delle curve piane; altre applicazioni del calcolo differenziale alle curve piane.
8440 Curvatura delle curve sghembe; altre applicazioni del calcolo differenziale alle curve sghembe.
8450 Curvatura delle superficie; coordinate curvilinee ed altre applicazioni del calcolo differenziale alle superficie.
8460 Rettificazione e quadratura delle curve; aree e volumi delle superficie.
8470 Curve trascendenti particolari.
8480 Superficie trascendenti particolari.
8490 Figure ed elementi superiori degli iperspazi.

Geometria differenziale; applicazioni delle equazioni differenziali alla geometria.

8800 Generalità.
8810 Determinazione di curve sopra superficie.
8820 Superficie ad area minima.
8830 Superficie determinate da relazioni di curvatura e da altre proprietà differenziali.
8840 Rappresentazioni conformi o di altro genere delle superficie le une sulle altre (cfr. Geografia matematica).
8850 Deformazione delle superficie.
8860 Superficie ortogonali ed isoterme.
8870 Figure ed elementi superiori dell' iperspazio.

(*B*) Meccanica.

0000 Filosofia.
0010 Storia. Biografia.
0020 Periodici. Resoconti di istituti, società, congressi, ecc.
0030 Trattati generali, manuali, dizionarî, bibliografie, tavole.

0040 Discorsi, lezioni, conferenze.
0050 Insegnamento.
0060 Istituti, musei, collezioni. Applicazioni pratiche.
0070 Nomenclatura.

Misura delle quantità dinamiche.

0100 Generalità.
0110 Unità e dimensioni.
0120 Misura di lunghezze, aree, volumi, angoli.
0130 Misura di masse e densità.
0140 Valore numerico delle densità.
0150 Misura del tempo, cronometri.
0160 Misura della velocità, dell'accelerazione; energia d'un moto visibile.
0170 Misura delle forze; pendolo; bilancia a molla, bilancia di torsione, ecc.
0180 Costante della gravità.

Geometria e cinematica dei punti materiali e dei solidi.

0400 Generalità.
0410 Geometria delle masse; momenti d' inerzia.
0420 Cinematica astratta, compresa la composizione dei moti e degli spostamenti, moti relativi, assi mobili; « theory of screws ».
0430 Cinematica delle macchine.
0440 Analisi delle deformazioni, infinitesime e finite.

Principi della meccanica razionale.

0800 Generalità.
0810 Spazio, tempo, moto relativo, discussioni critiche.
0820 Leggi e principì della dinamica (leggi del movimento, lavoro virtuale, minima azione, ecc).

Statica dei punti materiali, dei solidi, ecc.

1200 Generalità.
1210 Composizione delle forze applicate ad un punto.
1220 Attrazioni. Teoria del potenziale
1230 Attrazioni di sistemi speciali. Ellissoidi, ecc.
1240 Statica di un solido e di un sistema di solidi. Astatica.
1250 Statica dei sistemi articolati; statica grafica.
1260 Statica dei fili e delle superficie flessibili.
1270 Stabilità dell' equilibrio.

Cinetica dei punti materiali, dei solidi ecc.

1600 Generalità.
1610 Cinetica dei punti materiali; orbita, moto ritenuto, mezzi resistenti.

1620 Cinetica dei solidi (compresa la percussione ed i movimenti iniziali prodotti dall' improvvisa soppressione d' un legame).
1630 Cinetica dei fili e delle superficie flessibili.
1640 Sistemi speciali; pendolo, trottola, giroscopio, bicicletta.
1650 Balistica (v. anche 2860).

Meccanica analitica in generale (v. anche *A* 5600-5660).
2000 Generalità.
2010 Energia cinetica e potenziale.
2020 Forme delle equazioni differenziali (compresi i sistemi dissipatori) (v. anche *A* 5630).
2030 Applicazione della prima variazione degli integrali; equazioni a derivate parziali.
2040 Equivalenza di problemi dinamici, analogie dinamiche, modelli.
2050 Sistemi ciclici: auto-equivalenza.
2060 Proprietà degli integrali, relazioni reciproche, soluzioni periodiche.
2070 Metodi per la determinazione effettiva degli integrali esatti.
2080 Metodi approssimati.
2090 Oscillazioni e moti iniziali attorno ad uno stato d' equilibrio.
2100 Oscillazioni attorno ad uno stato di movimento; stabilità ed instabilità (fuochi cinetici).

Statica e dinamica dei fluidi.
2400 Generalità.
2410 Statica dei fluidi.
2420 Stabilità dei galleggianti. Oscillazioni dei galleggianti.
2430 Cinematica dei fluidi; moti non rotatorì; sorgenti e punti di assorbimento.
2440 Movimento dei solidi in fluidi perfetti.
2450 Moto vorticoso. Vortici.
2460 Superficie libere e superficie di discontinuità. Vene.
2470 Rotazione d' una massa fluida soggetta alla gravità.
2480 Onde sopra i liquidi.
2490 Moto dei fluidi viscosi.
2500 Moto di solidi in fluidi viscosi.
2510 Flusso regolare di fluidi viscosi attraverso tubi ecc.
2520 Stabilità ed instabilità del moto dei fluidi perfetti e viscosi. Moti irregolari.
2530 Misura della pressione di un fluido. Misura della velocità di un fluido.
2540 Misura della viscosità.

Idraulica e resistenza dei fluidi.
2800 Scolo di fluidi lungo tubi.

2810 Moto dell' acqua nei canali e nei corsi d'acqua. Stazzatura.
2820 Motori idraulici. Propulsori. Pompe.
2830 Pressione del vento. Mulini a vento.
2840 Energia del vento. Aeroplani. Volo. Slancio iniziale.
2850 Resistenza delle carene. Navigazione.
2860 Movimenso attraverso l' aria; palloni areostatici, palle di cannone, ecc. (v. anche 1650).

Elasticità.

3200 Generalità.
3210 Tensioni e deformazioni; relazioni fra di esse. Energia di deformazione. Anisotropia. Cristalli (v. anche Cristallografia).
3220 Equazioni di deformazione e di movimento elastico. Soluzioni generali. Soluzioni speciali. Vibrazioni.
3230 Torsione e flessioni dei prismi.
3240 Fibre e fili estici; molle.
3250 Placche e campane elastiche.
3260 Urto e resistenza dinamica. Carichi viaggianti.
3270 Stabilità dei sistemi elastici.
3280 Principî delle costruzioni, incluse le formole approssimate per la resistenza dei materiali.
3290 Determinazione empirica delle costanti elastiche.

Resistenza dei materiali, durezza, attrito, viscosità, lubrificazione.

3600 Generalità.
3610 Elasticità imperfetta. Limiti d' elasticità.
3620 Deformazione. Condizioni di rottura.
3630 Deformazione permanente. Lavoro dell' elasticità.
3640 Durezza. Attrito fra solidi. Abrasione.
3650 Viscosità, plasticità, conducibilità, molleabilità, ecc.
3660 Pressione esercitata da terre e sabbie.
3670 Lubrificazione.

RECENSIONI ED ANNUNZI

MAX BRÜCKNER. *Vielecke und Vielfläche. Theorie und Geschichte. Mit. 7 lithographierten und 5 Lichtdruck - Doppeltafeln, sowie vielen Figuren im Text.* Leipzig, Teubner, 1900. 4.º p. VIII, 227. [Prezzo del Vol. legato Mk. 16].

Alla teoria dei poligoni piani corrisponde nello spazio la teoria dei poliedri; ma mentre la prima presenta non serie difficoltà e mediocre interesse, la seconda ha grande importanza (non solo per la Geometria, ma anche per la Cristallografia) ed offre degli ostacoli che non vennero tutti finora sormontati. Essa differisce dagli altri rami della geometria in quanto ha per soggetto degli enti che non si sanno rappresentare mediante equazioni e che, per la complicazione e varietà che presentano, riesce malagevole il concepire; essa è forse l'unica disciplina geometrica a cui l'Italia, per quanto ci consta, non ha in alcun modo contribuito. (*)

Valga a destare l'interesse dei nostri connazionali l'opera utilissima (non foss'altro per la sua suggestività) con cui il Sig. Brückner — già favorevolmente noto per un lavoro sopra i poliedri degli iperspazi — ha adunato e coordinato tutto quello che venne sino ad oggi scritto sull'indicato soggetto; opera su cui ci apprestiame a descrivere brevemente il contenuto.

A. **Teoria generale dei poligoni.** Premessa la definizione di *poligono* (piano) *completo* e di *multilatero* (piano) *completo*, nonchè di *vertici accessori* del primo e di *diagonali* del secondo, l'A. stabilisce un teorema — che egli considera come l'analogo di quello di Descartes-Eulero sui poliedri — concernente la natura dei poligoni semplici in cui n rette qualisivogliano dividono il piano in cui sono contenute, e quindi si volge a studiare esclusivamente i poligoni semplici, nel senso più generale della parola. Il perimetro di una tale figura si suppone sempre descritto in un senso determinato: e si chiama *Umfangswinkel* (angolo perimetrale?) del poligono l'angolo in cui la direzione positiva di un lato si deve fare ruotare nel senso positivo affinchè coincida con la direzione positiva del lato seguente; si chiama invece *Innenswinkel* (angolo interno) quello in cui la direzione positiva di un lato deve ruotare nel senso positivo per coincidere con la direzione negativa del lato precedente.

In qualunque poligono la somma U dei primi angoli è della forma $2\pi a$, a essendo un numero intero positivo che determina la *specie* del poligono; se invece J è la somma degli angoli interni e si suppone che n sia il numero dei lati e k quello degli angoli concavi del poligono si ha $J = [n + 2(k - a)]\pi$. Conviene introdurre la considerazione del numero $q = n + 2(k - a)$; allora si ha $J = q\pi$, e

$$a = \frac{n + 2k - q}{2};$$

e questi numeri servono a fare una enumerazione esauriente delle varie forme che può assumere un poligono d'un assegnato numero di lati. Come esempio l'A. si arresta ai casi $n = 4, 5, 6$. E passa quindi a stabilire il concetto di area di un poligono qualunque, con metodi che

(*) L'unica eccezione è rappresentata da un italiano vivente fuori d'Italia (J. Cesaro), i cui lavori non vennero considerati nell'opera che ci apprestiamo ad esaminare.

il Baltzer ha resi generalmente noti in Italia; su tale concetto si fonda un procedimento per determinare la costante a. Un'altra importante questione è risoluta dal teorema seguente: *Un poligono di un numero dispari* n *di lati può avere* $0, 1, 2, \ldots, \frac{n(n-3)}{2} - 2$ o $\frac{n(n-3)}{2}$ *punti doppi, ma non ne esiste alcuno con* $\frac{n(n-3)}{2} - 1$; *un poligono di un numero pari* n *di lati può avere* $0, 1, 2, \ldots, \frac{n(n-4)}{2}, \frac{n(n-4)}{2} + 1$ *punti doppi.* Resta tuttora insoluta la questione più generale del numero massimo di punti multipli che può avere un poligono di n lati.

B. **Poligoni particolari.** Per ottenere i più notevoli poligoni particolari conviene fissare la propria attenzione, non già sulla lunghezza dei lati o sull'ampiezza degli angoli, ma sulle figure costituite o da un lato e gli angoli del poligono aventi per vertici i suoi estremi o da un angolo del poligono ed i lati che lo comprendono. Così ogni vertice del poligono è caratterizzato dall'ampiezza dell'angolo corrispondente e dalla lunghezza dei suoi lati; e similmente ogni lato. Un poligono si chiama *equiangolo* se ha tutti i suoi vertici (nel senso sopra dichiarato) fra loro eguali, *equilatero* se ha tutti i suoi lati eguali; i poligoni equiangoli *od* equilateri formano la grande classe dei poligoni *semiregolari;* mentre quelli che sono ad un tempo equiangoli *ed* equilateri si indicano *regolari.*

Ogni poligono regolare ammette un cerchio inscritto ed uno circoscritto. Esistono $N = \frac{1}{2} n \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \ldots$ specie distinte di poligoni regolari aventi un numero n di lati espresso da $\alpha^p \beta^q \gamma^r \ldots (\alpha, \beta, \gamma \ldots$ numeri primi). L'n-golo regolare di specie $a + 1$ nasce da quello di specie a prolungandone i lati.

I poligoni semiregolari hanno tutti un numero pari di lati. Un poligono semiregolare equiangolo è sempre inscritto in una circonferenza, mentre vi sono due cerchi uno toccato da tutti i lati di posto pari, ed uno da quelli di posto dispari. Similmente un poligono equilatero ammette un cerchio inscritto e due cerchi contenenti l'uno i vertici di posto pari, l'altro quelli di posto dispari. Tanto dei poligoni semiregolari equilateri come di quelli equiangoli l'A. indica due generazioni, delle quali si serve per stabilire le espressioni dei raggi dei circoli inscritti e circoscritti, nonchè per ottenere altre relazioni metriche. Dopo un cenno delle analoghe definizioni e considerazioni che potrebbero proporsi riguardo ai poligoni sferici, l'A. fa cenno di altre specie di poligoni semiregolari piani che si potrebbero considerare, poligoni, cioè, aventi non solo due specie di vertici (e di lati), ma tre o quattro ecc.: raggiunge così i confini che possiede l'odierna teoria dei poligoni.

C. **Teoria generale dei poliedri.** La figura analoga nello spazio all'*n-gono piano completo* consta di n punti, delle $\frac{n(n-1)}{2}$ rette che a due a due li congiungono e degli $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ piani che essi determinano tre a tre; la figura correlativa è un *n-edro completo*. Da questo concetto si arriva alla nozione di poliedro semplice, che è la figura limitata di un certo numero di poligoni piani, ognuno dei quali ha comune con un altro ciascuno dei suoi lati. Nella teoria dei poliedri funge da nocciolo centrale il teorema di Descartes-Eulero, il quale viene dimostrato ed esteso a poliedri e superficie poliedriche molteplicamente convesse, bilaterali ed unilaterali. Questa generalizzazione dell'antico teorema ha una storia vasta ed interessante che l'autore espone con dottrina e lucidità meritevole di encomio incondizionato.

Riprendendo poi l'esposizione della teoria il nostro autore stabilisce due teoremi importanti, uno di Legendre e l'altro di Cauchy, relativi alla determinazione di un poliedro euleriano, per passare a far conoscere la ben nota « legge degli spigoli » di Möbius; poichè questa sussiste soltanto per poliedri bilaterali, si ottiene un criterio per distinguere questi dai poliedri unilaterali. I §§ seguenti sono destinati a stabilire con tutta generalità la nozione di volume di un poliedro, ad esporre la connessione esistente fra due poliedri polari reciproci ed il significato dei vocaboli *isomorfi* ed *allomorfi*, finalmente ad illustrare tutta la teoria precedente sopra molteplici e svariati esempi.

D. **Teoria dei poliedri euleriani.** Uno dei problemi fondamentali della teoria che ci occupa è l'enumerazione dei tipi possibili dei poliedri aventi un dato numero di facce; è una questione che Steiner ha più volte proposta, che non venne risolta e che è dubbio perfino se possa risolversi, almeno nel senso e sotto la forma prescelta dal grande geometra tedesco. L'A., senza affrontarla, si limita a esporre i fondamenti per uno studio morfologico dei poliedri euleriani.

Comincia per ciò a dedurre alcune conseguenze del teorema Descartes-Eulero, quali sarebbero le seguenti: « in ogni poliedro è sempre pari il numero delle facce imparilatere; non vi è alcun poliedro euleriano mancante tanto di facce triangolari quanto di angoli solidi triedri; non esistono poliedri di cui ogni faccia abbia più di cinque lati e ogni angolo solido più di cinque spigoli; ecc. ».

Queste proposizioni si potrebbero moltiplicare all'infinito e conducono a concepire il problema di Steiner come equivalente alla ricerca delle soluzioni dell'equazione indeterminata

$$(f_3 + f_4 + \cdots) + (v_3 + v_4 + \cdots) = 2 + S$$

ove f_i è il numero delle facce i-latere e v_i il numero degli angoli i-spigoli del poliedro; ma questa equivalenza è più apparente che reale, giacchè *non ad ogni soluzione aritmetica di quell'equazione corrisponde un effettivo poliedro euleriano:* è un fatto analogo a quello che si presenta volendo determinare con metodi aritmetici tutte le trasformazioni cremoniane di ordine determinato. Riconosciuta l'opportunità di abbandonare le considerazioni prettamente aritmetiche, si pensò di risolvere la questione di trovare tutti i poliedri di n facce, considerando dapprima quelli a sole facce triangolari o quelli a soli angoli solidi triedri e di riguardare gli altri come casi speciali ottenuti con deformazioni dai precedenti. Per gli n-edri delle due specie anzidette si ha risp.

$$F = n\,,\ S = \frac{3n}{2}\,,\ V = \frac{n}{2} + 2$$

$$F = n\,,\ S = 3n - 6\,,\ V = 2n - 4\,,$$

in quali modi poi si possano costruire siffatti poliedri, da quali geometri (Inglesi e Tedeschi) vennero immaginati e quali pregi possiedano apprendrà il lettore dall'opera originale; noi ci limiteremo a notare come la funzione

$$\sigma = 2S - 3V\,,$$

la quale ha i valori $\frac{3n}{2} - 6$ e 0 per le due dette specie di poliedri, ha in generale un valore positivo detto *grado di singolarità* del corrispondente poliedro. Ma l'ufficio di questo numero, nonchè le molteplici considerazioni ed i numerosi concetti che si presentano nello studio dell'enunciato problema, apprenderà il lettore, non da questo articolo, forzatamente breve, ma dall'opera originale.

E. **I poliedri euleriani particolari.** In questa sezione, di carattere più elementare, l'A. si occupa dei poliedri regolari e dei semiregolari, esponendo le principali proprietà (di posizione e metriche) degli uni e degli altri, non senza far conoscere lo stretto legame che esiste fra la loro costruzione e la ripartizione in poligoni regolari della superficie della sfera. Egli si è preparato a scriverla, non solo studiando i lavori che i geometri dedicarono a quelle notevoli figure, ma prendendo eziandio notizia delle ricerche che esse provocarono da parte di cristallografi: della qual cosa gli saranno grati i matematici che non sono famigliari con le ricerche mineralogiche.

F. **Poliedri particolari di specie superiore.** In questa ultima parte del suo scritto l'A. tratta di quei poliedri che, pure presentando qualche carattere straordinario, offrono una certa regolarità; quelli da lui considerati sono però tutti continui e bilaterali.

Un poliedro si dice di specie A se la somma delle aree dei poligoni determinati dai suoi angoli solidi sopra sfere concentriche di raggio eguale fra loro, è eguale a A volte la superficie totale di una fra tali sfere. Il numero A è legato ad altri elementi del poliedro da due relazioni chiamate, dal nome di chi le scoperse, *formole di Hess*, la seconda delle quali può considerarsi come un'estensione della formola di Descartes-Eulero. Fra i poliedri di specie superiore ne esistono di regolari, come se ne trovano di semiregolari analoghi a quelli di Archimede (essi vengono detti *varietà archimedee*). Uno qualunque dei primi ammette una sfera inscritta ed una circoscritta; i suoi vertici appartengono anche ad un ordinario poliedro regolare: quest'ultima osservazione conduce a costruire i poliedri regolari non convessi e a scoprire che ve ne sono 4 sorta distinte; sono le note figure a cui sono collegati i nomi di Kepler, Poinsot, Cauchy e Bertrand. Lo studio invece delle varietà archimedee venne fatto in questi ultimi trent'anni da Badoureau, Pitsch e Hess: quali risultati sieno stati così ottenuti apprenderà il lettore dalla diffusa esposizione fattane nell'opera in discorso. La quale si chiude con due brevi appendici, concernenti una le ricerche del Jordan sulla simmetria dei poliedri, l'altra sopra i poliedri anulari.

Questa relazione intorno al coscenzioso scritto del Sig. Brückner presenterebbe una imperdonabile lacuna se non contenesse un cenno delle bellissime figure che la adornano, alcune delle quali sono riproduzioni fotolitografiche riuscitissime di una ricca collezione di modelli costruiti dall'autore; esaminandole ci si forma un'idea delle forme svariatissime che possono presentare i poliedri e ci si sente attratti ad investigare le leggi che governano delle forme geometriche tanto disparate e strane.

G. L.

Heronis Alexandrini. - Opera quae supersunt omnia. Vol. II, Fasc. I. *Mechanik und Katoptrik herausgegeben und übersetzt von L. Nix und W. Schmidt.* Lipsia, Teubner 1901, 8.º, p. XLIV + 415. (Prezzo 8 Mk.).

Della *Meccanica* di Erone, oltre gli scarsi frammenti riportati da Pappo nella sua « Collezione Matematica », ci è stata conservata una traduzione araba dovuta a Costa ben Luca (IX secolo). Di questa non esistono che quattro manoscritti indipendenti, l'uno alla Biblioteca di Leida, l'altro al Museo Britannico, il terzo alla Biblioteca di S. Sofia a Costantinopoli e il quarto alla Biblioteca Kediviale del Cairo.

Una riproduzione del primo, accompagnata dalla traduzione francese e da note critiche, fu pubblicata per la prima volta dal barone Carra de Vaux, nel Journal Asiatique (1893).

Giovandosi ora delle ulteriori collazioni del de Vaux sul secondo e sul terzo dei sopradetti manoscritti, nonchè del confronto del Codice Leidense con una trascrizione di quello del Cairo, fatta eseguire a tale scopo dalla Biblioteca Reale di Berlino, il Nix ci presenta, in questo volume, una nuova edizione del testo arabo, ponendovi di fronte la traduzione tedesca, e riproducendo, in seguito ad essa, i frammenti soprammenzionati di Pappo (oltre ad un altro più breve riportato da

Eutocio nei commenti all'opera d'Archimede « *Della Sfera e del Cilindro* ») raccolti e curati dallo Schmidt. Giova notare che la parte della « Meccanica » che in tali frammenti si trova riassunta, parte che era la sola accessibile agli studiosi di storia delle scienze prima della pubblicazione del C. de Vaux e della presente del Nix, era ben lungi, come ora si vede, dall'esaurire quanto l'opera stessa conteneva di interessante dal punto di vista della ricostruzione delle idee dei Greci sui principii della meccanica.

Tra i nuovi dati che ora ci apporta a tale riguardo la pubblicazione integrale del testo arabo, sono di una importanza estrema quelli che ci forniscono la prova della conoscenza, da parte dei meccanici Greci, di quello che ora si chiama il principio dei lavori virtuali. Questo principio si trova applicato da Erone, non solo alla spiegazione del modo d'agire della leva e dell'argano (del che si riscontra già traccia nelle « *Questioni Meccaniche* » di *Aristotele*), ma anche al caso della puleggia, del cuneo e della vite; inoltre l'enunciazione che egli ne dà non è per nulla inferiore, in generalità e determinatezza, a quella che si trova negli scritti di Guidubaldo del Monte (n. 1504), maestro di Galileo, al quale ordinariamente è attribuita la scoperta e la prima enunciazione del principio stesso.

Anche per quanto riguarda la storia del concetto di *centro di gravità*, l'opera di Erone contiene dati importanti che, venendo a completare quelli che ci sono pervenuti per altra via, permettono fino a un certo punto di rintracciare il cammino seguito da Archimede, o dai suoi predecessori, per giungere alla definizione matematica di quel concetto che fu di così fondamentale importanza per lo sviluppo ulteriore della Meccanica.

E tali dati sono tanto più preziosi pel fatto che gli scritti d'Archimede a noi pervenuti, come ebbi occasione di mostrare in una Nota su tale soggetto (Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, Vol. XXXII), presuppongono l'esistenza di una introduzione, o forse anche di un'opera speciale, dedicata a tale scopo, opera della quale pur troppo non ci è rimasto che il titolo, incerto anch'esso.

Il Nix nota a proposito come il capitolo della « Meccanica » nel quale Erone riproduce i ragionamenti che conducono alla prova dell'esistenza e dell'unicità del centro di gravità (inteso, questo, nel senso di « *un punto tale che, da esso sospeso, il corpo rimanga in equilibrio, qualunque sia la sua posizione iniziale* »), per corpi di forma qualunque, sta completamente isolato dal resto del libro I in cui figura, e sarebbe più a posto alla fine del libro successivo, laddove appunto della teoria del centro di gravità è fatto uso. Ora ciò è perfettamente vero, ma non è tutto: vi è anche qualche cosa di più, che non vedo esser stato notato nè dal Nix nè dal Carra de Vaux, e cioè che le norme che Erone enuncia e deduce, nel suddetto capitolo, sul modo di calcolare la distribuzione del carico d'una trave orizzontale sui suoi appoggi, sono in completa contraddizione colle conclusioni che pure egli avrebbe potuto facilmente dedurre dalle sue vedute teoriche sui centri di gravità, vedute delle quali egli non omette, poche pagine prima, di esaltare l'importanza pratica.

Così, per esempio, per determinare qual parte del peso d'una trave (omogenea) venga a gravare sull'uno e sull'altro di due appoggi uno dei quali la sostenga a un suo estremo A e l'altro a un punto P situato tra A e l'altro estremo B, Erone ragiona come segue: « Se il punto P fosse il punto di mezzo di AB, è evidente che l'appoggio in P sopporterebbe tutto il peso della trave e l'appoggio in A non sarebbe gravato affatto. Se invece la distanza tra P e B è minore della metà di AB, l'appoggio in P, oltre a sostenere (per la stessa ragione di prima) il peso della parte di trave che va dall'estremo B al punto B′ simmettrico di tale estremo rispetto al punto P, dovrà anche contribuire a sostenere una metà del peso della rimanente parte AB′ ». Dal che egli deduce che i carichi sopportati dai due appoggi in A e in P starebbero fra loro come $\frac{AB'}{2}$ $\left(\text{cioè } \frac{AB - 2PB}{2}\right)$ sta a $BB' + \frac{AB'}{2}$ $\left(\text{cioè } \frac{AB + 2BP}{2}\right)$, mentre in realtà il valore del rapporto dei due carichi è dato da $\frac{AB - 2BP}{AB}$.

La spiegazione di questa, e delle numerose altre incongruenze dello stesso genere che si riscontrano nella « Meccanica », mi sembra si debba cercare non tanto, come opina il Nix, in ipotetiche interpolazioni o spostamenti di parti dell'opera rispetto alle rimanenti, quanto piuttosto nella natura di questa, la quale si presenta, nel suo complesso, come più somigliante a ciò che ora si chiamerebbe un « Manuale dell'Ingegnere », che non a un trattato sistematico o a un'opera scientifica nel senso più stretto della parola. Onde non deve far meraviglia che anche in essa, come nei nostri « manuali », accanto a capitoli ove sono riassunti gli elementi o le parti più salienti o più generali delle singole trattazioni teoriche, se ne trovino altre in cui le applicazioni di queste si trovano mescolate ad enunciazioni di « formole empiriche » o sono semplificate coll'aggiunta di ipotesi sussidiarie, talvolta anche non compatibili con quelle che stanno a base di teorie precedentemente esposte.

Bari, 15 Aprile 1901.

G. VAILATI.

J. Lüroth. *Vorlesungen über numerisches Rechnen.* Leipzig, Teubner, 1900, VI - 194 p. 8.° [Prezzo Mk. 8].

Queste lezioni, oltre all'interesse particolare che hanno per chiunque è chiamato ad eseguire calcoli lunghi e faticosi, presentano un interesse più generale, perchè mostrano come anche un argomento in apparenza umile ed arido possa essere trattato con vedute elevate e scientifiche. Ed invero chi legge questo libro prova la gradita sorpresa d'incontrare, in quel campo che egli credeva abbandonato alla sola pratica, una folla di concetti generali che guidano razionalmente agli scopi voluti — esecuzione dei calcoli colla maggiore esattezza e col minor lavoro possibili, e valutazione del grado di precisione ottenuto; mentre osserva con soddisfazione, come l'autore non isdegni di scendere ai più minuti particolari, dando tutti quegli avvertimenti, suggeritigli dalla lunga famigliarità col calcolo numerico, che possono valere a rendere più spedite le operazioni e meno frequenti gli errori.

Poche parole sul contenuto del libro. Esso consta di 10 capitoli. Il I contiene alcune considerazioni generali, il II tratta della addizione e moltiplicazione, il III delle macchine calcolatrici, il IV della divisione, il V delle operazioni sopra numeri approssimati, il VI, VII, VIII dell'uso delle tavole logaritmiche, il IX ed il X della risoluzione delle equazioni binomie e trinomie.

G. Vivanti.

J. Henrici und P. Treutlein. *Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Dritter Teil. Die Gebilde des körperlichen Raumes. Abbildung von einer Ebene auf eine zweite (Kegelschnitte).* Mit. 131 Figuren im Text. Zweite Auflage. Leipzig Teubner, 1901. 8° pag. VII + 192. [Prezzo del vol. legato Mk. 3, 30].

Già in altra occasione (1) chi scrive ebbe occasione di segnalare al pubblico italiano le varie doti eminenti del trattato di geometria elementare dei Sigg. Henrici e Treutlein; ora potrebbe ripetere, accentuandole anzi, le lodi allora tributategli; ma si limita ad annunciare il completamento della II edizione, indicando quello che ora contiene il III volume testè uscito:

Prima Sezione. Relazioni di posizione fra punti, rette, piani e superficie di rivoluzione. I. Determinazione della posizione di punti rette e piani. II. Posizioni opposte rispetto ad un punto, ad una retta, ad

(1) G. Loria, *Della varia fortuna di Euclide in relazione con i problemi dell'insegnamento geometrico elementare* (Periodico di matematica, 1893) n. 16.

un piano; superficie di rivoluzione. A) Figure con un centro di simmetria. B) Figure con un asse di simmetria. C) Figure con un piano di simmetria. III. Relazioni fra le facce e gli angoli diedri di un an golo triedro (inclusa la trigonometria sferica).

Seconda Sezione. Simmetria e figure solide. IV. Proiezione parallela, e proiezione da un centro di un piano sopra un piano parallelo; forme geometriche così emergenti. V. Volumi di solidi. VI. I solidi regolari

Terza Sezione. Rappresentazione di un piano su un altro; coniche. VII. Rappresentazione di figure rettilineee e di un cerchio su un cer chio. VIII. Le coniche come immagini di cerchi. IX. Relazioni metriche fra proiezioni.

Appendice. IX. Rappresentazione di figure dello spazio sopra un piano (elementi della geometria descrittiva, metodo della doppia proiezione ortogonale, assononometria, proiezione stereografica). Esercizi (in numero di 520).

Valga questo cenno ad attrarre l'attenzione dei professori delle nostre scuole secondarie (specialmente di quelli che insegnano in Istituti tecnici) sull'opera dei Prof.ri Henrici e Treutlein.

G. L.

N. Herz. *Wahrscheinlichkeits-und Ausgleichungsrechnung.* Leipzig, Goeschen, 1900. IV-381 p. e 3 tabelle. 8.° [Prezzo Mk. 8].

Questo volume è il 19.° della collezione *Schubert*, che è una serie di manuali, elementari ma rigorosamente scientifici, sulle varie parti della matematica. Esso contiene un'esposizione, in generale accurata e chiara, del calcolo delle probabilità e della teoria degli errori. Alquanto deficiente è la parte critica in qualche punto, particolarmente nel capitolo relativo alla probabilità dei giudizî e delle testimonianze, e manca un cenno, anche sommario, sulle così dette probabilità geometriche.

Il concetto di probabilità viene introdotto in modo diverso da ciò che comunemente si usa. Invece, cioè, di definire sin da principio la probabilità matematica come il rapporto del numero dei casi favorevoli al numero di quelli possibili, si conviene anzitutto che 0 rappresenti la impossibilità, e un numero positivo arbitrario G la certezza; donde segue che la probabilità sarà rappresentata da un numero positivo minore di G. Dopo ciò si osserva, che la probabilità W dell'avverarsi di uno almeno di due avvenimenti dev'essere una funzione delle probabilità W_1, W_2 relative ai singoli avvenimenti; che tale funzione dev'essere simmetrica, e che inoltre W dev'essere maggiore di W_1 e di W_2. Di qui l'autore trae la conclusione, che W dev'essere funzione *o* della somma *o* del prodotto di W_1, W_2; conclusione non del tutto giustificata, perchè ogni funzione (ad un valore) della somma e del prodotto di due quantità è una funzione simmetrica di esse. Considerando il caso di $W = f(W_1, W_2)$, l'autore, con una dimostrazione che egli stesso riconosce incompleta, viene a stabilire che dev'essere $W = W_1 + W_2$; donde si deduce facilmente l'ordinaria definizione di probabilità. Invece l'ipotesi $W = f(W_1, W_2)$ dà come espressione analitica della probabilità un esponenziale, di cui la base è una costante fissata ad arbitrio, e l'esponente è la probabilità ordinaria.

Ecco ora in breve il contenuto dei varii capitoli:

Cap. I. *Fondamenti del calcolo delle probabilità.* — Considerazioni generali. Definizione di probabilità. Probabilità totale e probabilità composta. Probabilità relativa. Legge dei grandi numeri. Probabilità *a posteriori.*

Cap. II. *Teoremi generali sulla probabilità degli avvenimenti.* — Probabilità delle cause. Teorema di Bernoulli. Teorema di Bayes.

Cap. III. *Applicazioni ai giuochi d'azzardo.* — Giuochi di dadi cubici o poliedrici. Lotterie. Giuochi di carte. Speranza matematica. Divisione della posta all'interruzione del giuoco. Problema di Pietroburgo. Speranza morale.

Cap. IV. *Applicazioni alla vita umana.* — Tavole di mortalità e problemi relativi. Vita media. Assicurazioni.

Cap. V. *Probabilità delle testimonianze, dei giudizî e dei presentimenti.*

Cap. VI. *Applicazione alle leggi naturali; calcolo di compensazione.* — Errori d'osservazione. Principio della media aritmetica, ed altre ipotesi equivalenti. Misura della precisione. Errore probabile. Errore medio. Teoria dei minimi quadrati.

G. VIVANTI.

JOHN SCHRÖDER. *Darstellende Geometrie.* I Teil: *Elemente der darstellenden Geometrie* (*Sammlung Schubert* XII). Mit 326 Figuren. Leipzig, Goeschen 1901. 8.°, p. VIII+382 [Prezzo del Vol. legato Mk. 5].

Dopo una breve introduzione sullo scopo ed i procedimenti generali proprî della Geometria descrittiva, l'A. adopera sempre proiezioni parallele, anzi, prescindendo dal I Capitolo (dedicato ad alcune generalità intorno alle proiezioni oblique), proiezioni ortogonali. Fatti conoscere i metodi per rappresentare punti, rette e piani, egli tratta della rappresentazione dei poliedri, in particolare dei poliedri regolari; poi della intersezione di essi con piani o con altri poliedri; e finalmente delle coniche. La forma elementare in cui il libro è scritto, le molte figure ed i numerosi esercizî di cui è corredato lo fanno apparire come opera destinata ad essere ben accetta nel mondo degli studenti.

G. L.

Opere matematiche di FRANCESCO BRIOSCHI. Pubblicate per cura del Comitato per le onoranze a Francesco Brioschi (G. Ascoli, E. Beltrami, G. Colombo, L. Cremona, G. Negri, G. Schiaparelli). Tomo Primo, con ritratto di F. Brioschi. Milano, U. Hoepli, 1901, 4.°, p. XI + 416 [Prezzo L. 25].

I lettori del *Bollettino* riceveranno l'annunzio della pubblicazione del Tomo I delle *Opere matematiche* di F. Brioschi con compiacenza forse eguale, ma non certo superiore a quella che prova chi è in questo momento chiamato a porgerlo loro. E se, non paghi di apprendere la esistenza di quel volume, vorranno conoscerlo *de visu* converranno con noi che l'edizione, la quale con esso s'inizia, è degno omaggio della patria riconoscente al sommo analista lombardo. — Dalla prefazione, scritta da G. Colombo, si apprende in qual modo potè progettarsi questa magnanima impresa e quali furono le persone (oltre i componenti del Comitato) che contribuirono con l'opera alla esecuzione di essa. Qui importa rilevare che « l'ordine col quale fu iniziata la pubblicazione non è nè l'ordine cronologico, nè l'ordine per materie; si è stabilito, invece, di disporre le memorie per serie, secondo i periodici nei quali vennero pubblicate.... Alla fine dell'opera si provvederà poi a dare i necessarì indici per classificare le memorie in ordine di tempo e di argomento, accompagnandoli con uno studio sulla vita scientifica dell'Autore ». Il volume testè apparso abbraccia 44 memorie, tutte pubblicate negli antichi *Annali* di Tortolini e nei successivi *Annali di Matematica.* Si chiude con un Indice alfabetico dei nomi citati, scorrendo il quale il lettore può misurare quanto numerosi siano i punti di contatto che presenta la produzione matematica del Brioschi con le investigazioni dei più reputati scienziati del Secolo XIX. Anzi, a questo proposito va avvertito come gli scritti che il Brioschi modestamente designa col nome di *articoli bibliografici*, non contengano di regola l'esposizione di idee altrui, ma osservazioni originali a lui suggerite dalla lettura di certi lavori; ciò osserviamo perchè chi non tenesse conto di questa speciale natura delle bibliografie del Brioschi, rischierebbe di attribuire ad altri cose che sono invece sua indiscutibile proprietà.

G. L.

Trattato sulle equazioni differenziali di Andrew Russel Forsyth. *Prima versione dall' Inglese di* Alfredo Arbicone. Livorno, R. Giusti, 1901, 8.°, p. xii + 337. [Prezzo L. 7].

I notevoli progressi fatti in questi ultimi trent' anni dalla teoria delle equazioni differenziali (ordinarie) avevano reso antiquato il trattato classico del Boole: quello del Forsyth ne ha preso, per consenso universale, il posto, onde fu ottima idea quella del Dott. Arbicone di intraprenderne una traduzione italiana ed è da felicitarsi che egli abbia trovato nel Giusti un editore che ne assumesse la pubblicazione. Trattandosi di uno scritto molto noto — non solo nell' originale, ma anche nella versione tedesca del Maser —, non è il caso di farne qui un' analisi particolareggiata. Solo, per uso di quelli fra i nostri lettori a cui essa non capitò sinora fra mano, indichiamo gli argomenti dei dieci capitoli di cui consta: I. Introduzione - II. Equazioni differenziali del 1.° ordine - III. Equazione lineare generale a coefficienti costanti - IV. Varì metodi d' integrazione - V. Integrazione per serie - VI. La serie ipergeometrica - VII. Integrazione mediante integrali definiti - VIII. Equazioni ai differenziali totali - IX. Equazioni alle derivate parziali del 1.° ordine - X. Equazioni alle derivate parziali di ordine superiore. — Notevole la ricca collezione di esercizì di cui l' opera è corredata.

G. L.

E. Lebon. *Traité de géométrie déscriptive et de géométrie côtée. Premier volume, à l'usage de la Classe de Mathématiques élémentaires. Troisième édition entièrement refondue.* Paris, Delalain Frères 1901, 8.°, p. vi + 280 [Prezzo 5 fr.].

Uno stile semplice, un' esposizione elementare senza essere eccessivamente prolissa, molte nitide figure ed una ricca collezione di esercizì, sono doti sufficienti per giustificare il successo di un libro che, come quello del Sig. Lebon, si dirige di preferenza agli scolari. I Professori dei nostri istituti tecnici o superiori lo tengano quindi presente nel momento in cui stanno per decidere quale libro eleggere quale testo. Noi completiamo intanto questo annunzio coll' indicare l' ordine delle materie trattate nel I volume dell' opera del Sig. Lebon, dopo avere notato che nella 3.ª ediz. di essa è tenuto il debito conto dell' idea del Mannheim di sopprimere, per quanto è possibile, nei disegni di geometria descrittiva, la linea di terra.

Geometria descrittiva. I. Definizioni e convenzioni. II. Il punto. III. La retta. IV. Disegni senza linea di terra. V. Il piano. VI. Problemi sopra la retta ed il piano. VII. Intersezioni di piani. VIII. Intersezione di una retta con un piano. IX. Rette perpendicolari; rette e piano perpendicolari. X. Rotazioni. XI. Cambiamenti dei piani di proiezione. XII. Ribaltamenti. XIII. Uso del piano di profilo. XIV. Problemi sulle distanze. XV. Problemi sopra gli angoli. XVI. Risoluzione dell'angolo triedro. XVII. Proiezioni di un poligono piano. XIII. Rappresentazioni dei poliedri. XIX. Sezioni piane dei poliedri. XX. Intersezione di un poliedro con una retta. XXI. Intersezione dei poliedri. XXII. Ombre dei poliedri. XXIII. Proiezioni di una circonferenza. XXIV. Proiezioni di un' elica.

Geometria quotata. I. Il punto e la retta. II. Il piano. III. I poliedri. IV. La superficie curva.

Problemi graduati da risolvere.

G. L.

F. Michel. *Recueil de problèmes de géométrie analytique à l'usage des classes de mathématiques speciales. Solutions des problémes donnés au concours d'admission à l'Ecole polytechnique de 1860 à 1900.* Paris, Gauthiers-Villars 1900, 8.° p. VI + 240 [Prezzo 6 fr.]

Quest' operetta contiene le soluzioni dei problemi di geometria analitica che vennero proposti dal 1860 al 1900 negli esami d'ammissione alla Scuola politecnica di Parigi. Sono quasi tutti problemi in cui i dati sono coniche o quadriche ed in cui si tratta di discutere alcune curve piane speciali (di 3.°, 4,° o 6.° ordine) connesse alle une od alle altre; onde sono questioni le quali sono alla portata degli studenti del primo corso delle Università nostre; ad essi pertanto va suggerito e consigliato lo studio della coscienziosa opera del Sig. Michel. Alla quale crescono pregio le figure accuratamente delineate e le indicazioni bibliografiche delle fonti a cui il lettore può ricorrere onde apprendere soluzioni dei problemi trattati diverse da quelle esposte nel testo. Ci sia lecito osservare che la questione proposta nel 1870 venne evidentemente ispirata dalla lettura di un passo delle *Applications d'Analyse et de Géometrie* del Poncelet (T. I, p. 454) ove è definito e caratterizzato il luogo geometrico l' esame del quale forma appunto oggetto di quella questione: tale luogo è la curva del 4.° ordine chiamato oggi *capricornoide.*

G. L.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Herausgegeben von Prof. Dr. H. Burkhardt und Prof. Dr. Franz Meyer. Leipzig. Teubner.
V. *Bollettino*, III, 1900, p. 120.

I Band. Heft 6. (1901. Prezzo Mk. 7,60). H. Weber, *Komplexe Multiplikation* (*cont. e fine*). — E. Czuber, *Wahrscheinlichkeitsrechnung.* — J. Bauschinger, *Ausgleichungsrechnung.* — J. Bauschinger, *Interpolation.* — L. von Bortkiewicz, *Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Statistik.* — G. Bohlmann, *Lebensversicherungs-Mathematik.* — D. Soliwanoff, *Differenzrechnung.* — R. Mehmke, *Numerisches Rechnen.*

IV_2 Band. Heft 1. (1901. Prezzo Mk. 3.80). M. Abraham, *Geometrische Grundbegriffe.* — A. E. H. Love, *Hydrodinamik: Physikalische Grundlegung.* — A. E. H. Love, *Hydrodinamik: Theoretische Ausführungen.*

Dr. phil. H. Lorenz dip. Ingenieur, Prof. in der Universitüt Göttingen. *Dynamik der Kurbelgetriebe, mit besonderer Berücksichtigung der Schiffsmaschinen.* Mit 66 Textfiguren. Leipzig, Teubner 1901, 8.° gr. p. IV + 156 [Prezzo Mk. 5].

Prof. Dr. H. Fenker. *Arithmetische Aufgaben. Mit besonderer Berücksichtigung von Anwendungen auf dem Gebiete der Geometrie, Physik und Chemie.* Berlin, O. Salle.

Dr. W. Krumme. *Der Unterricht in der analytischen Geometrie. Für Lehrer und zum Selbstunterricht.* Mit. 53 Fig. im Text. Berlin, O. Salle [Prezzo Mk. 6,50].

PROGRAMMI E RIASSUNTI DI CORSI UNIVERSITARI
UNIVERSITÀ DI MESSINA.

PROGRAMMA DEL CORSO

di « Complementi di matematica pei naturalisti »

(Anno scolastico 1900-01).

Preambolo.

L'aumento rapido ed incessante verificatosi, specialmente negli ultimi due secoli, nell' estensione delle conoscenze scientifiche ha avuto per effetto necessario una separazione dei vari rami di scienza, ed una specializzazione sempre maggiore dei cultori di essi, rendendo omai impossibile il riapparire di quegli ingegni multiformi del medio evo, che erano insieme medici, filosofi, astronomi, letterati, e fors'altro ancora. Però da qualche tempo si va manifestando un fenomeno, in certo modo, inverso, un mutuo riavvicinamento delle varie scienze in cerca di aiuto reciproco; vediamo la chimica da un lato, la mineralogia dall' altro, accostarsi alla fisica, la geografia alle scienze naturali, la filosofia alla biologia, l' economia politica, la statistica, e perfino le scienze biologiche, alla matematica. Ma questa nuova aura non ha ancora soffiato nei nostri organismi accademici; e molto tempo ci vorrà prima che s' introduca in essi un più razionale aggruppamento delle varie discipline ed un più facile affiatamento reciproco tra queste.

Una posizione particolarmente infelice è fatta, in questo senso, alla matematica, la quale vive isolata, senza contatto colle altre scienze, tolta a mala pena la fisica; sicchè non è frequente trovare fra noi un cultore, p. es., della zoologia, della fisiologia, della filosofia, il quale sia fornito anche di una piccola parte delle cognizioni matematiche che in altri paesi si giudicano corredo indispensabile a chi si dedica a tali scienze.

Alcune Facoltà scientifiche opportunamente stabilirono che i laureandi in chimica (e perchè non anche i mineralogisti?) abbiano a dar prova di conoscenze speciali di matematica; ma tale disposizione viene troppo spesso elusa. È appunto per tentare di stabilire, in modo più pratico, un contatto fra la matematica e le altre discipline, e particolarmente le scienze naturali, che io ho tenuto in quest' anno nell' Università di Messina un corso di lezioni sotto il titolo: *Complementi di matematica pei naturalisti.* E poichè non mi consta che un insegnamento analogo esista in alcuna delle Università nostre, ritengo utile far conoscere il programma che ho sviluppato, ed i criteri ai quali mi sono attenuto nella scelta della materia.

*
* *

La matematica, mentre ha per oggetto la ricerca delle proprietà di enti puramente ideali, si è lasciata guidare, e nella creazione di questi enti e nella scelta dei problemi da trattare a loro riguardo, dalle esigenze man mano crescenti dello studio del mondo fisico. L' affollarsi di sempre nuove incognite alla mente avida dell' uomo ha resa necessaria l' apertura di sempre nuove vie, che permettessero di *porre in equazione*, e possibilmente anche di risolvere, i problemi della natura. Nel corso dei secoli i primitivi *artifizi* divennero *metodi*, ed i metodi si fecero via via più generali e comprensivi. Ma un metodo *unico*, atto a dominare qualsiasi problema, fu creato allora soltanto che un grande matematico, il quale era anche un grande filosofo, ebbe la geniale idea di sorprendere il modo di procedere della natura e di trasportarlo nella matematica. È indubitato che la continuità notata da Leibniz nella serie degli esseri organici, che egli paragonava « alle ordinate d'una medesima curva », gli suggerì il concetto di *differenziale*, come l'osservazione, che la vita d'un organismo è la somma delle vite particolari di organismi infinitamente piccoli, gli suggerì quello di *integrale*. Così si spiega come questi due concetti vadano facendosi strada in tutte le scienze naturali, preso questo nome nel suo senso più ampio, che abbraccia non solo lo studio dei fenomeni della natura inorganica ed organica, ma anche quelli morali, intellettuali e sociali.

Creato lo *strumento* per lo studio della natura, occorreva creare l'*ente* sul quale operare; occorreva tradurre matematicamente il concetto di *legge naturale*. Una legge naturale è un modo di dipendenza tra più fenomeni, o meglio è l'espressione della nostra fiducia che tale dipendenza si mantenga costantemente quale si riscontrò nei casi osservati; essa si riduce, in ultima analisi, ad una dipendenza tra più quantità variabili insieme. Tale legame, nella sua forma più generale possibile, è espresso dalla parola *funzione*, poichè noi diciamo che, se più quantità variano dipendentemente le une dalle altre, ciascuna è funzione delle rimanenti.

I concetti di differenziale, d'integrale e di funzione, e i più elementari teoremi e sviluppi di calcolo che con essi si connettono, devono essere famigliari a chiunque si occupi di studi scientifici.

*
* *

Però, per istudiare matematicamente un fenomeno, è necessario poter sceverare le *cause* di esso, cioè le condizioni necessarie e sufficienti perchè quel fenomeno abbia luogo. Ora v'è un gran numero di fatti naturali e sociali, per cui l'assegnazione esatta delle cause appare, per ora, se non forse per sempre, impossibile. Tuttavia avviene sovente che, sebbene la determinazione delle cause d'un singolo fatto non sia possibile, l'insieme d'un gran numero di fatti congeneri appaia costantemente come la conseguenza d'un certo complesso di circostanze. Pertanto gli analisti sono riusciti a sottoporre al calcolo anche i fatti di questa natura; il loro studio forma l'oggetto di un ramo fiorente delle matematiche, la *teoria delle probabilità*.

Un capitolo di questa teoria tratta un problema, che non può non affacciarsi ad ogni piè sospinto ad ogni cultore delle scienze sperimentali, a cui non faccia difetto l'abitudine al pensiero matematico.

La misura ripetuta d' una medesima grandezza dà luogo, salvo casi eccezionalissimi, a risultati non perfettamente identici; e pertanto si hanno in generale per le grandezze direttamente misurate e per quelle che se ne possono dedurre col calcolo, dei dati fra loro discordanti. Come si può da questi dati desumere quali sieno i valori più plausibili delle grandezze incognite? A tale domanda risponde la *teoria degli errori*, che è applicata largamente nella geodesia, nell' astronomia e nella mineralogia, e che dovrebbe esserlo in molte altre scienze.

*
* *

Oltre a queste esigenze comuni a tutte le scienze naturali, altre ve n' hanno speciali ad alcune di esse.

Così quel nuovo ramo della chimica, che ha il nome di chimica fisica, richiede la conoscenza, almeno superficiale, di alcuni dei concetti più importanti della termodinamica, i quali alla lor volta si fondano sui principii della meccanica.

E la cristallografia, che pure può svolgersi, almeno nei suoi fondamenti, in base alla sola matematica elementare, acquista una grande semplicità, sveltezza ed eleganza quando vi si introducano i procedimenti dell' algebra moderna e della geometria analitica.

*
* *

Queste sono le considerazioni che mi guidarono nel formulare il programma del mio corso. Stretto dalla brevità del tempo — il corso constò di sole 45 lezioni — dovetti limitarmi, nello svolgimento delle singole parti di esso, al puro necessario, avendo cura tuttavia che nulla mancasse di ciò che doveva servir di base agli sviluppi successivi. Insistetti particolarmente sui concetti, restringendo al minimo possibile la parte puramente tecnica. Pertanto spero di esser riuscito a porre in grado i miei uditori, se non di applicare essi stessi la matematica alle scienze naturali, almeno di seguire senza difficoltà le applicazioni fattene da chi prima seppe apprezzare e rendersi famigliare questo potente strumento di ricerca.

Programma.

Parte I. — Algebra complementare (6 lez.)

1. *Analisi combinatoria.* — Disposizioni semplici e con ripetizione. Permutazioni. Parità e disparità delle permutazioni. Combinazioni sem-

plici e con ripetizione. Coefficienti binomiali e triangolo aritmetico. Potenze d' un binomio.

2. *Determinanti.* — Definizioni e teoremi fondamentali. Minori d' un determinante, complemento algebrico. Determinanti nulli. Moltiplicazione dei determinanti. Determinante aggiunto. Determinanti simmetria. Determinanti ortogonali.

3. *Equazioni lineari.* — Risoluzione d' un sistema d' equazioni lineari omogenee e non omogenee.

Parte II. — Geometria analitica (14 lez.)

1 *Riassunto delle principali nozioni di trigonometria piana.*

2 *Geometria del piano.*

a) **Coordinate.** — Coordinate cartesiane. Trasformazione delle coordinate.

b) **Punti e rette.** — Equazione della retta, sue varie forme. Significato geometrico dei coefficienti. Angoli d' una retta cogli assi. Distanza di due punti. Retta che unisce due punti. Condizione perchè tre punti sieno in linea retta. Angolo di due rette. Condizione di parallelismo e di perpendicolarità. Punto d' intersezione di due rette. Condizione perchè tre rette passino per un punto.

c) **Linee del secondo ordine.** — Luoghi geometrici in generàle. Cerchio. Parabola; sue proprietà. Ellisse e iperbola; centro, assi, fuochi; asintoti. Equazione dell' iperbola equilatera riferita agli asintoti.

d) **Altre linee.** — Iperbole d'ordine superiore. Logaritmica.

3. *Geometria dello spazio.*

a) **Coordinate.** — Coordinate cartesiane. Coseni direttori d' una retta. Trasformazione delle coordinate.

b) **Punti, rette e piani.** — Distanza di due punti. Equazione del piano; significato geometrico dei coefficienti. Condizione di parallelismo di due piani. Piani in posizioni speciali. Angolo di due piani. Punto d' incontro di tre piani. Condizione perchè quattro piani abbiano un punto comune. Equazione del piano passante per tre punti. Equazioni della retta; significato geometrico delle costanti. Condizione di parallelismo e di perpendicolarità di due rette. Condizione di parallelismo d' un piano e d' una retta. Applicazione: condizione perchè tre facce d' un cristallo sieno in zona. Condizione perchè due rette si taglino.

c) **Superficie del secondo ordine.** — Luoghi geometrici in generale. Sfera. Ellissoide; ellissoide rotondo. Iperboloide ad una falda;

generatrici rettilinee. Iperboloide a due falde. Paraboloide ellittico; paraboloide rotondo. Paraboloide iperbolico; generatrici rettilinee. Cilindro. Cono. Costruzione dei modelli delle quadriche rigate.

d) **Curve sghembe.** — Cenni sulla rappresentazione parametrica delle curve nello spazio; cilindri proiettanti. Elica.

Parte III. — Calcolo infinitesimale (9 lez.).

1. *Preliminari.* — Funzioni d'una variabile; loro rappresentazione mediante curve piane. Esempi: legge di Boyle, legge di Nordenskiöld per le soluzioni, legge psicofisica di Fechner. Funzioni di più variabili; loro rappresentazione mediante superficie. Esempio: equazione di stato dei gas. Limiti; continuità e discontinuità.

2. *Derivate.* — Concetto fondamentale del calcolo infinitesimale. Derivata. Esempi: velocità nel moto vario, tangente ad una curva, coefficiente di dilatazione lineare, superficiale e cubica. Significato del segno della derivata. Derivate d'ordine superiore. Esempio: accelerazione. Infinitesimi; differenziali. Principio della sostituzione degl'infinitesimi. Derivate e differenziali delle funzioni di più variabili. Invertibilità dell'ordine delle derivazioni. Principii su cui si fonda la determinazione delle derivate. Derivata d'una costante, d'una somma, d'un prodotto, d'una funzione di funzione. Derivata d'una potenza, del seno, del coseno, del logaritmo. Logaritmi iperbolici. Concavità, convessità e flessi delle curve piane. Tangente ad una curva sghemba. Massimi e minimi delle funzioni d'una variabile. Esempi: recipiente di capacità massima costruito con una lamiera rettangolare, riflessione, rifrazione, trave a sezione rettangolare di massima resistenza ottenibile da un dato cilindro, filtro di massima capacità. Massimi e minimi delle funzioni di più variabili. Esempio: parallelepipedo di massimo volume data la somma degli spigoli.

3. *Integrali.* — Integrale definito ed indefinito. Integrale d'una potenza, del seno, del coseno. Cenni sui procedimenti del calcolo integrale. Esempi di applicazione del calcolo integrale: moto uniformemente vario, lunghezza d'un arco di curva sghemba, area d'una curva piana, legge psicofisica, formola ipsometrica, inversione dello zucchero, calore ceduto da un corpo che si raffredda, temperatura massima d'una fiamma.

Parte IV. — Calcolo delle probabilità (5 lez.)

1. *Teoria generale.* — Definizione di probabilità. Esempi vari; dadi, urne. Problema dell'ago; considerazioni sui problemi nei quali

il numero dei casi possibili è infinito. Probabilità totale e probabilità composta. Giuochi, posta, speranza matematica. Paradosso di Pietroburgo. Teorema di Bernoulli. Legge dei grandi numeri. Tavole di mortalità e loro uso.

2. *Applicazione al calcolo degli errori.* – Errori costanti ed errori accidentali. Postulato di Gauss; legge degli errori. Errore probabile; errore medio. Precisione e peso. Teoria dei minimi quadrati.

Parte V. — Meccanica (6 lez.).

1. *Meccanica del punto materiale.* — Moto rettilineo d'un punto; velocità, accelerazione. Diagrammi e loro uso. Moto curvilineo; proiezioni sui tre assi coordinati. Principio d' inerzia. Forza. Massa. Peso. Principio della coesistenza di più moti. Composizione delle forze concorrenti. Equazioni del moto d' un punto. Esempi: moto dei proiettili nel vuoto, moto centrale. Moto d' un punto soggetto a vincoli. Esempi: piano inclinato, pendolo semplice. Lavoro; forza viva. Principio delle forze vive.

2. *Meccanica dei sistemi.* — Moto d' un sistema. Traslazione, rotazione. Composizione delle forze parallele. Momenti. Centro di gravità. Equilibrio. Esempi: curva dei ponti sospesi. Principio di D'Alembert. Equazioni del moto d' un sistema composto d' un numero finito di punti. Principio della conservazione del moto del centro di gravità. Principio della conservazione dell'energia. Funzione delle forze. Attrazione newtoniana; potenziale.

Parte VI. — Termodinamica (5 lez.).

1. *Principi generali.* — Principio di Mayer. Equazione fondamentale. Lavoro esterno; sua rappresentazione grafica. Curve di pressione costante, di volume costante, isotermiche, adiabatiche. Cicli; cicli reversibili e non reversibili. Ciclo di Carnot. Postulato di Clausius. Principio di Carnot.

2. *Teoria dei gas.* — Leggi di Boyle e di Gay-Lussac; equazione di stato. Temperatura assoluta. Forma delle isotermiche. Calore specifico a volume ed a pressione costante. Forma delle adiabatiche. Coefficiente economico del ciclo di Carnot. Entropia. Variazione dell' entropia nei cicli non reversibili.

3. *Teoria dei vapori.* — Equazione di stato dei vapori saturi. Miscuglio di vapore e di liquido. Isotermiche, adiabatiche. Equazione di stato dei vapori soprarriscaldati.

G. Vivanti.

NOTIZIE

Bibliografia dei quaternioni e teorie affini. Il Prof. Macfarlane sta preparando un elenco completo delle opere a stampa concernenti le discipline aventi la loro origine nelle opere di Hamilton e Grassmann ed ha rivolto un invito a tutti gli autori per ottenere il loro aiuto. Nell'adoperarsi con tal cenno al conseguimento dello scopo propostosi dall' infaticabile segretario dell' *International Association for the promoting the study of Quaternions* (v. *Bollettino.* T. II, p. 100 e T. III, p. 92), il nostro giornale avverte che tutte le comunicazioni in proposito devono dirigersi al Prof. A. Macfarlane, Gowrie Grove, Chatam, Ontario, Canada.

∴

Per stabilire una lingua ausiliaria internazionale si è costituito a Parigi un comitato, di cui è segretario L. Couturat (Paris, 7 Rue Nicole), avente per iscopo di scegliere e diffondere quella che soddisfarà alle tre condizioni seguenti: *a)* Essere capace di servire alle relazioni abituali della vita sociale, agli scambi commerciali ed ai rapporti scientifici e filosofici; *b)* Essere di facile apprendimento per parte di tutte le persone aventi una istruzione elementare media e specialmente per le persone di civiltà europea; *c)* Non essere alcuna delle lingue nazionali. — Ulteriori particolari sulla importante questione si troveranno nell'opuscolo del Conturat, *Pour la langue internationale* (Coulommiers, 1901).

∴

Tema proposto dalla R. Accademia di Napoli: « Portare qualche contributo notevole alla teoria invariantica della forma ternaria biquadratica, preferibilmente per quanto riguarda le varie condizioni di spezzamento in forme inferiori ». Premio L. 500.

Le memorie dovranno essere inviate al Segretario dell'Accademia non più tardi del 31 Marzo 1902; potranno essere scritte in italiano, latino o francese; dovranno recare un motto che serva, nel modo consueto, a rintracciare il nome dell' autore premiato.

*
* *

Maurolico e l' Università di Messina. È uscita recentemente una nuova edizione (Messina, D' Angelo, 1901), aumentata in base a documenti inediti, dell'opera del Prof. G. Macrì: *F. Maurolico nella vita e negli scritti* (sulla quale v. *Boll. di st. e bibliogr. mat.*, 1897, p. 17-18). In un *Poscritto* alla stessa, il Macrì sostiene che la nomina del Maurolico a Professore della Università di Messina, comprovata da un documento testè scoperto (v. Boll., 1900, p. 123-124), non potè avere alcun effetto pratico per le condizioni di salute e d' età del grande geometra. Della stessa opinione è il Dott. V. Labate (Arch. storico siciliano, nuova serie, anno XXV, 1901, p. 433-435).

*
* *

Tema del terzo concorso a premi bandito dal *Bollettino di Matematiche e di scienze fisiche e naturali* fra gli insegnanti di matematica delle Scuole secondarie: « Risoluzione dei problemi geometrici elementari in un foglio limitato ».

I lavori dei concorrenti dovranno essere inviati anonimi al Direttore di quel periodico (Prof. Alberto Conti, Bologna, via S. Stefano 170) non più tardi del prossimo 31 Dicembre. Ulteriori particolari si trovano nel N. 7 (Giugno 1901) del *Bollettino* predetto.

*
* *

Biblioteca Scolastica. Sotto questo titolo inauguriamo una rubrica di annunzi delle opere aventi carattere esclusivamente scolastico che usciranno in Italia ed all' estero.

Arnaldi M. Prime nozioni di geometria intuitiva ad uso delle Scuole complementari. Parma, L. Battei 1901, 8.°, p. 160 [L. 1,50].

de Franchis M. Elementi di geometria ad uso delle Scuole tecniche. Palermo, R. Sandron, 1901, 8.°, p. IV + 227 [L. 2].

de Franchis M. Elementi di aritmetica pratica ad uso delle Scuole secondarie inferiori, seguita da una guida alla risoluzione dei problemi. Palermo, R. Sandron 1901, 8.° p. 295 [L. 2].

Marco Bertolone, Direttore-Gerente

Genova - Tipografia R. Istituto Sordo-muti - 1901.

OTTOBRE, NOVEMBRE E DICEMBRE 1901.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. **6**, per l'estero Fr. **7.50**. Numeri separati L. **2** caduno. — Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

RECENSIONI ED ANNUNZI

H. WEBER. *Die partiellen Differentialgleichungen der matematischen Physik. Nach Riemann's Vorlesungen. — In vierter Auflage neu bearbeitet.* Braunschweig. Vieweg und Sohn. Erster Band. 1900. Zweiter Band. 1901. [Prezzo Mk. 20].

Quest' opera, che, al titolo, e, fino ad un certo punto, all' aspetto, ci si presenta come una nuova edizione delle celebri « Lezioni » di Riemann, elaborate e pubblicate da Hattendorff, per la prima, volta, nel 1869, e ristampate poi, pressochè senza variazioni, nel 1876 e nel 1882 (1), è in sostanza un lavoro originale del chiaro professore dell' Università di Strasburgo. Il quale, nella prefazione, si compiace di spiegar egli stesso perchè, sollecitato a curare una quarta edizione di quelle lezioni, abbia risposto all' invito, componendo un' opera nuova, e tuttavia abbia creduto di mantenervi l' ornamento del nome di Riemann.

Una ristampa delle lezioni tenute da Riemann fra il 1854 e il 1864 non poteva più offrire che un interesse storico: nè con semplici ritocchi sarebbe stato possibile ridonar loro la primitiva efficacia, per modo che restassero quell' ampia e sicura guida allo studio della Fisica matematica, che furono al loro apparire. Intanto, leggiamo nella prefazione alle « Lezioni » come Riemann affermasse che nessun progresso, nello scrutar il meccanismo dei fenomeni naturali, fu fatto da Newton in poi: laddove il trentennio seguito alla sua morte immatura vide fondarsi la teoria di Maxvell, che consolidava, colla espressione matematica, le idee di Faraday, e riceveva poi, alla sua volta, colle scoperte di Hertz, la conferma dell' esperienza. E poichè un libro pari al presente sviluppo della scienza é tenuto ad assegnare a questa teoria un posto d'onore, per ciò solo non potrebbe dispensarsi da recare al disegno delle « Lezioni » di Riemann un radicale mutamento.

Tuttavia, tale è l' opera del Maestro che l' Autore, informandosi al suo spirito, e traendo partito dalle sue molteplici ricerche nel campo della Fisica matematica, e in quello, ad esso attinente, dell' Analisi, ha buona ragione di conservare al nuovo libro la qualifica di emanazione dell' insegnamento di lui.

Aggiungiamo ch' egli resta conforme a quello spirito, pur coll' accogliere la teoria maxwelliana dei fenomeni elettrici, magnetici e luminosi: constando dalla corrispondenza e da frammenti di Riemann com' egli avesse fatto oggetto delle proprie speculazioni una comune spiegazione dei principali fenomeni, non esclusane la gravitazione universale, fondata sull' intervento di un « mezzo »; ed ancora che, valendosi dei varii scritti di Riemann, risponde, in certo qual modo, ad un desiderio espresso fin dal primo apparire delle « Lezioni »: poichè l'*Jahrbuch der Fortschritte der Mathematik* degli anni 1869-70 (2), a proposito delle « Lezioni » medesime, nota come esse siano principalmente condotte sulla traccia di Dirichlet, a testimonianza della circospezione e della modestia di Riemann, per concludere che l' editore si sarebbe reso anche più benemerito, pubblicando altri corsi di lui, dove ha maggior parte la sua ricerca originale.

(1) *Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen*. Braunschweig. Vieweg und Sohn.

(2) Articolo firmato *Nt* (Natani).

L' opera si compone di due volumi, che si completano a vicenda, non senza possedere una certa indipendenza, che si rivela anche con una separata divisione in « Parti » *(Abschnitt)*, come le « Lezioni » di Riemann: se non che queste sono raccolte in « Libri » *(Buch)*, recanti, ciascuno, un titolo speciale.

Il libro « Sussidii Analitici » svolto dalle prime due parti delle antiche Lezioni, contiene, oltre i perfezionamenti indicati dalla più recente critica, tanti complementi ed aggiunte che ben può dirsi raccolga, esposti in forma succinta, ma limpida e rigorosa, i principali elementi dell' Analisi, indispensabili per intraprendere lo studio dell' applicazione della matematica al calcolo ed alla spiegazione dei fenomeni naturali.

Il seguente libro « Fondamenti geometrici e meccanici » comincia colla cinematica delle deformazioni infinitesime. Seguono i concetti principali della teoria dei vettori, nel cui significativo linguaggio sono stabiliti i teoremi di Gauss e di Stokes sulle relazioni fra integrali di dimensioni diverse. Donde, attraverso al teorema di Green, che ne è spontanea conseguenza, si entra nella teoria della Funzione potenziale, le cui tre forme principali compariscono in quella formola, esposta con misura adeguata allo scopo dell' opera, e perciò senza toccare l' arduo « problema d' esistenza », che, se ci si permette un' osservazione, non ci sarebbe parso superfluo avvertire ed enunciare fin da questo momento (1). Tale problema è risoluto, nel caso del campo sferico, coll' effettiva determinazione della funzione soddisfacente alle prescritte condizioni; e lo sviluppo in serie di essa dà luogo ad un' esposizione degli elementi delle Funzioni sferiche. Chiude il libro una rapida rassegna dei principii della Meccanica razionale, principalmente intesa a fissare la mente sulla formazione delle equazioni del movimento e dell' equilibrio, mediante l' equazione di d'Alembert e Lagrange, trasformata, se occorre, così da tradursi nei teoremi di Hamilton e della Minima azione, e sul teorema della Conservazione dell' energia.

Termina il primo volume il libro « Elettricità e Magnetismo », e, sotto un certo punto di vista, lo completa, poichè contiene un' applicazione della premessa materia, abbastanza larga per renderne ragione e rilevarne l' importanza in questo ordine di studii. L' esposizione di questo molteplice argomento si fonda sul concetto maxwelliano dello « spostamento » elettrico e magnetico: la cui natura non è preventivamente indagata; ma è lasciato di chiarirla ai principii che implicano lo stesso concetto, i quali, per l' equilibrio elettrico e magnetico, si riducono ad un' equazione analoga a quella delle velocità virtuali,

(1) Questo è poi fatto in una Nota annessa al §. 110 del secondo volume, a proposito della teoria generale della Membrana vibrante.

dove tale spostamento è surrogato allo spostamento del punto materiale, e, pel movimento, alle equazioni di Maxwell, traducenti relazioni che l'esperienza rileva tra circuiti elettrici e magneti. La teoria dell'equilibrio conduce per quella via alla legge di Coulomb e alle sue immediate conseguenze. La teoria del movimento è applicata alla propagazione stazionaria dell'elettricità in un conduttore qualsivoglia — quella che potrebbe chiamarsi la teoria di Kirchhoff — completata in fine col problema più recente, alla cui soluzione contribuì lo stesso Autore, della propagazione coll'intervento di un elettrolito. Illustra queste teorie generali la trattazione di questioni più speciali, condotta con cura congiunta del ragionamento matematico e della fedeltà della rappresentazione del fenomeno, per quanto lo consente la natura stessa del problema.

Il secondo volume contiene, col titolo « Sussidii dalla teoria delle equazioni differenziali lineari », una propria introduzione matematica, subordinata alla trattazione degli argomenti, che formano oggetto dei successivi libri, della quale costituiscono la principal sostanza l'integrazione delle equazioni differenziali lineari mediante la serie ipergeometrica, e l'indagine, condotta sull'equazione proposta, degli zeri dei loro integrali.

Il secondo libro « Propagazione del calore » è la parte che men si discosta dalla traccia delle « Lezioni », e gli stessi problemi classici, concernenti un conduttore isotropo illimitato, o limitato da uno o più piani, o rappresentato da una sfera, ne formano l'oggetto. Rileviamo fra le aggiunte l'applicazione al problema della « penetrazione del gelo », e il metodo, principalmenle sviluppato da Sommerfeld, della « funzione di Green ».

Più largo quadro è invece assegnato alla parte concernente l'elasticità, che forma il terzo libro « Teoria dell'Elasticità ». Questo comincia col concetto e le proprietà generali della pressione, dalle quali, e dalla teoria della deformazione infinitesima, sono dedotte le equazioni dell'equilibrio e del movimento elastico, valendosi del postulato che l'energia competente alla combinazione di due spostamenti elastici è indipendente dal loro ordine di successione. Seguono problemi statici, dove è tratto partito delle ricerche di Saint-Venant, di Boussinesq, di Cerruti, riguardanti la duplice questione della distribuzione dello spostamento, e della pressione sui sostegni. Quindi sono esposti, con tutta l'ampiezza che risponde all'attuale progresso di questi studii, il problema della corda e della membrana vibrante.

La teoria recente delle oscillazioni elettriche è oggetto del quarto libro, intitolato da esse: dove sono riprese le equazioni di Maxwell, per integrarle in alcuni casi importanti, corrispondenti all'ipotesi che lo spostamento elettro-magnetico si propaghi nel mezzo in forma di onde — concetto precedentemente riscontrato nello studio della corda vibrante — rivelandosi, se occorre, coi fenomeni della propagazione della luce, o con quelli della propagazione dell'elettricità, la cui scoperta vale fama imperitura al nome di Hertz. La vastità del campo non consentiva di esporne che alcuni punti: i quali però sono sufficienii per fornirne un concetto. Questi sono, in sostanza, il « principio di Huygens » in un dielettrico isotropo: la propagazione di una corrente elettrica variabile in un filo infinito, immerso in un dielettrico illimitato: la riflessione di un sistema di onde elettro-magnetiche, che si propagano in un dielettrico, alla superficie di un conduttore, con particolar riguardo dell'ipotesi che sia limitato da un piano infinito, o rappresentato da una sfera.

L'opera termina col libro « Idrodinamica », concepito anch'esso con nuovo e più vasto disegno, in confronto della parte delle « Lezioni » riguardante lo stesso argomento. Comincia coi principii dell'Idrostatica, illustrati da problemi, tra i quali emerge quello dell'« ellissoide fluido rotante ». Donde si passa alla forma di Lagrange e di Euler delle equazioni del movimento, e ai principii del moto vorticoso e irrotazionale. Segue la teoria del movimento del sistema formato da un liquido perfetto e da uno o più solidi *bagnati* da esso, considerata dal doppio punto di vista della deduzione del movimento irrotazionale del liquido da un dato movimento dei solidi (« parte idrodinamica ») e del calcolo del movimento dei solidi, date le forze impresse (« parte meccanica »): cogli esempii, nella prima parte, della sfera, dell'ellissoide e dell'anello, e, nella seconda parte, del pendolo e dell'elice grave immersi in un liquido. Vien poi lo studio del movimento discontinuo dei liquidi, specialmente trattato nel caso delle due dimensioni, col noto principio di Helmholtz della rappresentazione conforme, e relativa applicazione della teoria delle funzioni di variabile complessa. Infine lo studio del movimento dei gas, dopo un breve cenno all'ipotesi delle oscillazioni estremamente piccole, che dà luogo ad una trattazione formalmente contenuta in quelle delle oscillazioni elettriche, è completamente informato al lavoro di Riemann « *Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite* ».

Questo, in breve, il contenuto dell'opera, per cui all'Autore, il quale afferma, pur fregiandola del nome di Riemann, d'assumersene piena responsabilità, saranno grati fisici e matematici, riconoscendogli il cospicuo merito di aver attuato, con tanti pregi di misura, di chiarezza e di precisione, il compito di riunire la maggior parte dei capitoli della Fisica matematica in un'esposizione suscettibile di uno studio seguito, retta da un comune principio, e informata al più recente progresso.

G. A. Maggi.

G. Bigourdan. *Le système métrique des poids et mésures. Son établissement et sa propapation graduelle, avec l'histoire des opérations qui ont servi à déterminer le mètre et le kilogramme.* Paris, Gauthier-Villars, 1901, 8.°, p. IV + 458 [Prezzo Fr. 10].

Fra le grandi imprese riformatrici avente carattere internazionale nessuna può gareggiare, per importanza ed universalità di consenso, con quella che ebbe per risultato l'introduzione in tutto il mondo civile del sistema metrico decimale. Un secolo fa essa venne iniziata ed i risultati che diede e che sta per dare sono tali che a ragione il Sig. Bigourdan — l'eminente astronomo dell'Osservatorio di Parigi — ritenne giunto l'istante per narrarne la storia. A tale scopo egli adunò tutti i documenti ufficiali relativi al soggetto ed i più importanti ha pubblicato nell'opera egregia che annunziamo. Della quale il piano e l'estensione emergono dal seguente indice dei capitoli:

I. I precursori della riforma dei pesi e delle misure. II. Creazione per opera dell'Assemblea costituente del nuovo sistema di pesi e misure. III. Il metro provvisorio. IV. La Commissione temporanea di pesi e misure sino alla sua epurazione. V. La Commissione témporanea dopo la sua epurazione. Sospensione della misura del meridiano. VI. Ripresa dei lavori sul meridiano. Legge 7 Aprile 1795. Creazione dell'agenzia temporanea di pesi e misure; soppressione di essa. VII. Nomenclatura per le nuove misure. VIII. Studio delle *righe* destinate alla misura delle basi IX. Determinazione del metro provvisorio. X. Lunghezza del pendolo che batte i secondi a Parigi. XI. Determinazione dell'unità di peso. XII. Della misura d'un meridiano, operazioni che essa esige. XIII-XIV. Misura della parte Nord del meridiano fatta da Delambre. XV. Misura della parte Sud del meridiano fatta da Méchain. XVI. Sanzione generale delle operazioni fatta col concorso di dotti stranieri. Il metro definitivo. XVII. Costruzione dei prototipi definitivi del metro e del chilogrammo. XVIII. Presentazione dei modelli al Corpo legislativo; loro deposito negli Archivi. XIX. Adozione legale dei modelli definitivi. Deposito dei documenti all'Osservatorio. Medaglia commemorativa. XX. Opposizione incontrata dal nuovo sistema di pesi e misure. Ufficio dei pesi pubblici. XXI. Attentati alla sicurezza del sistema metrico. XXII. Discussione della legge 4 Luglio 1837. XXIII. Organizzazione della verifica. Regolamento per la costruzione dei pesi e delle misure. XXIV. Propagazione all'estero del sistema metrico, dall'anno VI al 1869. XXV. La Commissione internazionale del metro; riunione di essa nel 1870. Comitato di ricerche preparatorie. XXVI. La Commissione internazionale del metro; le sedute del 1872. XXVII. Lavori della sezione francese e del Comitato permanente dal 1872 al 1875. XXVIII. La conferenza diplomatica del metro. XXIX. Continuazione dei lavori della sezione francese 1875-1880. XXX. Ufficio internazionale di pesi e misure. XXXI. Costruzione dei modelli definitivi. XXXII. Sanzioni delle operazioni e distribuzione dei prototipi per opera della Conferenza generale del 1887. XXXIII. Continuazione dei lavori metrologici dal 1889 al 1900.

Chiudono il volume due appendici, l'elenco bibliografico delle pubblicazioni fatte dalla Commissione internazionale del metro e del Comitato internazionale di pesi e misure, un indice cronologico delle leggi e decreti concernenti il nuovo sistema metrico ed un indice dei nomi.

Il volume elegantissimamente stampato, va adorno dei ritratti di Delambre, Fabroni, Lavoisier, Lefèvre-Gineau, Méchain, Van Swinden e Tayllerand, e di altre illustrazioni; esso sembra destinato a prendere posto nelle biblioteche, non soltanto dei fisici e dei geodeti, ma anche di tutte le persone colte.

G. L.

L. Couturat. — *La logique de Leibniz d'après des documents inedits.* Paris, F. Alcan 1901. 8.° p. XIV + 608 [Prezzo 12 fr.].

Alle conquiste di Leibniz, estendentisi ai campi più svariati e remoti della filosofia e della scienza, è toccata sorte analoga a quella che subì l'impero macedone alla morte del suo fondatore. La copia e l'eterogeneità delle questioni e dei soggetti dei quali si esercitò la sua prodigiosa attività intellettuale non potevano a meno che costringere i posteri a dividersi in certo modo il compito di apprezzarne utizzarne e, direi quasi, amministrarne i prodotti.

La più importante tra queste ripartizioni, quella cioè che dovette aver luogo tra i continuatori delle ricerche matematiche di Leibniz da una parte, e i seguaci delle sue speculazioni filosofiche dall'altra, non avvenne senza inconvenienti, e ciò non per alcuna contestazione insorta tra le suddette due classi di eredi pel possesso di qualche parte del patrimonio alla quale ambedue pretendessero aver diritto, ma, al contrario, pel fatto che tutto un indirizzo di ricerche, a cui Leibniz attese con particolare persistenza e predilezione, ottenendovi risultati che egli riguardava come di fondamentale importanza scientifica e filosofica, venne ugualmente negletto tanto dai matematici, che lo reputavano estraneo al loro dominio e di pertinenza della « filosofia », quanto dai cultori di quest'ultima che non vi potevano accedere per mancanza della necessaria preparazione matematica.

È così che la maggior parte degli scritti di Leibnitz, che si riferiscono ai suoi tentativi di costruire, per le operazioni e le relazioni della logica deduttiva, un algoritmo paragonabile per coerenza ed efficacia a quello dell' algebra, e di estendere in tal modo, anche al di fuori delle scienze matematiche, i vantaggi di quel rigore, di quella precisione, di quella certezza di cui queste sembrano godere il privilegio, giacquero per tanto tempo quasi interamente ignorati e dimenticati, e molti anzi di essi, come ai lettori di questa rivista è già stato appreso da un precedente articolo del Vacca (questo *Bollettino*, T. II, 1899, pag. 113-115) stanno ancora aspettando la loro integrale pubblicazione.

Il Couturat, che a questa sta ora appunto attendendo, ha dedicato frattanto il presente volume ad un' esposizione ordinata e a un'analisi critica del contenuto di tali scritti, mettendoli in relazione cogli altri, ad essi affini, che già figuravano nelle edizioni delle opere filosofiche e matematiche di Leibniz.

La difficoltà di includere, nel breve giro d' una recensione, un resoconto completo delle varie forme e fasi attraverso alle quali il Conturat ci mostra essere passate le speculazioni di Leibniz sulla logica, mi consiglia a limitare il presente cenno bibliografico a un indicazione sommaria delle principali idee direttrici alle quali esse sembrano riattaccarsi, e di cui esse rappresentano il graduale svolgimento.

È da notare anzitutto come il procedimento deduttivo era concepito da Leibniz come costituito esssenzialmente dal trasformare una proposizione in un' altra sostituendo, in essa, all' uno o all' altro dei suoi termini, la sua definizione (*demonstrare, mihi, nihil aliud est quam, resolvendo terminos propositionis et pro definito definitionem aut ejus partem substituendo, ostendere etc.* De libertate, V. Couturat pag. 208).

Ora egli, contrariamente all' opinione espressa da Pascal nel suo celebre saggio « De l'esprit géometrique » (il quale sembra aver esercitato un potente influsso sullo sviluppo delle idee di Leibniz sulla logica), contrariamente, cioè, all' opinione che ogni ragionamento deduttivo non potesse a meno che dipendere, in ultima analisi, da qualche proposizione non dimostrata, riteneva che nessun sistema di deduzioni potesse considerarsi, come perfetto e rigoroso fintantochè tra le sue premesse figurassero delle proporzioni (assiomi, postulati) non riducibili alla forma di semplici definizioni (*seu prepositiones identicae*, cioè proposizioni *analitiche* nel senso dato poi da Kant a questa parola).

A questa opinione egli sembra esser stato indotto, o meglio *forzato*, dalla considerazione che, in caso contrario, le ulteriori proposizioni che, in aggiunta alle definizioni, si sarebbero dovute introdurre come premesse del sistema deduttivo in questione, non essendo « vere per definizione », non avrebbero potuto, a suo parere, aver altro fondamento che l' induzione, onde l'ammetterle fra le premesse avrebbe portato a dover qualificare come illusorio e insussistente quel carattere di particolare certezza e « necessità », che gli sembrava competere alle conclusioni ottenute per pura deduzione, di fronte a quelle basate dalla semplice comparazione, o generalizzazione, dei dati dell'esperienza (*Axiomata demonstrabilia esse pro certo habeo: unde enim constat nobis de eorum veritate? non, opinor, ex inductione: ita enim omnes scientiae redderentur empiricae.* Ibid).

L'idea che la suddetta particolare certezza e « necessità » competesse, non agli assiomi presi per se stessi, o alle conclusioni da essi dedotte, ma invece alla connessione logica fra gli uni e le altre, (connessione che non permette di *supporre* la verità degli assioni senza essere condotti « necessariamente » ad ammettere anche quella delle conclusioni) non era mancata di presentarsi a Leibniz (1), come era naturale, ma non gli era potuta sembrare atta a risolvere la difficoltà, in quanto gli sembrava che la perfetta arbitrarietà che si sarebbe in tal modo venuti ad attribuire alle premesse fondamentali d'un dato sistema di deduzioni, ripercotendosi inevitalmente anche sulle conclusioni, avrebbe tolto ad esse ogni garanzia non solo di certezza ma anche di verità.

La verità delle conclusioni dovendo, a suo parere, consistere, non tanto nella loro conformità a date supposizioni arbitrarie, quanto piuttosto nella conformità tra le relazioni asserite e le relazioni effettivamente esistenti tra le cose di cui si parla (*proportio quaedam inter characteres et res*), non gli sembrava poter risultare se non dal fatto che le proposizioni primitive, poste a base della trattazione, pure contenendo, o presupponendo, delle convenzioni arbitrarie sull'uso o sul senso delle parole o dei simboli (*quamquam supponant aliquos characteres imo aliquando de ipsis characteribus loquantur*), contenessero anche qualche asserzione « vera in se stessa », e non dipendente da alcun nostro arbitrio (*perpetuum semperque verum sine ullo arbitrio nostro*).

Per conciliar questa sua conclusione coll'altra, già da lui precedentemente annessa, secondo la quale l'unica base indispensabile d'un sistema rigorosamente deduttivo era costituita da una serie di definizioni, a Leibniz non restava che un solo mezzo disponibile, quello cioè di negare che le definizioni fossero, tutte o sempre, proposizioni puramente arbitrarie.

A fargli parere plausibile una tale opinione concorreva anche la considerazione del procedimento, costantemente seguito da Euclide e dagli altri geometri antichi, di far precedere, o seguire, ogni nuova

(1) Etsi propositiones quaedam pro arbitrio assumantur, inde tamen oritur veritas minime arbitraria; saltem enim verum est, positis istis definitionibus oriri conclusiones, sive, quod idem est, connexio inter conclusiones sive theoremata et definitiones, sive hypotheses arbitrarias est absolute vera. (Couturat pag. 107).

definizione da ragionamenti diretti a provare la « costruibilità » della figura corrispondente, ed egli si propose anzitutto di indagare quali fossero le condizioni e le limitazioni che, da una tale esigenza, venivano ad essere imposte alla seclta ed all' arbitrarietà delle definizioni.

Tra queste condizioni la prima che si presentava era quella di non contenere alcuna contradizione in termini (*contradictio in adiecto*); « *nam de impossibilibus seu contradictionem involventibus, etiam contradictoria possunt demonstrari* » *Meditationes* 1684 Cap. Couturat pag. 195).

Ma l' assenza di contradizioni esplicite non poteva certamente bastare a stabilire, per questo riguardo, la legittimità d' un definizione, poichè ve ne potevano essere di quelle che, pur non contenendo alcun accoppiamento di termini direttamente contradittorî, presentassero delle contraddizioni « latenti » (*virtuales*), pel fatto che non tutte le nozioni complesse in esse contenute fossero state analizzate in modo sufficiente per mettere in rilievo le contraddizioni e le incompatibilità, eventualmente sussistenti tra le nozioni che esse implicavano.

Una tale decomposizione e analisi delle nozioni era dunque da considerarsi come la prima condizione per la costituzione d' un sistema di deduzioni perfettamente rigoroso in qualsiasi campo di ricerca.

Ma questa analisi poteva essa essere sempre effettuata e condotta a termine mediante un numero finito di decomposizioni? E, in ogni modo, qual era il criterio per decidere, in ciascun dato caso, se essa fosse stata spinta fino a un punto sufficiente a garantirci dell'assenza di qualsiasi contraddizione « latente »?

Nel rispondere a questa domanda Leibniz sembra essersi lasciato guidare da un' analogia sulla quale egli insiste continuamente e che, come è già stato notato anche dal Vacca, forma un vero *Leitmotiv* delle sue teorie logiche: l' analogia, cioè, tra il sopraindicato processo di riduzione, o analisi, di una nozione complessa nei concetti più semplici che concorrono a costituirla, e il processo aritmetico della decomposizione d' un numero nei suoi fattori primi.

E da questa analogia che egli sembra esser stato indotto ad ammettere che la distinzione tra nozioni « semplici » e nozioni « composte », come quella tra numeri primi e numeri non primi, fosse qualche cosa di sussistente « in sè » indipendentemente cioè da ogni nostra convenzione od arbitrio, contrariamente a ciò che ritiene ora la logica matematica, secondo la quale il designare una nozione come « semplice » o « primitiva » senza aggiuugere rispetto a qual altra nozione, o sistema di nozioni, s' intenda sussistere tale sua primitività, non può aver più senso che il parlare di moto o di quiete d'un corpo senza indicare a qual punto o sistema di punti s' intenda riferirlo per determinare, o definire, la sua posizione o il suo cambiamento di posizione (1).

La distinzione « assoluta » che egli riteneva così di poter stabilire tra nozioni « primitive » e nozioni « composte » gli dava mezzo di stabilirne un' altra tra le definizioni, a seconda che la nozione in esse definita vi fosse o no completamente decomposta nelle nozioni semplici concorrenti a costituirla. Nel primo caso la definizione veniva da lui qualificata come una definizione « reale » (*definitio realis*, *definitio optimi generis*), nel secondo come una definizione puramente « nominale ». e nel mentre egli ammetteva che le definizioni *nominali* non avessero altro scopo che quello di introdurre opportune abbreviazioni o convenzioni sull'uso o il significato dei termini, egli riteneva, invece, che da una definizione *reale*, pel fatto che in essa il concetto da definire era analizzato fino al punto da escludere che esso contenesse contraddizioni « implicite », si potesse immediatamente concludere che enti ad essa corrispondenti fossero, se non reali, almeno possibili.

Qui conviene notare subito come la conformità, a cui già sopra si alluse, tra il procedimento così indicato da Leibniz per porre in chiaro la « possibilità » d' una data nozione, e quello seguito da Euclide per dimostrare la legittimità delle sue definizioni, cessa di sussistere proprio nel punto che Leibniz riguardava il più importante. Per Euclide infatti la dimostrazione della « possibilità » o costruibilità d'una data figura consiste solo nel far constare come la costruzione di essa non esiga che l' impiego successivo e ricorrente di un certo numero di costruzioni elementari di cui egli ha espressamente postulata l'eseguibilità; mentre al contrario ciò che a Leibniz premeva di provare era che esistessero definizioni per le quali l' esistenza, o la « possibilità », di ciò che definivano, risultasse immediatamente dall' esame dei termini che vi figuravano e dalla constatazione delle loro « compatibilità » (2).

Si deve tuttavia osservare, a sua parziale giustificazione, che Leibniz, pure indicando la risoluzione d' una nozione complessa nei suoi « elementi », come un mezzo ideale e perfetto per decidere della sua « possibilità », non manca tuttavia di soggiungere che, nel caso concreto, l' applicazione d'un tal mezzo, colla sola eccezione di alcuni casi eccezionalmente semplici, quali, in primo luogo, le nozioni dell' aritmetica, è assolutamente inattuabile, e ciò, non tanto a causa della

(1) Cap. Peano. *Formulaire de mathématiques*, 1901, pag. 7.

(2) Leibniz ammetteva che tutte le nozioni « semplici », non espressamente contradittorie, dovessero essere compatibili: « Je soutiens que toutes les formes simples sont compatibles entre elles ». (V. lettre à la duchesse Sophie. Couturat a pag. 195, V. anche a pag. 219 nota 2).

complicazione di struttura dei concetti apparentemente meno complessi riferentisi al mondo reale, quanto, e specialmente, perchè il numero di « nozioni elementari », dalle cui diverse « combinazioni » tali concetti risultano, è, nella più parte dei casi, così grande da rendere impossibile a qualunque mente umana anche soltanto l'avvicinarsi alle loro analisi « *In veritatibus contingentibus, etsi praedicatum inest subjecto, numquam tamen de eo hoc potest demonstrari, sed resolutio prodit in infinitum, neque unquam ad aequationem, seu identitatem propositio potest revocari. Itaque, si qua veritas constat, per experientiam constat quia demonstrationem dare non possumus. Quae est causa quod Deus solus veritates contingentes a priori cognoscit earumque infallibilitatem aliter quam experimentis videt.* Conturat pag. 121) ».

Dal che egli conclude che, per distinguere le definizioni « reali » da quelle puramente « nominali », è necessario praticamente ricorrere a qualche altro mezzo che non sia la sopra indicata analisi delle nozioni, e quest' altro mezzo è il ricorso diretto all'esperienza, cioè alla diretta constatazione dell' esistenza di oggetti corrispondenti alla nozione che si tratta di definire.

Poichè, come Leibniz soggiunge, avvicinandosi in questo punto più che in qualunque altro alla soluzione della difficoltà contro cui lottava, l'esistenza d' uua cosa implica « a fortiori » la sua « possibilità ».

Basta ravvicinare questa asserzione all' altra (Nouveaux Essais IV 17), pure riportata dal Couturat, nella quale Leibniz afferma che « il y a un art de choisir des *exemples* qui ne se trouveraient vrais si la consequence n'etait pas bonne », per farsi un' idea di quanto egli fosse vicino a prender possesso dell' idea, tanto importante per i progressi dell' *ars characteristica* da lui vagheggiata, che cioè per accertarsi che un dato sistema di asserzioni, che si vuole porre a base di un sistema deduttivo, non contenga alcuna contraddizione diretta o indiretta, basta trovare, o determinare, degli *esempi* per i quali esse contemporaneamente si verifichino.

Egli ammette del resto che, quando una definizione o un sistema di definizioni è stato assoggettato a questa prova, nulla occorre di più per garantire la legittimità delle conclusioni che ne derivano e per giustificare, almeno provvisoriamente, l'applicazione ad esso di processi deduttivi.

E a tale riguardo egli anzi loda i geometri Greci di non avere atteso, per innalzare il loro edificio, il raggiungimento d' un' analisi assolutamente completa dei concetti da essi adoperati: « *nam si voluissent differre theorematum ant problematum inventiones dum omnia axiomata et postulata demonstrata fuissent, fortasse nullam hodie geometriam haberemus* ».

Se non che, pur concedendo che per la costituzinne d' una scienza rigorosamente deduttiva non è necessario che l' analisi dei concetti, di cui essa fa uso, sia spinta fino al più estremo limite *(ad perfectas demonstrationes veritatum non reqüiri perfectos conceptus rerum)*, egli non cessa dal considerare come non « imperfezione » il fatto che, in un sistema deduttivo, figurino tra le proposizioni primitive delle asserzioni che, senza essere definizioni o parti di definizione, sono ammesse senza dimostrazione in virtù d' una pretesa o reale loro evidenza.

E, contro Cartesio e Pascal che appoggiavano appunto al criterio, secondo lui fallace ed illusorio, dell' evidenza intuitiva la scelta delle proposizioni da assumere come non bisognevoli di dimostrazione, egli afferma altamente che per lui (*chez moi*) « cette soin de demontrer les axiomes est un des plus importants points de l'art d'inventer » (1), chiamando in proprio sussidio anche l' opinione dei Geometri greci. *(Idque etiam veteres viderunt unde Apollonius in scriptis de-perditis et Proclus et alii axiomata, ab Euclide assumpta, demostrare sunt conati).*

Non è qui fuor di proposito osservare che Leibniz, sostenendo in tal modo l' utilità delle indagini critiche sui fondamenti delle scienze deduttive, non ostante che appoggiasse tale sua difesa a idee non del tutto esatte sulla riducibilità di tutti gli assiomi a semplici definizioni o proposizioni identicamente vere, si trovava, di fronte ai suoi avversari, indiscutibilmente da parte della ragione. La sua persuasione, del resto, della sufficienza delle « definizioni » a servire di base esclusiva a un sistema rigoroso di deduzioni, dipendeva solo dal fatto che egli, come vedemmo, classificava tra le « definizioni » anche quelle proposizioni nelle quali, alla « definizione » propriamente detta, cioè alla determinazione convenzionale del senso d' una parola, o d' un gruppo di parole, si accompagnava qualche constatazione, o ipotesi, relativa alla « possibilità » o realtà della cosa definita.

Credere che tale constatazione, o ipotesi, cambiasse natura pel fatto di essere inclusa nella definizione, invece di essere enunciata separatamente, costituiva un' illusione da paragonare a quella del contadino che, tragittando in barca, credeva di diminuire questa del peso del suo bagaglio, caricandoselo sulle ginocchia.

D' altra parte l' entusiasmo del quale la suddetta persuasione, e l' altra, ad essa connessa, dell' esistenza di nozioni « assolutamente » come possibile la costituzione d'un « *Alphabetum cognitionum huma-*

(1) Optima methodus perveniendi ad analysin notionum a posteriori est quaerere demonstrationes propositionum maxime axiomaticarum, quae videntur aliis per se notae.

elementari ed indecomponibili, animarono Leibniz, presentandogli *narum* » atto a fornire, per ciascuna cosa od oggetto assegnabile, una definizione tale da permettere la dimostrazione di tutte le sue proprietà (« allo stesso modo come i geometri deducono tutte le proprieta d'una curva dalla sua equazione »), e l'impulso che dall'idea stessa egli derivò, da un lato per le sue ricerche relative alla costituzione d'un linguaggio scientifico perfetto atto a servire di strumento per le comuuicazioni internazionali, e dall'altro lato per spingersi innanzi nell'analisi dei metodi e dei principi dell'algebra e della geometria e per gettare le basi di due nuovi rami di scienza: il calcolo geometrico e la logica matematica, ci inducono a paragonare il suo errore, se pure fu tale, a quello del vignainolo che, persuaso dal padre morente che nella sua vigna si trovava nascosto un tesoro, si diede a scavarne e rivoltarne la terra e trovò cosi, nell'accresciuta fecondità di essa, dei tesori ben più grandi di quelli che aveva vanamente sperato di trovare in fondo ai suoi scavi.

L'opera del Couturat ci mostra come, tra tali tesori, molti ve ne siano ancora che stanno attendendo competenti estimatori, e che molte delle più geniali idee di Leibniz sul soggetto da lui prediletto, cioè la logica e quella che ora si chiama la « teoria della conoscenza », cominciano solo ora a germinare e a dar segno della loro fecondità.

Nessun fatto più di questo può servire a far testimonianza dell'alto posto che spetta al Leibniz nella gerarchia di quegli « spiriti magni » che dallo Schopenhauer sono paragonati a quelle stelle fisse tanto lontane dalla terra che i loro raggi esigono serie di anni o di secoli per arrivare ad essa.

G. VAILATI.

Vorlesungen über Mathematik von L. KRONECKER. *Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der K. Preusslichen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Kommission. In Zwei Teilen.* II. Teil. *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Bearbeitet und herausgegeben von* K. HENSEL. I. Abschnitt. *Vorlesungen über Zahlentheorie.* I *Band.* Mit. 7 Figuren im Text. Leipzig, Teubner, 1901, 8.°, p. XVI + 509 [Prezzo Mk. 18].

Mentre la scienza geometrica, come oggi la si intende, ha le proprie radici nelle opere che la Grecia ci ha tramandate, l'aritmetica teorica è di origine assai più moderna, non potendo in alcun modo considerarsi come fondamentale la raccolta (pure pregevolissima) di problemi di analisi determinata ed indeterminata recante il nome di Diofanto alessandrino. Ma se questa non fu *base* di una teoria, fu *stimolo* potentissimo alla ricerca di nuovi veri, chè gli è appunto meditando su di essa che Fermat fu indotto a scoprire le bellissime proposizioni che inducono a porlo fra i genì creatori e che eccitarono valentuomini quali Lagrange ed Eulero ad occuparsi, non senza ottimi risultati, di investigare le prerogative di cui godono i numeri della serie naturale. Così si vennero man mano adunando gli elementi costitutivi della nuova disciplina a cui Gauss era chiamato a porgere uno stabile assetto con le immortali sue *Disquisitiones arithmeticae.* Ma se a Gauss nessuno contesta di avere elevata a vera scienza la teoria dei numeri, al Dirichlet appartiene il merito immenso ed indiscutibile di averla fornita di sicuri metodi di ricerca, introducendovi la feconda idea di limite. Discepolo e continuatore del Dirichlet, Kronecker ha fatto ancor più, applicando cioè all'aritmetica i più raffinati metodi dell'analisi moderna ed allargandone il dominio sì da abbracciare la teoria delle funzioni algebriche razionali intere. L'importanza di questo ampliamento dell'antica disciplina è nota a chiunque abbia tenuto dietro alla serie numerosa e brillante delle pubblicazioni del Kronecker; come in conseguenza subisse una completa trasfigurazione tutta l'antica teoria dei numeri era finora pienamente noto soltanto agli immediati discepoli del sommo analista Tedesco, ma ora, grazie all'iniziativa sommamente encomiabile dell'Accademia di Berlino, egli potrà d'ora innanzi trovare ammiratori ed interpreti in tutto il mondo civile. L'opera, della quale oggi annunciamo gli inizì, è destinata a essere posta accanto alla *Théorie des nombres* di Legendre, le *Disquisitions arithmeticae* di Gauss e alle *Vorlesungen über Zahlentheorie* di Lejeune-Dirichlet, come quella in cui si rispecchia la quarta delle fasi per cui l'aritmetica teorica è sinora passata nel corso della sua evoluzione storica.

Il volume che ci sta dinnanzi comprende 31 lezioni, divise in cinque sezioni intitolate risp.: *Introduzione.* I. *Divisibilità e cogruenze numeriche.* II. *Il campo di razionalità e la teoria dei sistemi di moduli.* III. *Applicazione dell'analisi a problemi della teoria dei numeri.* IV. *Teoria generale dei resti di potenze e dimostrazione del teorema sulle progressioni aritmetiche.* L'introduzione (in tre lezioni) contiene un riassunto delle principali ricerche sinora compiute sulla serie naturale e delle differenti direzioni in cui procedettero i varì investigatori; nulla di più adatto per svegliare l'interesse del lettore e dell'ascoltatore per i temi svolti nella parte dottrinale dell'opera! Le notizie storiche ivi esposte sono in generale esatte; ci sia lecito però di chiedere su che cosa si fondi l'A. asserendo (p. 12) che i libri superstiti di Diofanto sono i più *importanti* di tutta l'opera e di osservare che le ricerche sopra i *numeri amici* risalgono ad una epoca di molto anteriori a quella di Stifel (p. 25).

Nell' impossibilità in cui ci troviamo di esporre partitamente il contenuto del volume che ci sta sott' occhio, vogliamo attrarre l'attenzione dei nostri lettori su due idee generali del Kronecker, l'una delle quali egli ha applicata in più modi, mentre l'altra trovasi tuttora allo stadio embrionale. Secondo la prima una definizione non può dirsi perfetta sino a quando non sia stata posta sotto forma tale da potere riconoscerne l'applicabilità ad un dato ente mediante un numero finito di tentativi; similmente un teorema di esistenza non si può considerare come dimostrato rigorosamente finchè non si assegni in pari tempo un metodo per trovare la cosa di cui si dimostra la esistenza; qualunque definizione o dimostrazione non soddisfacente a tali condizioni è, seguendo il Kronecker, non da rigettarsi come illegittima, ma da porsi nel novero di quelle che aspettano ed esigono un perfezionamento ulteriore. — Secondo l'altra idea del Kronecker, l'aritmetica sarebbe stata sino ad ora studiata troppo dal punto di vista *moltiplicativo*, a scapito di quello *additivo;* in altre parole si considerarono i numeri di preferenza in quanto nascono dal prodotto di altri, mentre sarebbe stato altrettanto lecito e non meno utile il fissare la propria attenzione sopra quelli da cui essi risultano per addizione; le applicazioni fatte dal Kronecker dei sistemi di numerazione a base qualunque sono probabilmente da ritenersi come emanazioni di tale concetto, il quale però sino ad oggi è poco più di un semplice *aperçu* (1).

Notiamo, finendo, che nel preparare questa pubblicazione il Sig. Hensel si è giovato tanto degli appunti fatti dallo stesso Kronecker per le sue lezioni dal 1863-1891, quanto di alcune redazioni più complete fatte saltuariamente da alcuni suoi distinti ascoltatori; quali e quante siano gli sviluppi e le aggiunte originali da lui fatti si desume dalle note che chiudono il volume.

G. L.

L. Schlesinger. *Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabängigen Variabeln.* Leipzig, Göschen, 1900. VII-310 p., 8.° [Prezzo del vol. legato Mk. 8].

Questo volume, che è il XIII della « Sammlung Schubert », è destinato ad iniziare gli studiosi nella teoria delle equazioni differenziali ordinarie. A tale scopo l'autore ha creduto opportuno svolgere i me-

(1) A quest'ordine di idee sembra collegarsi l'interessante problema, già due volte ed indarno proposto da E. Lemoine (*Intermédiaire des mathématiciens*), T. II, 1895, p. 13 e T. VIII, 1901, p. 187) di esprimere un numero come somma algebrica del minimo numero possibile di potenza di 2.

todi generali soltanto nella loro applicazione a certi casi particolari, scelti però in modo da mettere in luce i tratti caratteristici di quei metodi; sicchè egli non va al di là delle equazioni algebrico-differenziali del 1.° ordine, nè delle equazioni lineari del 2.° ordine. Sebbene noi dubitiamo della convenienza di questo modo di procedere, dobbiamo riconoscere che la lettura del presente volume, scritto con una grande chiarezza che non degenera mai in prolissità, è un' ottima preparazione allo studio di trattati più estesi e più completi.

Premesse le prime definizioni, l' autore mostra (Introduzione) come ogni sistema d' equazioni differenziali ordinarie possa ridursi ad un sistema d' equazioni del 1.° ordine, e stabilisce l' esistenza e l' unicità dell' integrale d' un tale sistema sotto determinate condizioni. L' esempio del pendolo semplice, che conduce alle funzioni ellittiche, dà luogo all' autore di osservare come per istudiare completamente le proprietà degli integrali delle equazioni differenziali si debbano far prendere alla variabile indipendente valori, non solo reali, ma anche complessi. Egli passa pertanto (Cap. 1) a considerare le equazioni differenziali sotto questo nuovo punto di vista, e sviluppa il teorema dell' esistenza dell' integrale secondo Cauchy; esamina poi le singolarità degli integrali, e le distingue in fisse e mobili. Tra le equazioni del primo ordine in cui y' è funzione razionale di x, y, la sola senza singolarità mobili è l' equazione di Riccati; studiato (C. 2) l' integrale di questa equazione, tanto nel caso generale come nei varî casi speciali in cui essa si riduce ad un' equazione lineare non omogenea od omogenea del 2.° ordine, si mostra che essa è trasformabile in un' equazione lineare del 2.° ordine, e che reciprocamente da ogni equazione di di tal natura può ottenersi un' equazione di Riccati. Qui l' autore sviluppa (C. 2-3), per l' equazione lineare del 2.° ordine, la teoria di Fuchs, poi trasporta i risultati ottenuti all' equazione di Riccati, e fa vedere come alcuni di questi sussistano anche per equazioni del 1.° ordine assai più generali. Segue l'applicazione all'equazione di Cauchy ed a quella di Riemann, e, più estesamente, all' equazione ipergeometrica (C. 4), di cui un caso speciale è l' equazione differenziale delle funzioni sferiche.

Rimangono ora da considerarsi le equazioni i cui integrali hanno punti di indeterminazione (C. 5); qui compaiono serie generalmente divergenti, ma delle quali si può trar partito mercè il concetto di rappresentazione asintotica, dovuto a Poincaré. La teoria viene applicata all' equazione di Laplace ed a quella di Bessel. Si passa poi dall' equazione lineare omogenea a quella completa (C. 6); e finalmente si studiano le equazioni algebrico-differenziali del 1.° ordine non lineari rispetto ad y' (C. 7), considerando particolarmente (C. 8) il caso in cui la relazione algebrica tra y ed y' è di genere 0, 1 o 2. L' autore conclude coll'indicare quali dei risultati esposti sieno estendibili ad equazioni più generali, quali invece non sieno per ora suscettibili di una tale estensione.

G. VIVANTI.

L. MASCHERONI. *La Geometria del Compasso* (*Nuova edizione*). Palermo, Prem. Casa ed. « Era nova ». 1901, 8.°, pag. xvi + 152 [Prezzo L. 2].

Recenti investigazioni intorno agli strumenti che si possono adoperare per eseguire le costruzioni geometriche ed al valore relativo che essi posseggono, hanno richiamata l'attenzione degli studiosi sopra la *Geometria del compasso* di Lorenzo Mascheroni. E poichè avere quest'opera a propria disposizione è ormai un privilegio di pochi eletti, così fu ottima l'idea del Prof. Fazzari di promuovere e curare la nuova edizione che oggi annunciamo. Il prezzo modesto con cui essa è posta in vendita rende possibile a tutti il procurarsela e quindi assicurarsi una vera gioja intellettuale, quale è quella che produce la lettura delle opere seriamente pensate ed accuratissimamente scritte. Il concetto fondamentale della geometria del compasso è troppo noto per avere bisogno di venire qui richiamato; meno noto è che nelle costruzioni esposte dal Mascheroni fungono da noccioli, da fulcri, quasi da sostegni alcuni punti notevoli, collegati a qualsia cerchio, e la cui esistenza era dianzi rimasta ignota. Che poi il metodo di cui è parola estenda il proprio dominio su tutta la geometria emerge dall'esame dalle svariate, eleganti ed importantissime applicazioni che l'autore ne espone; dalle quali si trae il convincimento che non a torto egli vantava l'esattezza ed il potere del « curvo giro del fedel compasso ». Cresce pregio alla nuova edizione un'introduzione bio-bibliografica concernente il Mascheroni, coscienziosamente redatta dal Prof. Fazzari.

G. L.

F. MÜLLER. *Vocabulaire mathématique français allemand et allemand-français contenant les termes techniques employés dans les mathématiques pures et appliquées. Mathematisches Vocabularium Französisch-deutsch und Deutsch-französich euthaltend die Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik. Zweite Hälfte.* Leipzig, Teubner, 1901, p. IV-XIV + 133-316 [Prezzo Mk. 11,50].

Quale sia il piano e quali gl'intenti dell'opera, di cui annunciamo con vivo compiacimento il secondo ed ultimo fascicolo, è già noto ai nostri lettori (v. questo *Bollettino*, T. III, 1900, p. 92-96 e T. IV, 1901, p. 13). La parte testè uscita è più considerevole della precedente a cagione specialmente della natura della lingua tedesca, che consente l'introduzione — e perfino la creazione — di nuovi vocaboli, quando ciò sia consigliato dal desiderio di raggiungere concisione e chiarezza. Essa di più contiene correzioni ed aggiunte alla prima parte.

« Les travaux lexicographiques n'ont point de fin », disse il Littré ed ha opportunamente ricordato il nostro autore nella prefazione speciale alla seconda parte dell' opera sua. Incoraggiato da questo tacito invito ad ajutarlo, segnaliamo alcune piccole inesattezze che notammo in una rapida scorsa di essa:

P. 159. Il nome *convoluta* venne solo « richiamato in uso » dal Sylvester.

P. 164. Le curve di Lissajous non sono sempre trascendenti; tanto vero che ne vennero determinate le caratteristiche plückeriane nel caso in cui sono algebriche (v. *Mathem. Annalen*, T. VIII).

P. 166. Le strofoidali sono curve non trascendenti, ma del terz' ordine.

P. 179. La Galande (non Galente) non differisce dalla foglia (non dall' ovale) di Cartesio.

P. 201. Importa dichiarare che il nome di *géométrie de direction* è stato adoperato da P. Serret e da E. Laguerre in significati totalmente diversi.

P. 240. La nozione di *mediale* risale ad Euclide, non soltanto a Stiefel.

P. 246. La *nefroide* è una curva, non trascendente, ma del sest' ordine.

P. 250. Il problema che l' autore chiama d' Ottajani, è quello che risolse Annibale Giordano, nativo di Ottajano.

P. 254. Io ho cercato indarno nelle opere di Cayley una *curva* recante il nome di Pfaff.

P. 278. La proposizione che dà il numero delle soluzioni d' un' equazione indeterminata lineare appartiene a Paoli, non a de Paolis.

P. 283. La *Spinnenline* del Dürer è una particolare epicicloide.

P. 302. La versiera e la visiera sono due curve distinte (v. *Bibliotheca mathematica* 1897).

Raccomandiamo ancora all' autore le aggiunte seguenti:

Autotomic curves (curve con punti doppi) secondo A. Basset (Nature, T. 62, 1900, p. 572).

Séries syntagmatiques (Cauchy. C. R. T. XX, p. 328).

Funzioni biarmoniche, triarmoniche, n-armoniche o poliarmoniche (Almansi, Atti di Torino 1898, e Rendiconti di Palermo, 1899).

Cœur: v. Varignon, Mém. de Paris, 1693.

Hypobibasme; v. Ozanam, *Dictionaire des mathématiques* (Paris, 1691), p. 54.

Ligne d'évolution (sinonimo di evoluta: id. p. 97).

Campylographe; v. Dechevrens, C. R. T. CXX, 1900.

Fototopografia: cfr. il recente Manuale Hoepli di F. Paganini, *Fotogrammetria* (Milano, 1901).

Étoile de Milttag - Leffler, e altri termini tecnici relativi alla teoria delle serie divergenti (Borel, *Leçons sur les séries divergentes,* Paris, 1901, p. 74, 75, 96, 97, 98, 126).

G. L.

R. Klimpert. *Storia della geometria, ad uso dei dilettanti di matematica e degli alunni delle scuole secondarie. Traduzione dal Tedesco autorizzata dall' autore. con note ed aggiunte di* Pasquale Fantasia. Bari, G. Laterza, 1901. 8.°, p. 324 + X [Prezzo L. 4].

« Mancava.... in Italia », osserva il Prof. Fantasia, « una succinta storia della Geometria, che, esposta con forma anedottica ed elementare, senza venir meno al rigore scientifico, riuscisse istruttiva e ad un tempo dilettevole, specialmente per i giovani studiosi di matematica delle nostre scuole secondarie ». Egli quindi si accinse alla traduzione di quest' operetta, che gli sembrò rispondesse nel miglior modo allo scopo, facendovi numerose aggiunte, attinte alle fonti che egli giudicò più degne di fede. Tali aggiunte sono così numerose ed importanti che il libro del Klimpert subì per effetto di esse una radicale trasformazione; è tuttora una specie di antologia coordinata della storia delle matematiche, ma non è più un volume specialmente destinato a dilettevoli; è invece uno scritto a cui potranno ricorrere utilmente gli studenti di tutte le scuole secondarie ed universitarie. Benchè tali aggiunte non sempre si connettano perfettamente col testo e presentino ineguaglianze ed imperfezioni, pure tale è somma di notizie importanti che contengono da far meritare al Prof. Fantasia molta lode per essersi sobbarcato alla non lieve fatica di compilarle. Ma poichè l' opera che annunciamo è rivolta a persone che non hanno sempre sufficiente coltura per discernere in essa il buono dal cattivo, il vero dal falso, così crediamo dovere nostro il segnalare alcuni punti in cui l' autore od il traduttore incorsero in asserzioni che si scostano dalle opinioni generalmente accettate.

Pag. 12. Dei cinque poliedri regolari rimasero ignoti agli Egiziani il dodecacedro e l' *iscosaedro;* cfr. pag. 30 e pag. 43 (chiusa).

P. 33. Di dove l' autore trasse la notizia che i Pitagorici sapessero risolvere il problema (indeterminato) di calcolare l' aver di un poligono di dati lati?

P. 54. Che i Pitagorici apponessero il pentagono stellato (il quale era notoriamente per essi un segno di riconoscimento) *alla sopraccarta delle lettere*, è un'asserzione in cui si trova un anacronismo così patente da far sorridere più di un lettore.

P. 59. « .... curva trascendente (che supera cioè il sensibile od i limiti dell'esperienza) »....?!

P. 62. linea 5; invece di *cono* si legge *prisma.*

P. 69. Dei cosidetti XIV e XV Libri degli *Elementi di Euclide*, soltanto il primo appartiene ad Ipsicle.

P. 77-78. L'epiteto *d'esaustione* appartiene non ad un teorema ma ad un metodo.

P. 80 e 87. Fra le edizioni moderne di Euclide ed Archimede le più pregiate sono oggi quelle dell' Heiberg.

P. 87. Non esiste più alcuna opera di Archimede sopra gli specchi ustorî.

P. 94. L'autore sembra ignorare essere stata omai dimostrata l'impossibilità di eseguire la quadratura del circolo con mezzi algebrici.

P. 99. L'iperboloide *a una falda* ed il paraboloide *iperbolico* non vennero considerati nè da Archimede, nè da alcuno degli antichi geometri.

P. 149. La formola generale per la costruzione dei triangoli rettangoli in numeri si trova già nel X Libro degli *Elementi* di Euclide.

P. 193, linea 3-5. « Due triangoli equivalenti che abbiano la stessa base stanno fra loro come le altezze, e viceversa le basi di due triangoli equivalenti stanno come le altezze »....??

P. 206. Indagini recenti dimostrarono errato il fare risalire a Pappo la geometria con una sola apertura di compasso.

P. 211. Luca Paciuolo indica col nome *divina proporzione*, non la divisione armonica, ma la divisione in media ed estrema ragione.

P. 234. Leggasi Auria invece di Aceria.

P. 238, nota [3]. L'ordine religioso a cui apparteneva B. Cavalieri è quello dei Gesuati, non dei Gesuiti, ed il suo predecessore nell' Università di Bologna è il Magini.

P. 246. L'asserzione che Torricelli sia morto di cordoglio, in conseguenza delle note sue dispute col Roberval, contraddice all'opinione di uno dei più diligenti fra i biografi del sovrano discepolo di Galileo, secondo la quale questi sarebbe morto per una « fiera pleurisia » (Ghinassi, *Vita di E. Torricelli.* Faenza, 1864, p. xxx).

P. 253. Qual numero porta, nel VI Libro delle *Coniche* d'Apollonio, il teorema « la figura omotetica di una conica è un'altra conica »?

P. 262. Fra coloro che scopersero la rettificabilità della parabola semicubica va nominato anche Fermat.

P. 264, linee 2-3 dal basso. L'evolvente di qualunque curva piana è una linea a corvatura costante?

P. 276. Lo scopritore del teorema correlativo a quello del Menelao è Giovanni non Tommaso Ceva.

P. 282. Giacomo Bernoulli introdusse la lemniscata unicamente come un ausiliare per lo studio di un problema meccanico e la definì mediante l'equazione $xx + yy = a\sqrt{xx - yy}$. L'essere tale curva caso speciale dell'elisse di Cassini rimase ignoto per molto tempo (lo prova, a tacer d'altro, l'articolo *Lemniscate* scritto dal d'Alembert per l'*Encyclopédie méthodique*) e fu avvertito, se non prima, nel 1782 da P. Ferroni e nel 1806 da G. Saladini.

P. 284, nota [1]. È ivi stranamente confuso e mescolato il problema delle trajettorie di un sistema di curve piane con la ricerca delle geodetiche di una superficie, ed è attribuito il nome di *linee a doppia curvatura* a queste ultime soltanto, mentre appartiene a tutte le linee sghembe.

P. 291, linea 3.ª Invece di *perpendicolare* si legge *parallela.*

P. 295. I nostri lettori sanno che la versiera non venne inventata da Maria Gaetana Agnesi (v. *Bollettino*, IV, 1901, p. 33).

P. 297, linea 13.ª dal basso. Ogni quadrilatero (sottinteso *semplice*) non è forse inscritto in una sfera?

G. L.

G. Veronese. *Nozioni elementari di geometria intuitiva ad uso dei Ginnasi inferiori.* Verona-Padova, Drucker, 1901, 8.° p. VIII + 80 [Prezzo L. una].

Benchè dal piano generale del nostro *Bollettino* sia esclusa l'analisi delle opere aventi carattere esclusivamente didattico, pure crediamo opportuno annunciare questo libro con cui il ch.mo Professore nell'Università di Padova, volle svolgere il recente programma di geometria pel Ginnasio inferiore, in base alle idee di cui da tempo egli si è fatto apostolo e ad altre che da questa nuova pubblicazione si apprendono. Il giudizio in ultima istanza sopra questa, come su qualsia opera didattica, è riserbato ai professori che lo sceglieranno come libro di testo.

G. L.

D. Zoel Garcia de Galdeano. *Estudios de Critica y Pedagogia Matematicas.* Zaragoza, C. Ariño, 1900, 8.°, p. 152 [Prezzo 4 pesetas].

Questa nuova opera del dotto professore dell'Università di Saragozza consta di due parti distinte.

La prima contiene una rassegna delle principali teorie e dei più importanti problemi della Matematica moderna. Premesse alcune osservazioni sopra i concetti fondamentali di tale scienza, l'A. tratta in diciotto capitoli i temi seguenti: I. Scienza reale e scienza ideale. II. Formazione dei concetti matematici. III. Enumerazione dei concetti. IV. Necessità e scopo della critica matematica. V. La critica nell'Aritmetica. VI. La critica nella Geometria. VII. La critica nell'Algebra. VIII. L'algebra della logica. IX. La critica nella Geometria analitica. X. Geometria numerativa. XI Critica della teoria delle funzioni. XII. Geometria cinematica. XIII. Geometria differenziale. XIV. Teoria dei gruppi di trasformazione. XV. Il concetto d'immaginario. XVI. L'infinito in matematica. XVII. L'unificazione dei concetti. XVIII. Riassunto.

Nella seconda parte l'A. espone un certo numero di nozioni pedagogiche; e precisamente anzitutto alcune generalità su l'educazione e l'istruzione, poi alcune nozioni sopra l'insegnamento della matematica e finalmente varie osservazioni sopra i gradi d'insegnamento. Allo scritto del prof. Galdeano — specialmente in grazia di ciò che contiene la I. Parte di esso — faranno buon viso tutti coloro che amano, di quando in quando, abbandonare le investigazioni speciali, per contemplare nella loro connessione e dipendenza le varie diramazioni della Scienza matematica.

G. L.

BERTRAND A. RUSSELL. *Essai sur les fondéments de la géométrie*. Traduction par A. Cadenat, revue et annotée par l'auteur et par L. COUTURAT. Paris, Gauthier-Villars, 1901, 8.° gr., p. IX + 274 [Prezzo].

È la versione francese di una pregevole opera che i nostri lettori già conoscono (v. *Bollettino*, T. I, 1898, p. 16-18); l'A. vi ha apportato quà e là dei ritocchi che la resero migliore, tenendo conto delle osservazioni che erano state fatte all'originale. Più ancora di siffatte migliorie, ciò che farà preferire da molti matematici la tradizione del lavoro inglese è il *Lessico filosofico*, di cui l'ha corredata il Sig. Couturat: egli ha così reso un vero servigio ai cultori delle scienze esatte che non hanno famigliarità con il linguaggio proprio dai discepoli di Kant e Spencer.

G. L.

A. CAPELLI. *Lezioni sulla teoria delle forme algebriche* (litogr.). Napoli, B. Pellerano, 8.°, p. VIII + 295 [Prezzo L. 10].

« La teoria delle forme algebriche » avverte l'egregio Autore nell'esordio di questa sua nuova pubblicazione, « vanta già parecchie opere, alcune delle quali eccellenti, che trattano abbastanza distesamente di varie speciali categorie di forme. E particolarmente la teoria delle forme binarie si trova in esse già svolta in modo quasi completo; cosicchè ben poco di più potrebbe desiderarsi allo stato attuale di questo ramo dell'algebra. Lo stesso non sembra potersi dire della teoria generale, per la quale lo studioso non può oggidì esimersi dalla consultazione, non sempre agevole delle memorie originali. A colmare, almeno in parte, questa lacuna è inteso il presente volume »; e nessuno meglio del Prof. Capelli poteva dirsi preparato a farlo. Sia dunque il ben venuto questo nuovo numero del catalogo, sempre crescente, di opere didattiche italiane sulle matematiche superiori; possa esso diffondere fra noi la conoscenza di una teoria, a cui l'Hilbert ha dato di recente una nuova orientazione, a renderne più cultori meno scarsi e più operosi.

G. L.

C. Beyel. *Darstellende Geometrie. Mit einer Sammlung von Dispositionen zu Aufgaben der darstellenden Geometrie. Mit einer Tafel.* 8.°, p. xii + 187. Leipzig, Teubner, 1901. [Prezzo del vol. leg. Mk. 3,60].

« La geometria descrittiva, come qualunque lingua straniera, non s'impara dai libri ma dalla viva voce del maestro »; tale è l'opinione dell'autore. Il quale quindi, invece di scrivere un vero trattato di quella scienza, ha creduto opportuno limitarsi a comporre uno di quelli che, con la nomenclatura avente corso in Francia, si direbbe *livre du maître.* Non lunghe spiegazioni, ma semplice tracce; non figure, la cui delineazione è riserbata al discepolo con la scorta del maestro, ma una sola tavola di figure schematiche; non lunghe considerazioni teoriche, ma una grande quantità di *problemi con dati numerici* (1), destinati a dar materia ad esercizi differenti per ciascun allievo. L'opera del Beyel, ha un fine modesto, ma può dirsi lo raggiunge; e, qualunque sia l'opinione che si nutra intorno al principio fondamentale a cui essa deve la vita, riuscirà di gran profitto agli insegnanti di Geometria descrittiva, ai quali essa si rivolge; tanto più che è frutto di lunghe e coscienziose esperienze fatte dall'autore stesso, da tempo docente nel Politecnico di Zurigo.

G. L.

(1) È possibile parlare di *problemi numerici* supponendo (come fa l'autore) di riferire tutte le figure ad un sistema di coordinate avente per piani di riferimento il piano orizzontale, il piano verticale ed il piano dei profili; allora ogni punto è dato dalle sue coordinate e così ogni piano e ogni retta (ad es.) dalle coordinate delle sue tracce sui piani fissi.

E. Dumontel. — *Contributo alle ricerche di Woolhouse e di Makeham*. Milano, Tipografia degli Operai, 1901, 8.°, pp. 40.

L' A., professore di Matematica finanziaria nella Scuola Superiore di Commercio di Bari, è dei pochi in Italia che accoppì la conoscenza di rami superiori della matematica colla competenza sulle questioni tecniche di finanza.

In questo suo opuscolo, nel quale egli in parte riassume il contenuto di precedenti scritti, di cui un sunto è stato pubblicato nei *Comptes rendus* dell' Accademia di Francia, egli si propone sopratutto di porre in luce le relazioni che esistono tra il « vitalizio continuo » e il vitalizio annuale, o per frazione d' anno, pel caso che le successive annualità (o mensualità) corrispondenti, invece di essere costanti, come ordinariamente avviene, variino secondo una legge o un periodo prestabilito.

Tale caso è da lui considerato non solo in rapporto a un determinato tasso dell'interesse, sia semplice che composto, ma anche nell' ipotesi d' una legge più generale, implicante una decrescenza continua nel tasso stesso, a partire da un tasso massimo determinato.

I vari modi nei quali tale descrescenza può essere regolata, compatibilmente colla condizione che il montante, coll' aumentare del tempo, non superi un dato multiplo del suo valore iniziale, sono da lui elegantemente dedotti dalla formola generale: $xy + ay + bx + c = o$ (che esprime la corrispondenza univoca fra il tempo x e il valore y assunto alla fine di esso dal montante) determinandone i coefficienti per mezzo delle suenunciate condizioni relative al tasso iniziale e al massimo valore imposto all'accrescimento del montante stesso.

Per calcolare, tanto in questa ipotesi come in quella dell' interesse composto, il valore dei vitalizi, egli rappresenta la legge di sopravvivenza con una funzione razionale intera di 5.° grado, ottenuta con una conveniente interpolazione mediante la formola di Lagrange.

La legge statistica si trova così, secondo l' A., riprodotta con approssimazione non minore di quella fornità dalla formola di Makeham.

Qualche obbiezione potrebbe esser mossa ai risultati ottenuti dall' A. pel fatto che essi, pur essendo interessanti dal lato puramente teorico e matematico, si riferiscono a una legge di variazione nel tasso dell' interesse, affatto ipotetica ed arbitraria, non coincidente, in generale almeno, con ciò che le statistiche o le teorie economiche ci permettono di constatare o prevedere in proposito.

Ma si può osservare per contro come, anche facendo astrazione dai casi in cui l' interesse è soggetto ad essere determinato per legge (per es. nella mancanza di clausole espresse, o quando si tratti di debiti controversi o esorbitanti dai termini imposti dalla prescrizione ecc.), il caso generale considerato dall'A., della fissazione d'un massimo per l'accrescimento del montante, non solo non esclude ma contiene anzi come caso particolare (o « caso limite ») quello ordinario d'un accrescimento indefinito: dimodochè le formole ottenute dall'A., pur discostandosi da quelle effettivamente utilizzabili in pratica, sono tuttavia suscettibili di condurre a queste per un cammino non privo di interesse per il teorico, e di « suggestività » per il finanziere.

G. Vailati.

G. Vivanti. *Lezioni sulla teoria degl' integrali abeliani, tenute nella R. Università di Messina e raccolte dagli studenti. Corso dell'anno 1900-1901.* Reggio-Calabria, Litografia Massara, 8.°, p. 302.

Introduzione. Teoria della connessione o *Analysis situs.* Alcune formule relative agli integrali doppi. Teoria delle funzioni di variabili complesse.

Integrali abeliani. Preliminari. Teorema di Abel. Applicazioni e conseguenze. Integrali iperellitici. Inversione degli integrali abeliani. Funzioni abeliane; addizione, moltiplicazione e divisione. Cenni sul problema di Dirichlet e sulle considerazioni fisiche di Klein. Applicazione della teoria delle funzioni abeliane alla teoria delle curve piane, in particolare a quelle degli ordini 3 e 4.

E. Cesàro. *Vorlesungen über natürliche Geometrie. Autorisierte deutsche Ausgabe von* Gerhard Kowalewski. Mit 48 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig, Teubner, 1901, 8.°, p. vii + 341 [Prezzo del Vol. legato Mk. 12].

È la traduzione tedesca della bellissima opera del Cesàro *Lezioni di geometria intrinseca.* Qualche ritocco fatto qua e là dall'autore e un particolareggiato indice per materie redatto dal traduttore, faranno accogliere utilmente la versione che annunciamo anche nelle biblioteche degli studiosi italiani.

G. L.

A. Föppl. *Vorlesungen über technische Mechanik.* IV Bd. Dynamik, mit 69 Figuren in Text. 2.ª Auflage. Leipzig, B. G. Teubner, 1901, p. xv + 506 [Prezzo del Vol. legato Mk. 12].

PROGRAMMI E RIASSUNTI DI CORSI UNIVERSITARI

CORSO DI FISICA MATEMATICA

R. UNIVERSITÀ DI MESSINA

Anno Scolastico 1900-1901

1. Parametri differenziali di 1.° e 2.° ordine; trasformazione in coordinate curvilinee ortogonali. Funzioni armoniche.

2. Lemmi di Gauss e di Green. Teorema di Green; teorema della media di Gauss.

3. Prima e seconda funzione di Green e loro ricerca per uno spazio indefinito limitato da un piano indefinito e per una sfera.

4. Funzione potenziale newtoniana di una materia distribuita in uno spazio a tre dimensioni e sue caratteristiche. Discontinuità delle derivate seconde e formula di Weingarten. Teorema di Dirichlet. Funzione potenziale di un ellissoide omogeneo.

5. Funzione potenziale di uno strato semplice e di un doppio strato e sue caratteristiche.

6. Identità di Gauss. Potenziale mutuo di due sistemi. Teoremi di Gauss e di Neumann sui valori della funzione potenziale in uno spazio vuoto. Problema interno ed esterno di Dirichlet. Sua risoluzione in alcuni casi semplici (cerchio, sfera, ecc.).

7. Principii di elettrostatica. Teoria di Poisson. Distribuzione della elettricità su di una sfera soggetta a forze esterne e su di un ellissoide di rotazione nell'assenza di forze esterne.

8. Propagazione del calore in un corpo isotropo omogeneo. Problema delle temperature stazionarie. Ricerca del potenziale di moto di una massa fluida; fluidi incompressibili. Equazione delle piccole vibrazioni.

9. Il problema di Dirichlet nel piano. Rappresentazione conforme di un piano su di un altro; trasformazione circolare di Möbius. Relazione tra il problema di Dirichlet e la rappresentazione conforme di un'area piana su di un'altra. Esempi varii di rappresentazione conforme di aree piane (area compresa tra due cerchi; triangolo a lati circolari con angoli $\alpha\pi$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$; poligono, ecc.) su di un semipiano o su di un cerchio. Cenno della teoria di Schwarz.

10. Il problema di Dirichlet nello spazio. Teorema di Painlevé. Teorema di Liouville e metodo di trasformazione di Thomson. Riduzione del problema interno all'esterno e del problema interno al problema della distribuzione normale di un conduttore. Funzione normale di una calotta sferica.

11. Dimostrazione, secondo Riemann, della possibilità di risolvere il problema di Dirichlet, e critica di questa.

Teoremi varii sulle serie di funzioni armoniche. Teoremi di Volterra e di Harnack.

12. Metodi varii per la risoluzione del problema di Dirichlet. Metodo di Poincaré. *Balayage* interno (esterno) di una sfera. Ricerca della funzione normale di un conduttore qualunque senza punti singolari. Esame dei punti conici. Problema diretto di Dirichlet.

13. Metodo della media di Neumann. Costante di configurazione di una superficie convessa non bistellata. Disuguaglianze di Neumann. Soluzione del problema interno.

14. Determinazione della densità nell' equillibrio elettrico di un conduttore. Metodo di Beer. Equazione funzionale e metodo di Robin.

15. Estensione del metodo di Neumann al caso in cui i valori al contorno ammettono una linea di discontinuità.

Formola di Harnack. Processo alternante di Schwarz. Metodo combinatorio di Neumann.

R. MARCOLONGO.

NECROLOGIO

O. SCHLÖMILCH

Oscar Schlömilch, benemerito fondatore dello *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, nacque a Weimar il 13 Aprile 1823 e morì a Dresda il 7 Febbraio 1901. Dopo avere studiato a Jena, Berlino e Vienna, ottenne la libera docenza a Jena nel 1844. Ivi divenne l'anno seguente professore straordinario e nel 1849 andò a Dresda come Professore di Matematiche superiori e di Meccanica analitica nel R. Politecnico sassone. Dal 1874-1875 occupò un alto ufficio nel Ministero della Pubblica Istruzione, e poi venne collocato a riposo.

La nota forma data dallo Schlömilch al resto della formola di Taylor ne rese popolare il nome nelle nostre scuole. I tedeschi poi attribuiscono a lui il merito sommo di averli, con i suoi ottimi manuali, resi indipendenti dalla Francia, che prima di lui aveva il monopolio dei libri di testo.

Ricorderemo di lui due motti che ne caratterizzano le idee didattiche e scientifiche: « I metodi più rigorosi, se intesi a dovere, sono sempre i più naturali ed i più brevi ». « La prevalenza della planimetria è un errore, il tono dev'essere dato invece dalla stereometria. Perciò la geometria descrittiva offre il miglior mezzo - anche pei Ginnasî -, mezzo che è tanto più facile applicare in quanto che i principî di questa esigono proprio un minimo di teorie stereometriche ».

Della ricca collezione di opere a stampa dovute allo Schlömilch, pubblicate nel lungo periodo che va dal 1851 al 1900 (cioè un mezzo secolo!) si trova un elenco accuratissimo in calce al breve necrologio che dell'illustre estinto ha tessuto M. Cantor (*Bibl. mathematica*, 3.ª Serie, 2.° Vol., 1901, 260-281).

NOTIZIE

Biblioteca Scolastica. — S. Ortu-Carboni. *Esercizi di geometria elementare.* Oltre 1350 con razionali avviamenti alle soluzioni. Livorno, R. Giusti, 1901, p. VIII + 170. [Prezzo L. 1]. (È uno dei migliori libri congeneri, a cui è sperabile che maestri e discepoli facciano la buona accoglienza che merita).

Buffa Pietro. *Primo studio della geometria piana per le scuole secondarie inferiori.* Torino, Paravia, 1901, p. XII + 132 [Prezzo L. 2]. (Va notato questo libretto come rappresentante un primo tentativo di introdurre la logica matematica nelle esposizioni più elementari della geometria).

S. Ortu-Carboni. *Nozioni intuitive di geometria elementare*, per il Ginnasio inferiore, la Scuola tecnica e la Scuola complementare. Firenze, Successori Le Monnier, 1901, 8.°, p. VIII + 199 [Prezzo L. 1.75].

A. Conti. *Elementi di aritmetica razionale ad uso degli allievi delle Scuole normali. Con 12 Note di Consigli didattici ed esercizi.* Seconda Edizione. Bologna, Zanichelli, 8.°, pp. VII + 307 [Prezzo L. 2].

*
* *

PER LA STORIA DELLE SCIENZE. La V Sezione (Storia delle scienze) del Congresso internazionale di storia comparata tenutosi a Parigi durante l'Estate del decorso anno, nella seduta del 28 Luglio 1900 emise i seguenti voti:

1.° Che la storia elementare delle scienze, esposta dai professori delle scienze stesse, sia svolta nell'insegnamento secondario e riceva una sanzione nell'esame di baccalaureato.

2.° Che corsi speciali sopra la storia generale delle scienze sieno creati alla Sorbona, alla Scuola Normale superiore, alla Scuola politecnica ed in tutte le principali Università francesi.

Il Congresso diresse siffatti voti, non soltanto all'autorità universitaria, ma anche a tutti coloro che s'interessano alla storia della scienza, ricordando loro che la legge del 1896 autorizza le Università a ricevere doni dai privati destinati alla fondazione di corsi speciali; ed aggiunse essere desiderabile la creazione di uno speciale diploma scolastico sopra la storia delle scienze

*
* *

CONGRESSO INTERNAZIONALE DI SCIENZE STORICHE. Questa importante riunione, che avrà luogo a Roma nella prossima Primavera, conterrà una Sezione dedicata alla storia delle Scienze matematiche e fisiche, di cui vennero scelti come Presidente onorario il Prof. Cremona, Presidente effettivo il Prof. Cerruti e come Vice-presidente per le matematiche il Prof. Favaro. Che desidera partecipare al Congresso invii il proprio indirizzo, assieme alla quota di L. 12 al Segretariato generale avente la propria sede presso la R. Accademia di S. Cecilia (Via dei Greci 18). Le numerose adesioni già pervenute e le comunicazioni annunciate danno fiducia che anche le scienze positive saranno degnamente rappresentate in quel consesso di dotti.

*
* *

NUOVI MODELLI DI MATEMATICA. La Casa editrice M. Schilling, che, come è noto, ha succeduto alla celebre Casa Brill, ha pubblicato ora due nuove serie di modelli. Una (la XXVI) è destinata a servire nello studio della Geometria descrittiva (10 modelli in gesso dovuti al Prof. Hauck) e della Geometria projettiva (8 modelli, del Prof. Schilling). L'altra (Serie XXVII) comprende tre modelli di lime equipotenziali e di lime di forze elettriche. Come si vede, il campo si allarga: dopo la geometria e l'analisi, anche la Fisica matematica porge argomento a serie interessanti!

*
* *

Carteggio di Leibniz. Segnaliamo ai nostri lettori la pubblicazione delle lettere scambiatesi fra Leibniz e lo scienziato polacco Kochanski, recentemente intrapresa da S. Dickstein nel noto periodico *Prace matematyczno-fizyczne* (Vol. XII, Warszawa 1901).

*
* *

Un nuovo Giornale. È: *Il Bollettino di Matematica*, periodico particolarmente destinato ai Professori di Matematica delle Scuole Medie (classiche, tecniche e normali); sarà diretto dal Prof. A. Conti e conterrà:

a) Articoli di Matematica elementare (Aritmetica, Algebra, Geometria, Trigonometria) in special modo relativi alle parti di questa scienza che vengono studiate nelle Scuole Medie.

b) Articoli di didattica in cui vengano discussi i limiti e le norme dell' insegnamento della Matematica nelle Scuole Medie.

c) Una rubrica speciale destinata alla discussione delle questioni di terminologia matematica.

d) Studi di comparazione riflettenti l' incremento degli studi matematici nelle Scuole Medie, dell' Italia e degli altri Stati.

e) Articoli di Storia della Matematica elementare.

f) Recensioni dei libri di Matematica *composti per le Scuole Medie.*

g) Rassegna delle principali riviste di matematica, italiane e straniere.

h) Resoconto dei Congressi dl matematica, italiani e stranieri.

i) Relazioni e graduatorie dei Concorsi per cattedre di matematica; notizie del movimento del personale insegnante.

l) Una rubrica (*rubrica intermediario*) destinata ad accogliere da tutti i lettori domande intorno a qualsiasi argomento compreso nel programma del periodico, e che accoglierà altresì le risposte via via date alle dette domande dai lettori medesimi o dalla Direzione.

m) Concorsi a premi su argomenti d'indole scientifico-didattica.

Questo nuovo periodico sarà pubblicato bimestralmente (1.° gennaio, 1.° marzo, 1.° maggio, 1.° luglio, 1.° settembre, 1.° novembre) in fascicoli di 40 pagine almeno. L'abbonamento sarà annuale, con decorrenza dal 1.° gennaio 1902; la quota d'abbonamento sarà di L. 4.

*
* *

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung. Questa pubblicazione — resa ormai celebre per gli importanti Resoconti sopra varì rami della matematica in essa contenuti — sta per trasformarsi in un periodico mensile, del quale la direzione venne affidata al Prof. A. Gutzmer di Jena e l'edizione alla Casa Teubner di Lipsia. Ogni volume del *Jahresbericht* conterrà anzitutto un resoconto delle sedute della Società e della condizione finanziaria della stessa, l'elenco dei suoi membri e un cenno sulle comunicazioni fatte nelle sue annuali adunanze. Verranno pure inseriti gli estesi *Berichte* scientifici promossi dalla Società; ma quelli troppo lunghi formeranno volumi separati; nè si escluderanno analoghi articoli sopra ricerche speciali, anzi per tali lavori la Società rivolge un invito per ottenere collaboratori in tutto il mondo.

Nel nuovo giornale troveranno il loro posto naturale i discorsi accademici (prolusioni, discorsi inaugurali, ecc.) che sino ad ora, essendo sparsi ed a molti inaccessibili, avevano un numero di lettori non certo proporzionato all'interesse che molti di essi presentano; inoltre necrologie di scienziati, appartenenti o non alla Società. Per raggiungere poi uno degli scopi di questa — cioè di stabilire relazioni vivaci fra gli organi sparsi della scienza, onde assicurare fra questi influenze scambievoli — il *Jahresbericht* conterrà notizie concernenti gli avvenimenti che riflettono le matematiche e le loro applicazioni, e cioè le questioni didattiche relative all'insegnamento superiore, le imprese matematiche collettive, le questioni poste a concorso (enunciati e soluzioni) ed il personale insegnante; pubblicherà ancora i sommarì di lezioni di Astronomia, Matematica e Fisica. Una rubrica speciale conterrà brevi osservazioni, enunciati di soggetti degni di studio, correzioni ad opere pubblicate, ecc.; ma le lunghe memorie saranno escluse. Troveranno invece accesso informazioni sopra gli atti di accademie e società, tedesche e straniere. Finalmente una sezione letteraria conterrà una rassegna delle opere uscite o di prossima pubblicazione, nonchè dei giornali.

Con questo programma il nuovo giornale non è un duplicato di altri periodici esistenti già in Germania, rappresenta anzi un utile complemento ad essi.

Ogni volume del *Jahresbericht* comprenderà 25 fogli di stampa; il prezzo ne è fissato in 11 Mk. pei membri della « Deutsche Mathematiker-Vereinigung », in 14 Mk. per gli altri.

Il primo fascicolo sarà doppio (Gennaio-Febbraio) ed uscirà fra pochi giorni.

Marco Bertolone, Direttore-Gerente

Genova - Tipografia R. Istituto Sordo-muti - 1901.

BOLLETTINO

DI

BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA

DI

GINO LORIA

ANNO V.

1902

TORINO

CARLO CLAUSEN

LIBRAIO DELLE LL. MM. IL RE E LA REGINA

1902

Genova. – Tipografia Sordomuti

INDICE

RECENSIONI ED ANNUNZI.

PROGRAMMI E RIASSUNTI

DI CORSI UNIVERSITARI.

NECROLOGIO.

NOTIZIE.

ANNO V. GENNAIO, FEBBRAIO E MARZO 1902.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. **6**, per l'estero Fr. **7.50**. Numeri separati L. **2** caduno. — Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

SUI MANOSCRITTI INEDITI DI THOMAS HARRIOT.

Nota di G. VACCA

I.

Una delle migliori biografie di questo matematico è quella scritta da Miss A. M. Clerke (A. M. C.), ed inserita nel Dictionary of National Biography ed. by Leslie Stephen and Sidney Lee, London, 1890, vol. 24, pag. 437-439.

In questa nota mi propongo di aggiungere alcune notizie a quelle ivi date, relative ai numerosi Mss. inediti di Harriot.

Per questo scienziato, come per quelli che non riuscirono, in vita, a pubblicare il frutto dei loro lavori, queste ricerche hanno molto interesse, tanto più poi per Harriot, il quale per le lodi dategli, forse senza prove sufficienti, da Wallis, ebbe a soffrire gravi critiche dagli storici della matematica, fino al punto che lo si cita soltanto, o quasi, per dire che la sua *Artis analyticae Praxis* (1631) non contiene nulla d' interessante.

Io ho già notato (1) che ad H. si devono importanti diseguaglianze algebriche, la ingegnosa dimostrazione delle quali era già stata rilevata da Lagrange (2). Desidero ora aggiungere altre prove del suo genio matematico.

I manoscritti di H. attualmente conosciuti, furono scoperti nel 1784 dal Barone di Zach, il quale ne rilevò l'importanza per la storia dell'astronomia, e ne propose una parziale pubblicazione. Questa però non ebbe luogo, avendo il Dr. Robertson, professore Saviliano di astronomia, manifestata l'opinione che tale pubblicazione non avrebbe contribuito al progresso della scienza (Edinburgh Philosophical Journal a. 1802, VI, 314).

Io ho potuto scorrere rapidamente nel mese di Agosto, i suoi manoscritti conservati nel British museum e descritti nella biografia sopracitata. Constano di parecchie migliaia di pagine contenenti frammenti, calcoli, disegni, ecc.

Sono indubbiamente mss. originali di H. gli otto volumi intitolati: *T. Harriot Math. Papers*, pres. by the Earl of Egremont, add. 6782-9.

Non sembrano invece suoi i mss. Harl. 6001-2, 6083, i quali contengono in parte frammenti copiati dagli otto volumi precedenti, in parte sono evidentemente posteriori ad H. Così p. es. il mss. 6083, fol. 279-302 contiene degli interessanti *Élements des indivisibles*, ed un *Traicté d'Algèbre*, in francese, in cui, come dice anche Miss Clerke (p. 439), vi sono notevoli applicazioni dell'algebra alla geometria. Questo trattato d'Algebra contiene anche il famoso teorema sul numero delle radici positive di una equazioue, enunciato per la prima volta da Descartes nella sua *Geometria* (1637). Sarebbe interessante poter stabilire la data e l'autore di questo trattato che non è certo di H., come lo prova ad es. l'uso degli esponenti che egli non adoperava.

Ecco ora alcune tra le cose più notevoli che ho trovato in questi manoscritti.

II.

HARRIOT, *forse per il primo, ha misurato l'area del triangolo sferico.*

Questa scoperta si attribuisce ordinariamente a Girard e a Cavalieri. Così ad es. il Baltzer nei suoi Elementi di matematica (vers. ital. di L. Cremona, parte 5.ª, Genova. 1877, p. 43 nota):

« GIRARD (*Invention nouvelle en Algèbre* 1629) conobbe questo teo-
» rema, ma lo dimostrò incompletamente. Esso fu pubblicato, colla

(1) Formulaire de Mathématiques, p. 64, Paris, Carré et Naud, 1901.

(2) Œuvres, t. 4, p. 436,

» semplice dimostrazione qui riportata da Cavalieri *Directorium generale Uran.*, 1632). La regola pel calcolo dell' area di un poligono sferico è riferita da Broscio (*Apologia* aristot. et Euclid. 1690, p. 78), come desunta *ex antiquis in Vitellonem notis*. Questa citazione, come anche la notizia del medesimo autore, p. 79: *demonstratio amplitudinis* anguli solidi refertur ab H. Briggio ad Th. Harriotum — mancano finora di più ampia conferma ».

Ho riportato intero il passo del Baltzer perchè ne dò qui sotto la conferma, non credendo sia stata ancora data da altri.

Nessuna risposta è stata finora pubblicata alla Quest. 22 fatta dal prof. Eneström, il quale domandava nella sua *Bibliotheca Mathematica* (a. 1888, t. 2, p. 96), se qualche geometra anteriore a Cavalieri o a Girard avesse ricercato l'area di cui qui si tratta.

H. Brigg era in corrispondenza con Keplero. Nella sua lettera del 20 Febbraio 1625, con cui accompagnava l' invio della sua *Arithmetica Logarithmica* (Londini, 1624), gli scriveva:

« Cum doctissimus vir et geometra, Thomas Hariottus, longe peritissimus invenerit modum metiendi angulum quemlibet solidum, ab angulis planis comprehensum, quantitatem anguli solidi tetraëdri hic adjungendam censui, ut constaret, quam longe recedant a vero, qui arbitrantur, 12 angulos tetraëdri complere locum solidum.

« Valet enim Angulus solidus tetraëdri $\frac{350358}{1000000}$ anguli solidi recti, » ita ut locus solidus capiat 11 huiusmodi angulos et amplius.

» Cum propediem expectemus et exoptemus ipsius auctoris librum posthumum (T. Harriotus, 1621), qui istud problema inter alia multa ejus acutissima scripta nobis patefaciet, modum mensurandi illi integrum relinquam: ne illi quicquam proripuisse aut ipsam rem non pro dignitate tractasse videar ».

(Kepleri, opera omnia ed. Frisch, vol. IV, Frankofurti, 1863, p. 661).

Questo passo di Brigg rende manifesto che Harriot sapeva misurare l' area del triangolo sferico; il calcolo riportato lo dimostra.

Ma vi ha di più. Nel mss. add. 6787, fol. 106 r. si trova il passo seguente, di mano di Harriot:

« Inveni rationem accuratam mensurandi superficies triangulorum sphaericorum 18: sep. 1603.

» Et est talis: Adde simul omnes angulos trianguli inde detrahe 180, quod superest fac numeratorem ad 360. Dico quod illa fractio exprimit partes haemisphaerii quae continet triangul: vel tot gradus numera in circulo magno quot sunt in numeratore et a polo illius circuli descendunt duo quadrantes terminantes illos gradus dico quod hoc triangulum aequatur triangulo sphaerico praedicto ».

Lo stesso passo è ricopiato nel vol. 6001-2, fol. 24 Harl. Mss. da un copista anonimo (forse Pell?), il quale vi ha scritto sotto Mr. Harriot.

Più innanzi (add. 6785, fol. IV, fol. 119 r.), ma senza data, si trova, pure scritto da H. il seguente:

« Canon universalis, pro superficie cuiuslibet polygoni sphaerici.
» Adde omnes angulos cuiuslibet polygoni simul: a summa subtrahe
» toties 180 quoties possibile: dimidium reliqui aequale est superficici
» polygoni ».

Non vi ha ragione per dubitare dell' autenticità di questi passi: si può quindi supporre che tanto Girard, quanto Cavalieri, avessero almeno avuto sentore della scoperta di Harriot, annunciata a Keplero nel 1625, e già nota a Brigg. Dobbiamo quindi deplorare che gli eredi di H. non abbiano pubblicato le opere inedite, azione doverosa, poichè se H. non pubblicò le sue scoperte finchè visse, fu perchè fu occupato per gran parte della sua vita dai pubblici negozi, in cui diede prova del suo ingegno e della sua attività, e perchè, terminati, questi, la cattiva salute forse glielo impediva, come scriveva in una lettera a Keplero del 2 Dec. 1606:

« . . . ob malam valetudinem, qua nunc ita affectus sum, ut mihi
» molestum sit vel scribere, vel accurate de aliqua re cogitare et
» argumentari ».

(Kepl. op. t. 2, 1863, p. 71).

III.

I coefficienti binomiali, come prodotti sono stati dati, con formole generali da Harriot.

Si attribuisce di solito a Newton questa importante scoperta. Ma già il Koppe nella Biblioteca Mathematica t. 2, *s.* 3, p. 360, a. 1901, osserva che essa si trova nella *Arithmetica Logarithmica* di Brigg (1624).

Posso aggiungere che i coefficienti binomiali così considerati si trovano molte volte nei Mss. di Harriot (morto nel 1621).

Egli pensava di pubblicare un' opera di cui ci ha lasciato il titolo: « *De numeris triangularibus et inde de progressionibus arithmeticis Magisteria magna* ».

Di essa si trovano parecchi tentativi di redazione e frammenti nel vol. add. 6782, ricopiati in parte dallo stesso anonimo sopra citato, nel Harl. Mss. 6083. Da quanto ho potuto vedere sembra che dovesse essere un trattato contenente molte proprietà dei coefficienti binomiali, e molte formole sommatorie abbastanza complicate.

Eccone alcuni frammenti:
(fol. 108 r.)

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ & \times & & \times & & \times & \\ 1 & = & 2 & = & 3 & = & 4 \ \&c. \\ & \times & & \times & & \times & \\ 1 & = & 3 & = & 6 & = & 10 \end{array}$$

&c.

$$\left.\begin{array}{l} 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{12}{12} \cdot \frac{123}{123} \cdot \frac{1234}{1232} \cdot \\ 1 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{23}{12} \cdot \frac{234}{123} \cdot \frac{2345}{1234} \cdot \end{array}\right. \&c.$$

&c.

$$1\,\frac{n}{1} \quad \frac{n \atop n+1}{1\,2} \quad \frac{n \atop {n+1 \atop n+2}}{1\,2\,3} \quad \frac{n \atop {n+1 \atop {n+2 \atop n+3}}}{1\,2\,3\,4} \ \&c.$$

Dalle quali tabelle appare come H. fosse in possesso delle formole generali per il calcolo dei coefficienti del binomio.

(fol. 110 r.)

$$\begin{array}{l} 1 = 1 \\ 1 \cdot 1 = 2 \\ 1 \cdot 2 . 1 = 4 \\ 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = 8 \\ \quad \dots \qquad \&c. \end{array}$$

Tabella che dà la somma dei coefficienti di un binomio.

(fol. 112 r.)

$$\begin{array}{lll} c & & \\ & c+b & \\ b & & d+2c+b \\ & b+a & \\ a & & c+2b+a \end{array}$$

e in generale (id.):

$$g + \frac{n|f}{1|} + \frac{{n-1 \atop n}\Big| d}{1\,2\ |} + \frac{{n-2 \atop {n-1 \atop n}}\Big| c}{1\,2\,3\ |} + \frac{{n-3 \atop {n-2 \atop {n-1 \atop n}}}\Big| b}{1\,2\,3\,4\,|}$$

Qui H. anticipa la scoperta delle formole che danno le somme successive di una successione a, b, c, d, f, g, ... Questi calcoli furono

ripresi soltanto nel 1668 da Mercator, il quale, nella sua Logarithmotechnia, diede le formole per la differenza n.^{ma} di una successione (1). Soltanto dopo il 1700 il calcolo delle differenze finite assunse un ulteriore sviluppo.
(fol. 154 r.). Dà le somme successive dei numeri triangolari.
(fol. 155. r). Dà le somme successive dei numeri quadrati
(fol. 218 r.). Non conoscendo l' uso degli esponenti tenta una notazione corrispondente: così scrive $\boxed{n,\, 7}$, oppure $\boxed{7,\, n}$ per indicare n^7.

Qui terminerò osservando che ho abbreviato per comodità tipografica le tavole, molto estese, di H. sopra riportate, e che la forma dei segni $=$, $>$, nei mss. di H. differisce alquanto da quella adottata dagli editori della sua *Artis analyticae Praxis*, che è quella ora in uso.

Possiamo di qui farci un' idea di quanto H. fosse andato innanzi nello studio dell' aritmetica, anticipando egli di una quarantina d' anni le scoperte fatte più tardi da Pascal, da Fermat e da altri, e come sia stato dannoso alla sua fama che i suoi studi siano rimasti nascosti al pubblico.

A giustificare però coloro che ebbero la possibilità di pubblicarli, e non lo fecero, rimane solo il fatto che i mss. di H., contenenti soltanto formole e calcoli numerici, quasi senza testo, dovevano essere per i suoi contemporanei di assai difficile lettura.

Ospite degli Inglesi per alcune settimane, ho voluto dimostrare loro la mia gratitudine per la cordiale accoglienza ricevuta, offrendo loro questo mio piccolo contributo alla storia dei loro matematici del secolo XVII, forse oggi troppo trascurati, come spero di poter meglio provare in seguito.

Torino. Novembre 1901.

RECENSIONI ED ANNUNZI

Le operazioni distributive e le loro applicazioni alla analisi, di SALVATORE PINCHERLE, in collaborazione con UGO AMALDI. Bologna, Nicola Zanichelli, 1901, 8.°, pag. XII + 490 [Prezzo L. 15].

La teoria delle operazioni funzionali distributive, intuita ed intraveduta fino dai primordi del calcolo differenziale, studiata sotto aspetti

(1) Cfr. Revue des Mathématiques, t. 7, p. 101. a. 1901.

diversi e con diversi nomi dai matematici della fine del secolo XVIII e del principio del XIX, lasciata poi in disparte, quando gli studi critici sui fondamenti del calcolo, fecero nascere dei dubbi sulla validità effettiva dei risultamenti che con essa si conseguivano, è stata ripresa in questi ultimi anni, dal prof. Pincherle in Italia e, dopo di lui, da alcuni valorosi scienziati della scuola francese.

Il Pincherle principalmente ha conservato alla teoria la generalità di vedute, con cui nei primi tempi fu concepita: introducendo il rigore nei metodi, stabilendo i campi di validità degli sviluppi, mostrandone le facili ed eleganti applicazioni, non pure l'ha posta su basi sicure, ma l'ha completamente ricostruita, e la presenta ora, intera in ogni sua parte, nell'opera che abbiamo sott'occhio.

Nel *discorso preliminare* alla **Analisi derivata** (1) il BRUNACCI esponeva nettamente lo scopo di questo genere di studi dicendo:

« . . . . Ma tutti questi rami di analisi potrebbero eglino derivarsi da un principio comune, da una veduta generale di considerare le quantità, di modo che essi non differissero fra di loro, che nel particolarizzare lo stesso generale principio? Questa unità di origine una volta riconosciuta, quei calcoli che sembrano più diversi, il calcolo differenziale per esempio, e quello degli esponenti, si troverebbero così imparentati fra loro, perchè riuniti sotto uno stesso punto di vista. Le sparse teorie essendo in questa guisa richiamate ad una unica sorgente, la matematica acquisterebbe un grado di semplicità ed una generalità, di cui non si è avuto fin ora alcuna idea; e ciò che interessa ancora più, si travederebbero i progressi, che essa è per fare ».

L'opera del Pincherle è in tutto rispondente a quei desideri.

I principî su cui essa si fonda sono pochi e di uso comune; da questi però con saldo raziocinio e lucida esposizione, vengono d'una in altra tratte e sviscerate tutte le necessarie conseguenze, giungendo a risultamenti della massima generalità ed estensione, che costituiscono uno dei più potenti e sicuri mezzi di analisi.

All'intendimento dell'opera basta la conoscenza degli elementi della teoria delle funzioni, ma i frutti migliori ne saranno raccolti da chi già è in possesso di una discreta coltura scientifica.

Questi scorgerà di qui come un gran numero di principî diversi possano essere ben compresi ad un tempo, senza che sieno insieme confusi, troverà i fondamenti comuni alle varie teorie, che già egli aveva separatamente studiate, vedrà fino a qual punto esse camminino insieme ed in che si differenzino le une dalle altre. Penetrando egli così più addentro nella filosofia della scienza, avrà modo di coltivare

(1) Un bel volume di 217 pagine stampato a Pavia nel 1802.

quella qualità rara e preziosa della mente che il Pascal ed il Beltramì chiamano spirito fine.

Un altro vantaggio che può dare la lettura di questo libro, è quello di condurre il lettore fino ai confini che, in quella direzione, sono ora segnati alla scienza; ad ogni passo si presentano perciò, spontaneamente, questioni di attuale interesse e di indiscussa utilità; alle quali è sempre possibile, se non sempre agevole, rispondere, per chi abbia acquistato il possesso delle teorie e la pratica dei metodi usati nel testo.

La facile e piana esposione, i continui richiami al testo, le numerose ed accurate notizie bibliografiche, ed anche la nitidezza della composizione tipografica, l'accurata numerazione dei paragrafi, riportata insieme col titolo dei principali argomenti al sommo della pagina, l'indice alfabetico delle cose più notevoli trattate nell'opera; fanno fede della cura che gli autori e gli editori hanno posto per renderne facile e gradita la lettura, pronta la consultazione.

I pochissimi errori di stampa non sono mai tali da poter generare dubbio o confusione, non vale la pena di notare qualche punto che la troppa concisione rende un po' oscuro, e qualche passo in cui si concede troppo abbondante svolgimento ad un facile tema; piuttosto parmi di poter notare che il libro vantaggierebbe da una trasposizione di capitoli, che saldasse più strettamente insieme le parti che sono di puro svolgimento di teoriche generali, e concedesse maggior rilievo alle analogie che si riscontrano nella trattazione di argomenti diversi fatta con metodo unico.

Nello studio del Calcolo funzionale si possono seguire due indirizzi essenzialmente distinti, e cioè:

I). considerare l'insieme di tutte le funzioni analitiche, come costituente uno spazio vettoriale ad infinite dimensioni ed estendere a questo spazio la teoria delle omografie negli spazi lineari ad un numero finito di dimensioni;

II). generalizzare i metodi usati nella teoria delle funzioni analitiche, considerando come elemento fondamentale, lo sviluppo di una operazione distributiva in serie ordinata secondo le potenze del simbolo D di derivazione ordinaria.

All'una od all'altra di quelle generali vedute, possono raccordarsi alcune speciali interpretazioni a cui sono subordinati i seguenti metodi di indagine:

III). La determinazione di una operazione funzionale distributiva a senso unico, mediante relazioni analitiche (dette *equazioni simboliche*) fra il simbolo operativo e quelli delle sue derivanti funzionali successive.

IV). La determinazione di una operazione distributiva a senso unico mediante le funzioni che essa fa corrispondere alle potenze intere, positive e nulle, della variabile.

V). Lo studio delle trasformazioni nello spazio che ha per elementi le operazioni distributive a senso unico.

I primi cinque Capitoli dell'opera di Pincherle e Amaldi seguono l'indirizzo I), negli altri prevale il II). Le equazioni simboliche sono, in casi abbastanza istruttivi, studiate nel Cap. 7.°: tutto il Cap. 13.° è dedicato allo studio delle trasformazioni delle operazioni, ed infine, nel Cap. 7.°, si studiano le operazioni normali col metodo IV).

Quelle strade partono da punti diversi ma concorrono verso una unica mèta. Alcune di esse furono intraviste fino dai primi tempi, altre si debbono alla geniale intuizione del Prof. Pincherle. Quelle indicate coi numeri II), III), hanno origine da una fortunata estensione del concetto di derivazione; la IV) si collega con la teoria dei determinanti infiniti e dei sistemi di infinite equazioni lineari, e da sola potrebbe servire allo svolgimento completo di tutta la teoria generale.

Gioverà ora, per dare una migliore idea dell'opera, seguirne passo passo lo svolgimento in un brevissimo sommario.

I primi quattro capitoli espongono sinteticamente la teoria degli spazi lineari ad n dimensioni e delle operazioni distributive sui vettori di questi spazi.

Lo studio delle operazioni degeneri conduce alla definizione di enti e di spazi invarianti; sono interessanti i risultamenti relativi ad operazioni commutabili fra loro ed in particolare, lo sviluppo di una operazione distributiva in serie procedente secondo le potenze di un'altra operazione con essa commutabile.

Nel Cap. IV è studiata la struttura degli spazi invarianti ad un numero finito di dimensioni. Il metodo seguito in questo studio è dovuto allo stesso prof. Pincherle che ne fece oggetto di una comunicazione all'Istituto lombardo nell'anno 1896. — Estendendo opportunamente i concetti di sistemi ed equazioni fondamentali, e di radici proprie, egli giunge con grande semplicità di mezzi a risultamenti analoghi a quelli che si hanno nella teoria dei divisori elementari di Weierstrass.

Nel Cap. V si restringe il concetto di ente od elemento alle funzioni analitiche, ma si estende quello di iperspazio, ammettendo che il numero delle dimensioni possa anche essere infinito, purchè numerabile.

In particolare si studiano le proprietà degli insiemi S^r costituiti da tutte le serie di potenze che hanno raggio di convergenza superiore al numero positivo r.

Fra le operazioni distributive sui vettori di quegli iperspazi sono considerate come fondamentali quelle dette di moltiplicazione, derivazione, sostituzione, e di queste si studiano le proprietà caratteristiche.

È degna di nota infine la osservazione che agli spazi S^r, considerati come intorni dell'elemento 1, si possono aggiungere elementi nuovi, considerati come intorni di qualunque funzione analitica μ, generando così spazi a mano a mano più estesi, con metodo che non è senza analogia con quello che prende il nome di Galois nella teoria delle equazioni algebriche.

La generalizzazione della formula del Taylor, fatta con l'attribuire al simbolo di derivazione una maggiore ampiezza di significato, è questione trattata da molto tempo, e da molti, ma sempre, prima del Pincherle, in modo formale, cioè senza che fossero note le condizioni per la validità effettiva degli sviluppi.

Il Pincherle invece, il quale sembra ispirarsi al concetto che, come ogni funzione analitica è rappresentabile mediante una serie di potenze della variabile, così ogni operazione distributiva funzionale è sviluppabile in serie di potenze del simbolo di derivazione D, ha cominciato col dimostrare che ogni espressione della forma

$$A(\varphi) = \sum_{0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} D^n \varphi,$$

dove le α_n sono funzioni analitiche delle x regolari entro un'area finita, rappresenta una operazione distributiva a senso unico che ha un campo di validità comprendente infinite serie di potenze.

Egli risolve di poi, con grande semplicità di mezzi, le due questioni:

a) Data la successione $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ determinare quella delle funzioni $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \ldots$ che la operazione $A(\varphi)$ definita mediante la serie dianzi considerata, fa corrispondere alle potenze intere, nulle e positive della variabile.

b) Data una operazione $A(\varphi)$ per mezzo della successione ξ, dei valori che essa fa corrispondere alle potenze intere, nulla e positiva della variabile, determinare le α_n per modo che essa sia rappresentabile dalla serie $\sum_{0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} D^n(\varphi)$.

Stabiliti questi punti, egli introduce il concetto di *derivata funzionale* $A'(\varphi)$, mediante la espressione

$$A'(\varphi) = A(x\varphi) - x A(\varphi)$$

che rappresenta lo scarto della operazione A dalla commutabilità con la operazione M_x, di moltiplicazione per x.

Le regole di derivazione funzionale sono una immediata estensione di quelle di derivazione ordinaria. In particolare la derivata della operazione M di moltiplicazione è uguale allo zero, quella della operazione D di derivazione è uguale ad 1, ciò che fa considerare le operazioni M e D come analoghe, nel calcolo delle operazioni distributive, a ciò che sono rispettivamente la costante e la variabile indipendente nella teoria delle funzioni.

Con la introduzione di questi concetti le serie studiate a principio del Capitolo conducono alle espressioni:

$$A(\varphi) = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} \overset{(n)}{A}(1) \overset{n}{D}(\varphi)$$

$$A(\mu\varphi) = \Sigma \frac{1}{n!} \overset{(n)}{A}(\mu) \overset{n}{D}(\varphi)$$

delle quali è manifesta l'analogia con la serie del Taylor, nella ordinaria teoria delle funzioni.

Nel seguito del capitolo si studiano le potenze negative del simbolo D, e le serie di potenze di $D.^{-1}$

Il Cap. VII contiene alcune applicazioni immediate di quelle formule.

Anzitutto si considera il caso che le funzioni α_n si riducano tutte a costanti numeriche. Le operazioni rappresentate dagli sviluppi $\Sigma \frac{\alpha_n}{n!} \overset{n}{D}\varphi$ sono in quel caso commutabili con la derivazione, e reciprocamente. Da ciò un facile modo per istudiare le proprietà caratteristiche di tali operazioni.

Come seconda applicazione si trova lo spazio di radici di una forma lineare a coefficienti numerici in una data operazione distributiva a senso univoco; quesito che comprende come casi speciali l'integrazione di equazioni lineari a coefficienti costanti, differenziali od alle differenze finite.

Tornando alle operazioni commutabili con la derivazione, si trova che desse fanno corrispondere alle potenze x^n positive, intere della variabile, dei polinomi π_n del grado indicato dall'indice, detti *polinomi di Appell*, e dei quali si studiano le proprietà principali. Risalendo di nuovo alla espressione $A(\varphi) = \Sigma \frac{\alpha_n}{n!} \overset{n}{D}\varphi$, e supponendo che α_n sia un polinomio di Appell di grado n^{esimo} $(n = 1, 2, 3\ldots)$ si trovano tutte le operazioni che trasformano uno spazio ad infinite dimensioni in uno spazio ad un numero finito di dimensioni.

In fine si dà un cenno delle equazioni simboliche e si studiano con sufficiente larghezza due tipi speciali, assai importanti, di tali equazioni.

Si è già avvertito che una operazione funzionale è completamente determinata dalla successione ξ_n delle funzioni che dessa fa corrispondere alle potenze intere, nulla e positiva, della variabile.

Sotto questo punto di vista sono da considerare in primo luogo, come le più semplici di tutte, quelle operazioni che ad x^n fanno corrispondere espressioni della forma $a_n\, x^n$.

Tali operazioni sono dette *normali dell' ordine zero*, e sono in generale dette *normali dell' ordine p*, quelle che fanno corrispondere alle x^n una successione di polinomi della forma:

$$\xi = x^n \left(a_{n.0} + a_{n.1}\, x + \ldots + a_{n.p}\, x^p \right)$$

Il Cap. VIII è appunto dedicato allo studio di tali operazioni, e questo studio è fatto con profondità di concetti, e semplicità di metodo, in modo da esaurire completamente l' argomento. Si noti a questo proposito che, come lo stesso Prof. Pincherle ha fatto notare nei suoi appunti di calcolo funzionale (Rend. Ist. Lombardo 1897) il metodo qui tenuto per lo studio delle operazioni normali, può con successo essere applicato a qualunque operazione distributiva a senso unico.

Il Cap. IX tratta della operazione aggiunta. La definizione che qui si dà di aggiunta è quella che conduce più rapidamente alla conoscenza delle relazioni fra una data operazione e la sua aggiunta.

Mi si permetta però di dire che quella definizione pare a tutta prima alquanto vaga, e sconcerta un poco il lettore, forse perchè non è immediatamente legata coi risultamenti conseguiti nei capitoli precedenti. Forse apparirebbe più semplice e naturale partire da una elegantissima proprietà che può servire da definizione della aggiunta, che il Pincherle stesso ha trovata fino dal 1898 (Sulle operazioni aggiunte — Rendiconti Acc. di Bologna), e che si enuncia brevemente così:

Indicando con

$$\xi_{n.} = a_{n.0} + a_{n.1}\, x + a_{n.2}\, x^2 + \ldots$$

la funzione A (x^n), si ha il quadro

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{0.0},\ a_{0.1},\ a_{0.2} \ldots \\ a_{1.0},\ a_{1.1},\ a_{1.2} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

atto a definire la operazione A. Il quadro che definisce la aggiunta della A, si ricava da quello cambiando le linee in colonne.

La teoria generale delle operazioni distributive è nuovamente interrotta per dar luogo a due importantissime applicazioni, riguardanti le forme lineari differenziali ed alle differenze finite.

La teoria delle forme alle differenze è svelta nel Capitolo IX, seguendo le idee già esposte dal Pincherle in parecchi lavori, e specialmente nella sua: Algebra delle forme lineari alle differenze (Bologna (1895) e nel suo corso sulle funzioni ipergeometriche (giornale di Battaglini 1894). Risultamenti notevoli ed in parte nuovi, sono quelli relativi alla determinazione del campo di variabilità della variabile indipendente e degli spazi di funzioni che formano gli elementi di questo campo, all'estensione del concetto di campo di razionalità, di moltiplicatori, ed alle serie di potenze del simbolo θ di accrescimento finito. Sono notevoli anche una formula di interpolazione corrispondente a quella nota in Algebra col nome di Lagrangia, e la risoluzione del problema della inversione di una data forma lineare alle differenze.

La teoria delle forme differenziali lineari è riassunta nei Cap. XI e XII.

Le idee si svolgono con lo stesso ordine che fu osservato per le forme alle differenze, e questa uniformità di metodo contribuisce alla chiarezza e brevità della esposizione. Le dimostrazioni poi, spesso originali, sono sempre date nel modo che appare più facile ed elegante.

Gli argomenti principali trattati in questi capitoli si riferiscono all'Algebra delle forme lineari differenziali — teorema del Fuchs, Wronskiano, — spazi di radici — campi di razionalità — moltiplicatori — inversione — serie di D^{-1} — equazione fondamentale — gruppo di monodromia — sottogruppi di Hamburger — punti singolari normali — equazione determinante — forme ed equazioni del Fuchs — equazione ipergeometrica.

La teoria generale è ripresa al Cap. XIII sotto un nuovo punto di vista; quello cioè delle trasformazioni che può subire un'operazione per effetto di un'altra, nel senso usato nella teoria generale delle operazioni e in particolare in quelle delle sostituzioni.

Gli A. si fermano a considerare le trasformazioni della operazione di moltiplicazione per x, in una altra operazione comunque definita A. Chiamano *operazione trasformatrice* della A quella che eseguisce una tale trasformazione, e dopo aver date le proprietà fondamentali comuni a tutte le operazioni trasformatrici, incominciano a studiare partitamente le trasformatrici della derivazione. Fra queste ultime, si presentano come casi particolari quella detta di *Laplace,* così importante in tanti rami dell'Analisi, ed altra, a quella analoga, detta di *Borel.*

Le operazioni trasformatrici non sono, in generale determinate in modo unico, ma si può sempre fissare una fra le infinite determinazioni e considerare quella come principale.

Così, volendo definire la derivata di ordine s mediante una espressione della forma

$$X \overset{s}{x} X^{-1}$$

dove X indica la operazione trasformatrice della derivazione, converrà poi fissare per X una particolare determinazione. Scegliendo la trasformazione L di Laplace, si ha una operazione

$$E_s = L \overset{s}{x} L^{-1}$$

che fu detta dallo Schlesinger *trasformazione di Eulero*, e della quale si studiano qui le proprietà più importanti.

Il Cap. XIV tratta delle forme lineari alle sostituzioni. I risultamenti ottenuti su questo soggetto dal *Königs* e dal *Grévy*, discendono immediatamente dalla teoria generale e sono qui esposti con lo stesso metodo seguito per le forme alle differenze e per quelle differenziali.

Il libro ha ancora un capitolo dedicato alla generalizzazione del Wronskiano ed un ultimo in cui si dà un cenno sulla geometria degli spazi lineari di cui le funzioni sono i punti. Sviluppando e completando una nota stampata nei Rendiconti della Accademia di Bologna, l'anno 1897, si dà qui un nitido abbozzo di un nuovo ramo del calcolo operatorio che già promette frutti abbondanti e preziosi. Avendo introdotto, con artifizio ingegnoso, il concetto di omogeneità nelle considerazioni sullo spazio generale delle serie di potenze, si mostra anzitutto come i risultamenti conseguiti nei primi capitoli dell'opera sieno applicabili anche allo spazio così considerato. Si introduce poi il concetto analitico di punto e piano, si definiscono quelli di curva, di superficie, di varietà di ordine superiore in questo spazio, di gruppo finito continuo di operazioni, rendendo così possibile, nel campo funzionale, l'uso del linguaggio geometrico e la introduzione di quei punti di vista e di quei metodi che resero così fecondi i lavori del Lie. Alcune note, poste in fine al volume, contengono: una copiosa e ben ordinata bibliografia, la soluzione della equazione funzionale, $f(x+y) = f(x) + f(y)$, alcune osservazioni critiche e storiche sulla teoria dei divisori elementari, una brevissima esposizione dei risultamenti fino ad ora ottenuti nella teoria delle operazioni distributive di più funzioni, o di una funzione di più variabili; in fine, un cenno sulle operazioni non distributive.

Ettore Bortolotti.

M. Cantor. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter Band.* von 1668-1758. Mit 147 in den Text gedruckten Figuren. Zweite Auflage. Leipzig, B. G. Teubner, 1901, 8.° gr., p. x- + 923. [Prezzo 20 Mk.].

La giovanile energia spiegata dall'illustre autore nel preparare e la diligenza somma da lui posta nel curare la seconda edizione della sua grande opera, avevano fatto nascere la speranza in molti che un *quarto volume* venisse a renderla più completa; ma sgraziatamente egli, nelle prime linee della Prefazione al volume che ci sta dinnanzi, ce ne toglie ogni speranza. Il rimpianto di tale irrevocabile decisione non ci deve indurre a biasimare chi la prese, dal momento che pochi hanno quanto il Cantor diritto a riposare, pochi potendo vantare mezzo secolo di ininterrotto e fruttifero lavoro.

La nuova edizione della *Vorlesungen* differisce dalla precedente per innumerevoli ritocchi ed aggiunte; un metodo grossolano per misurarne l'entità è offerto dal progresso nel numero delle pagine.

1.ª ed. I Vol.: VIII + 804; II Vol.: x + 863; III Vol.: XIV + 893.
II.ª ed. I Vol.: VII + 865; II Vol.: XII + 943; III Vol.: x + 923.

Ritocchi ed aggiunte provengono dalle ricerche sulla storia della matematica che, per l'impulso del Cantor, vennero fatte in questi ultimi anni, onde si può dire che egli abbia già raccolti molti frutti delle numerose piante da lui seminate. Descriverli qui partitamente sarebbe cosa lunga, tediosa ed inutile. Piuttosto, siccome chi scrive queste linee ha fede che dell'opera del Cantor non tarderà a manifestarsi imperioso il bisogno di una terza edizione, così si permette di dare qualche suggerimento ed esprimere qualche desiderio di cui spera vedere tenuto conto nel relativo lavoro preparatorio.

I. Anzitutto notiamo che, nel II Vol., andava fatto almeno un cenno della memoria del Roberval *De geometrica planarum et cubicarum aequationem resolutione,* non soltanto come attestazione del fatto che l'autore, dopo di essersi schierato fra gli oppositori della nuova Geometria analitica, aveva finito per persuadersi del proprio errore, ma anche perchè quello scritto contiene una delle più antiche esposizioni di tale scienza e non è indegno di chi ha legato il proprio nome a tante belle ricerche geometriche (1).

II. Dei due dizionarî matematici, di cui il Cantor indica la esistenza a p. 270 e 510, quello dell'Ozanam (*Dictionnaire mathématique ou Idée générale des mathématiques,* Amsterdam, 1691) non corrisponde all'idea che oggi abbiamo di una opera di quella specie: è piuttosto

(1) Va anche avvertito che il celebre Borelli (v. II, p. 661) chiamavasi *Giovanni,* non *Giacomo.*

una raccolta di definizioni e nozioni generali di algebra e geometria e delle scienze applicate che su queste si fondano, sino all' architettura navale e la musica inclusive: però l' indice alfabetico dei termini adoperati, che chiude l' opera, rende questa utile anche come opera di consultazione. Invece il *Dictionnaire universel de mathématique et de physique* del Saverien (2 vol., Paris 1753) è redatto secondo il piano oggi generalmente adottato per opera di tal genere; Clairaut, incaricato di esaminarne il manoscritto, non esitò a dichiararne « l'impression utile au public », e tale giudizio merita l' approvazione generale; della qual cosa si meraviglieranno forse quei lettori che ricordano con quale critica rovente il Nesselmann (1) abbia stigmatizzata un'altra opera del Saverien.

III. Riguardo a William Jones (Cantor, III, p. 306) si può osservare che gli editori della 2.ª ed. delle *Philosophical Transactions* gli attribuirono l'articolo *The construction of a quadratrix to the circle being the curve described by its equable evolution;* ma chi scrive (2) ed il Prof. Wölffing (v. questo *Bollettino,* T. III, 1900, p. 98), indipendentemente l' uno dall' altro, osservarono esserne invece autore J. Perks.

IV. Dionigi Diderot (1713-1784), il noto letterato francese che il Cantor ricorda (p. 510) soltanto pei suoi contributi all' *Encyclopédie*, ha pubblicato a Parigi nel 1748 un volumetto di cinque *Mémoires sur différents sujets de mathématiques*, di cui particolarmente il secondo interessa i geometri, avendo per soggetto l' evolvente di circolo.

V. Guido Grandi — di cui il Cantor cita un' opera geometrica (p. 774) — meriterebbe più lungo discorso; sarebbe desiderabile anzi che alla sua opera matematica venisse dedicato uno speciale lavoro, da qualcuno che sfruttasse, oltre alle sue pubblicazioni, i manoscritti ed il carteggio conservato nella Biblioteca dell' Università di Pisa. Intanto il Vacca ha assodato (v. questo *Bollettino*, T. IV, 1901, p. 33-34) essere a lui, non a Gaetana Agnesi, che si deve far risalire la concezione della *versiera.*

VI. La memoria giovanile di Clairaut (Cantor, T. III, p. 779) tratta, non soltanto di speciali curve del quart' ordine, ma anche di certe curve di ordine qualunque applicabili all' inserzione di quante si vogliano medie proporzioni fra due rette date.

VII. Una delle due opere di maggior valore che, nel campo della geometria, produsse l' Italia nel Sec. XVIII è quella del bresciano Conte Giambattista Suardi che porta il titolo: *Nuovi istrumenti per*

(1) *Die Algebra der Griechen* (Berlin, 1842), p, 26 e seg.

(2) V. pag. 418 e 424 dell' opera di imminente pubblicazione: *Specielle Kurven der Ebene, algebraischen und transcendenten. Theorie und Geschichte.* (Leipzig, Teubner, 1902)

la descrizione di diverse curve antiche e moderne e di molte altre, che servir possono alla speculazione dei geometri, ed all' uso de' pratici. Col progetto di due nuove macchine per la Nautica ed una per la Meccanica, e con alcune Osservazioni sopra de' Poligoni rettilinei regolari (Brescia, MDCCLII, 4.°, pag. VIII + 283, con 33 Tav,).

I nuovi apparti inventati sono non meno di dieci. Il I serve alla descrizione delle concoidi, non solo di quelle di Nicomede, ma anche di quelle a base circolare; va notato che il Suardi, con quanta ragione non so, attribuisce (pag. 5) a Maria Gaetana Agnesi la considerazione della concoide di Nicomede *nodata*. Il II concerne la cissoide, ma, con lievi modificazioni, serve anche per la cardioide, che il Suardi chiama *Curva di M.r Carré*. Il III serve al tracciamento della quadratrice di Dinostrato e il IV (che non è il migliore) per quello delle coniche. Per delineare la logaritmica e la trattrice (*trattoria di Perralto*, secondo la nomenclatura dell' autore) si ricorra al V apparato e al VI per tracciare la cicloide ordinaria. Alla descrizione dell'istrumento (il VII) « per le ovali di Cartesio applicate alle refrazioni » il Suardi premette due interessanti lettere (datate 16 Marzo e 27 Aprile 1748) del P. Boscovich riflettenti le più cospicue proprietà di siffatte curve. Più interessante è l' istrumento (IX) dall' autore chiamato *Penna geometrica;* esso serve a descrivere non meno di 1273 curve differenti, fra le quali si trovano la retta, l' ellisse, il circolo, le rodonee, le cicloidi a base circolare (epicicloidi ed ipocicloidi) e le spirali. Va notato come il Suardi abbia constatato, senza però insistere sul valore teorico di tal fatto, che la descrizione organica delle cicloidi a base circolare serve anche per le rodonee; se vi avesse prestata maggiore attenzione e di più avesse determinato sotto quali condizioni un' epicicloide od ipocicloide diviene una rodonea, avrebbe antecipato di quasi un secolo la scoperta di una proprietà assai notevole avvertita un secolo più tardi dal Ridolfi (*Di alcuni usi delle epicicloïdi e di uno strumento per la loro descrizione*, Firenze 1844) e poi di nuovo dal Durége (*Ueber eine besondere Art cyclischer Curven*, Zeitschrift für Matematik und Physik, T. IX, 1864). La penna geometrica è un caso speciale di un altro apparecchio composto di un maggior numero di mobili e di cui il Suardi espone i molteplici usi. – L' ultimo degli strumenti geometrici inventato dal nostro geometra serve alla descrizione organica della lossodromia e dei poligoni rettilinei regolari. — Non è il caso di arrestarci sopra alcune innovazioni apportate dal Suardi alla vite d' Archimede e su altre due macchine ideate da lui (*quadrante lossodromico o sia Istrumento per rilevare la quantità del viaggio di un Bastimento; Barca che va da sè contro alla corrente di un Fiume*), chè esse nulla hanno a che vedere con la geometria pura; ma va invece fatta menzione dell'ultima sezione dell'opera in discorso, ove sono esposte delle notevoli proposizioni elementari concernenti i poligoni regolari, di 3, 4,..., 12 lati, nonchè quelli di un numero qualsivoglìa; la raccomandiamo a chi scrive trattati elementari di geometria, perchè ivi si trovano alcune proposizioni che varrebbe la pena di rimettere in circolazione.

Di ciascuno degli strumentati che descrive il Suardi dà la rappresentazione su un piano verticale e su uno orizzontale, ed inoltre (sotto il nome di Scenografia) una in prospettiva; la semplice ispezione di queste belle figure è sufficiente a dimostrare quanto fra i pratici fossero diffusi, prima che Monge vedesse la luce, i metodi propri della Geometria descrittiva.

I copiosi richiami fatti dal Suardi ad opere di contemporanei dimostra sragionevole l'opinione che, solo a partire dal 1850 circa, gli Italiani abbiano cessato di essere dei solitari nella scienza.

VIII. In una ventura edizione dell'opera del Cantor chiediamo un cenno anche sopra Gregorio Casali (1721-1802), la cui memoria *De conicorum sectionum focis* (Instituti Bononiensis Commentarii, T, IV, 1757) è importante per le ricerche ivi istituite intorno alla strofoide (cfr. questo *Bollettino*, T. I, 1898, p. 2-3), e sopra il Padre G. B. Caraccioli, il cui *De lineis curvis liber* (Pisis, 1740), non è per fermo inferiore ad altre opere coevi menzionate nella *Vorlesungen*.

G. L.

C. Arzelà. — *Lezioni di Calcolo infinitesimale date nella R. Università di Bologna*. Vol. I, P.te I. - Firenze, Successori Le Monnier, 1901, 8.°, pag. IV + 437. [Prezzo L. 9].

La pubblicazione del corso del prof. Arzelà era particolarmente desiderabile, perchè egli fu il primo che introdusse nelle Università italiane l'insegnamento promiscuo dei due Calcoli, differenziale e integrale. Il volume ora venuto in luce contiene il Calcolo infinitesimale delle funzioni d'una variabile; la seconda parte di questo primo volume sarà dedicata alle funzioni di più variabili; il secondo volume tratterà delle applicazioni geometriche, delle equazioni differenziali e del calcolo delle variazioni.

Il nome dell'autore è troppo noto perchè occorra dire che la sua opera riunisce i due pregi difficilmente conciliabili del rigore e della chiarezza.

Novità degne di nota sono:

Alcuni teoremi sulle successioni;

Qualche semplificazione nella dimostrazione del teorema sulla integrabilità del prodotto di due funzioni integrabili;

La dimostrazione del teorema sulla derivata d'una funzione di funzione ridotta a forma semplicissima senza danno del rigore;

La teoria dell'integrazione per sostituzione, dove trovasi riprodotto il contenuto d'una interessante nota dell'autore inserita nei *Rendiconti dell'Accademia di Bologna*;

La riduzione di qualunque integrale della forma:

$$\int f(x, \sqrt{a x^2 + b x + c})\, dx$$

all'unico integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a x^2 + b x + c}}$$

(riduzione che non sappiamo però se in pratica sia conveniente);

La teoria dei differenziali binomi presentata in modo molto semplice;

Alcuni sviluppi sugli integrali impropri;

La teoria della lunghezza d'un arco di curva piana svolta con estensione maggiore del solito.

Naturalmente un libro di lunga lena non può andare esente da qualche piccolo neo; e ci sia permesso osservare che nella teoria delle successioni troviamo inutile limitarsi alle sole successioni numerabili; che il teorema *g*) a p. 59 poteva essere facilmente dimostrato in condizioni alquanto più generali; che la dimostrazione della formola per la decomposizione delle frazioni razionali nel caso di radici complesse data a p. 223-224 è inesatta; che, a proposito della dimostrazione *k*) a p. 393 si poteva osservare che essa vale anche se le derivate $u_1'(x)$, $u_2'(x)$, ... non sono continue.

Per dare un'idea dell'ordine in cui è disposta la materia del presente volume, ne riportiamo l'indice:

1. Limiti, gruppi di numeri o di punti. 2. Funzioni, integrale definito, continuità. 3. Infinitesimi ed infiniti. 4. Derivate. 5. Differenziale. 6. Teorema del valor medio. 7. Integrale definito, teoremi sopra le derivate e gl'integrali, integrazione per sostituzione. 8. Integrazione delle funzioni razionali, irrazionali e trascendenti. 9-10. Integrali impropri. 11. Lunghezza d'un arco di curva. 12. Derivate e differenziali successivi, formola di Taylor abbreviata. 13. Espressioni indeterminate. 14. Massimi e minimi. 15. Serie di funzioni. 16. Serie di Taylor e di Mac-Laurin.

G. VIVANTI.

F. ENRIQUES. — *Lezioni di geometria descrittiva, pubblicate per cura del Dottor* UMBERTO CONCINA. Con 24 Tavole. Bologna, Zanichelli 1902, 8.°, pag. XI + 421 [Prezzo L. 12].

Nell'accingermi a rendere conto di questa nuova opera, con cui l'Egregio Professore della Università di Bologna ha arricchita la collezione di manuali destinati all' istruzione dei futuri ingegneri e dei matematici dell' avvenire (1), giudico opportuno di segnalare anzitutto ai lettori del *Bollettino* quali siano gli argomenti trattati e quale sia l' ordine nel quale essi si seguono:

Parte Prima. — Metodi di rappresentazione. *Metodo della proiezione centrale.* Cap. I. Rappresentazione degli enti fondamentali. Problemi grafici. Cap. II. Problemi metrici. Cap. III. Cambiamento del sistema di proiezione centrale. *Metodo delle proiezioni ortogonali.* Cap. IV. Rappresentazione degli enti fondamentali. Problemi grafici. Cap. V. Problemi metrici. Cap. VI. Cambiamento del sistema delle proiezioni ortogonali. Cap. VII. Rappresentazione dei poliedri. Capitolo VIII. Proiezioni assommetriche. Cap. IX. Proiezioni quotate.

Parte Seconda. — Elementi di una teoria delle linee e delle superficie. Cap. I. Linee piane e coni. Cap. II. Linee gobbe e sviluppabili. Capitolo III. Curve algebriche gobbe; Cubica e Quartica di 1.ª specie. Cap. IV. Le quadriche. Cap. V. Proprietà generali delle superficie. Cap. VI. Le superficie rigate. Cap. VII. Le superficie di rotazione. Cap. VIII. Gli elicoidi. Cap. IX. Dei monoidi e della superficie cubica.

Come si scorge nel libro del Prof. Enriques è, su per giù, svolto il programma consueto dei nostri corsi universitari di geometria descrittiva; se l' A. non parlò del cambiamento di posizione delle figure obbiettive rispetto agli elementi di riferimento, gli è che egli condivide l' opinione di molti, che siffatto artificio — come del resto anche quello del cambiamento di proiezione — non presta in pratica quei servigi che eransi sperati ai tempi dell' Olivier. Ciò invece che può recare meraviglia è che non sia stata inserita la risoluzione dell' angolo triedro; ed io non so con quale fondamento sia stata decisa tale esclusione; giacchè i problemi fondamentali sopra questa figura hanno una notevole importanza teorica per due ragioni. La prima è che offrono l' esempio di costruzioni che, anche adoperando il metodo di Monge, non esigono che un solo piano di riferimento. La seconda è che permettono di ottenere nel modo più semplice e naturale le formole fondamentali della trigonometria sferica, le quali rischiano assai spesso di non trovare

(1) Siccome molti a torto ritengono che la Geometria descrittiva, come disciplina applicata, non meriti gran fatto l' attenzione dei futuri professori, credo bene di rilevare come una recente inchiesta fatta in Germania abbia reso manifesto come molti insegnanti abbiano avvertito sensibilmente la lacuna che esisteva nella loro istruzione per la mancanza di un regolare insegnamento di quella disciplina, il quale avrebbe, fra l' altro, fornito loro quell' abilità nel disegno di cui sentivano vivamente il bisogno. In conseguenza negli ultimi programmi d' insegnamento tedeschi venne esplicitamente introdotta la disciplina in questione. Per maggiori particolari veggasi l' interessante resoconto del Prof. Stäckel *Ueber die Entwickelung der Unterrichtsbetriebes in der augewandter Mathematik an der deutschen Universitäten* (Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung, T. XI, 1902).

posto in alcuno dei nostri corsi ufficiali di matematica; in pari tempo esponendo tale deduzione si giunge a dimostrare essere vero, ciò che si legge nelle più comuni definizioni della Geometria descrittiva (1), che questa scienza guida a *scoprire* e abilita a *dimostrare* le proprietà delle figure di cui insegna la rappresentazione.

Riguardo al programma svolto giudico conveniente rilevare qui essere mio convincimento sarebbe ottima cosa apportare un complemento alla I Parte suggerito dalle applicazioni sempre crescenti che la fotografia trova nella topografia e nei rilievi sul terreno. Coerentemente a questa opinione sin dallo scorso anno io ho introdotto nel mio corso un capitolo sopra i « fondamenti teorici della fotogrammetria », nel quale ho compendiati i metodi (dovuti specialmente all' Hauck ed al Finstenvalder) con cui date due proiezioni centrali di una stessa figura si può dedurne una terza (2). Così, mentre i futuri ingegneri furono preparati a rendersi ragione dei procedimenti che fanno parte della fototopografia, gli studenti che si avviavano ad una laurea, appresero l' esistenza di corrispondenze geometriche *(trilineari)* di natura diversa da quelle che erano state vennero loro rivelate dalla Geometria proiettiva.

La divisione in due parti dell'opera del Prof. Enriques, non è già un semplice portato delle necessità di dare di quando in quando un po' di riposo a chi legge, ma deriva dalla presenza nella Geometria descrittiva di due sezioni piuttosto artificialmente collegate l' una all'altra e che si devono trattare con criterî molto diffierenti. La prima, come semplice applicazione dei concetti fondamentali della Geometria di posizione, è un vero capitolo di geometria pura: sul carattere che essa possiede non può sorgere dubbio di sorta sicchè — dopo Monge e Fiedler — fra i vari autori non esistono che differenze in certi punti di dettaglio; nel fondo vi è accordo di sostanza e di forma. Ma la seconda invece, avendo per iscopo l'applicazione dei metodi esposti nella prima a curve e superficie ha un piano che non si riesce a delineare con esattezza. Praticamente si risolve la questione di tracciarlo introducendovi 1.° gli elementi della teoria delle curve (piane e sghembe) e delle superficie, 2.° l'applicazione dei metodi di rappre-

(1) Non è fuor di luogo osservare qui come il Prof. Enriques non indichi alcuna definizione della disciplina che insegna.

(2) Il tempo a mia disposizione essendo esiguo, dovetti limitarmi alle cose più essenziali; eccone un breve sommario: *Relazione che intende fra due proiezioni centrali della medesima figura. Fulcri; loro funzione. Teorema fondamentale. Determinazione di uno dei fulcri conoscendo l'altro e le due proiezioni di cinque punti qualunque dello spazio. Determinazione dei due fulcri conoscendo le due proiezioni di sei punti, quattro dei quali posti in un piano. Rapporti esistenti fra questa costruzione ed il « problema della proiettività » nel piano. Risoluzione del problema della fotogrammetria. Cenno sopra alcuni casi particolari di esso, importanti in pratica.*

sentazione alle superficie che teoricamente o praticamente offrono maggiore interesse. Ora poichè queste superficie (quadriche, rigate, superficie di rivoluzione, ecc.) hanno una definizione geometrica molto semplice e chiara, il rappresentarle e trovarne gli elementi tangenti, normali, ecc. non presenta sostanziali di difficoltà; onde qui pure è difficile trovare fra autore ed autore delle insormontabili discrepanze. Il punto di dissenso rimane concentrato nella sezione teorica della seconda parte. Esso scomparirebbe ove si fosse in possesso di una teoria geometrica delle curve e superficie: ma questo desiderio è ben lungi dall' essere appagato, nemmeno se ci si limita a figure algebriche (1). In tale stato di cose, alcuni trattatisti, volendo ad ogni costo serbare alla Geometria descrittiva l' apparenza di un capitolo di geometria pura, ponendo in non cale l' esigenza del rigore, che in nessun caso si dovrebbe trascurare, ricorsero ai « procedimenti della Geometria infinitesimale sintetica, che (come giustamente osserva il nostro Autore) non possono veramente riguardarsi come procedimenti di prova». Altri invece, ritenendo ormai antiquata e scolastica la distinzione fra geometria analitica e sintetica, introdussero francamente la rappresentazione analitica di curve e superficie. Gli è il sistema a cui, *soltanto in parte*, ricorse il nostro autore; e così fu astretto (come egli sinceramente riconosce nella Prefazione) a « sacrificare bene spesso il rigore ». Ora io credo che sia assai migliore sistema di escludere totalmente le considerazioni infinitesimali sintetiche ed erigere tutto l'edificio della II Parte sopra una larga e solida piattaforma analitica.

Immensi sono i vantaggi che così si ottengono senza acrescere le difficoltà dello studente; non soltanto si ha così modo di notare come *non* ogni curva o superficie ammette rette tangenti, piani osculatori, piani tangenti in ogni suo punto, ma di assegnare alcuni criteri semplici per accertarsi quando tale circostanza si verifichi. Inoltre, la maggiore parte delle figure, di cui la teoria e la pratica offrono esempi, sono definite mediante equazioni, onde importa che lo studente abbia a propria disposizione i metodi generali per investigarli, che solo l' analisi è *oggi* capace di somministrare. Non va poi dimenticato che, posto che siansi solidamente i fondamenti mediante considerazioni algebriche, si possono svolgere poi con piena sicurezza le ulteriori conseguenze, col puro ragionamento. Nè si tema che, seguendo tali indicazioni, si tragga la disciplina che ci occupa sopra una via diversa da quella che le assegnò il suo creatore; colui che, fra l'una e l'altra delle lezioni di Geometria descrittiva, scriveva le immortali sue *Appli-*

(1) Tale limitazione d' altronde sarebbe sconsigliabile, tante essendo le figure trascendenti di cui la pratica chiede la rappresentazione alla geometria descrittiva.

cations de l'analyse à la géométrie, colui che più d' ogni altro scienziato del secolo XVIII ebbe chiara la visione dell'essere la geometria una scienza una nelle sue molteplici manifestazioni, non potrebbe protestare se i posteri sfruttano alcuni dei metodi che da lui rampollano per lumeggiare e rendere più solida la disciplina a cui egli ha dato un' impronta personale e definitiva.

Se nel rendere conto di queste *Lezioni* del Prof. Enriques ho manifestato alcuni punti in cui il mio accordo con lui non è perfetto, gli è che ritengo al critico, mosso soltanto dall' amore per la scienza e dall' interesse per l' insegnamento, doversi concedere « liberi sensi e libera parola ». E mi è caro constatare finendo che, malgrado le obbiezioni fatte, colla comparsa dell' opera esaminata, la letteratura matematica italiana annovera un buon libro di più (1).

G. L.

W. F. Meyer. — *Differential - und Integralrechnung.* Erster Band. Differentialrechnung. — Leipzig, Göschen, 1901, 8.°, p. XVIII + 395. (Sammlung Schubert X). [Prezzo del Vol. legato Mk. 9].

Questo libro si stacca assai dalla maggior parte dei trattati di Calcolo per la scelta e l' ordine della materia e per la proporzione delle varie parti.

Esso si divide in due sezioni, d' estensione pressochè eguale, di cui la prima tratta dei limiti e delle derivate, la seconda delle serie.

La prima sezione comincia (§ 1) col teorema elementare, che a^n, al tendere di n ad ∞ per valori interi e positivi, tende ad ∞ o a 0 secondochè $a \gtrless 1$, e che in ambi i casi $\sqrt[n]{a}$ tende ad 1. Applicazioni analitiche di questo teorema sono (§ 2) la formola per la somma d' una progressione geometrica e il teorema della continuità della funzione a^x; applicazioni geometriche (§§ 3, 4) la quadratura della parabola e d'altre curve riferite a coordinate cartesiane o polari, e la cubatura d' alcuni corpi rotondi. L' introduzione del concetto di limite nella Geometria conduce anche (§ 5) all' espressione d' un arco circolare mediante funzioni trigonometriche ed alla determinazione dell' equazione della tangente al cerchio ed alle coniche. Tornando allo studio delle potenze, e cercando di paragonare fra loro potenze di base diversa con esponente (intero e positivo) eguale, si ottiene (§ 6) la formola del binomio, la quale dà occasione di definire (algebricamente) le derivate d' una potenza. Di qui si passa (§ 7) allo studio delle funzioni

(1) Nell' eventualità, non improbabile, di una nuova edizione, raccomanderei di rettificare l' ortografia dei nomi Bernoulli e Schläfli !

razionali intere, alle quali si estende il concetto di derivata; stabilita (§ 8) la continuità di tali funzioni, si dimostra che la derivata d'una funzione intera è il limite del suo rapporto incrementale. Assumendo d'ora innanzi questa proprietà della derivata come definizione di essa, nulla vieta di applicare il concetto di derivata a funzioni diverse dai polinomi; così vengono calcolate le derivate delle funzioni trigonometriche e delle loro inverse (§§ 9, 10), ciò che porge l'occasione di definire in generale la funzione di una variabile e di stabilire il teorema sulla derivata della funzione inversa, — poi le derivate di una potenza ad esponente qualunque (§ 11), donde si è condotti alla definizione delle funzioni di funzioni, — infine quelle del logaritmo e dell'esponenziale (§ 12). Tutti questi sviluppi sono accompagnati dal calcolo dell'errore che si commette sostituendo alla derivata il rapporto incrementale, calcolo che — nota giustamente l'autore — è di grande interesse nelle applicazioni dell'Analisi alle scienze naturali. Nel paragrafo successivo (§ 13) vengono dati i teoremi sulla derivata d'una somma, d'un prodotto, ecc., e sulla derivazione delle funzioni implicite e delle funzioni composte. Chiude la prima sezione una lunga serie di esercizi (§ 14).

Nella seconda sezione l'autore, richiamando lo sviluppo di Taylor dato dall'Algebra per le funzioni razionali intere, si domanda se è possibile, per una funzione qualunque $f(x)$, esprimere la differenza $f(a+h)-f(a)$ mediante la derivata prima della funzione. A tale quesito risponde (§ 15) la formola di Cauchy:

$$f(a+h)-f(a)=h\,f'(a+\theta h) \qquad 0<\theta<1,$$

che si fonda sul teorema di Rolle. Questa formola permette di ottenere facilmente, per le funzioni elementari, la *misura della continuità* (§ 16), cioè l'ampiezza d'un intervallo in cui l'oscillazione della funzione non oltrepassa un dato limite. Altre applicazioni della formola stessa sono il calcolo delle espressioni indeterminate (§ 17), la teoria dei massimi e minimi (§ 18), e infine lo sviluppo di Taylor (§§ 19, 20, 21). Segue la teoria generale delle serie (§§ 22, 23) e dei prodotti infiniti (§ 24).

Ed ora, per racchiudere in poche parole le nostre impressioni sul volume che ci sta dinanzi, diremo che esso ci pare un eccellente libro d'esercizi, con qualche digressione sulla teoria. — Anche dal breve riassunto che precede chi legge avrà potuto comprendere che l'autore ha adottato il metodo del passaggio dal particolare al generale, metodo ottimo nella prima istruzione, ma della cui efficacia nell'insegnamento superiore noi dubitiamo assai. Ma chi prende a sfogliare il libro stesso durerà fatica a rintracciare qua e là i varî teoremi generali, che fanno timidamente capolino tra un ammasso d'esempi e di sviluppi particolari; e non potrà — se è nuovo alla materia — farsi alcuna idea di ciò che sia questa scienza che gli si ammanisce a magri bocconcini sperduti in un gran piatto di salse. Non è così che si devono nutrire gl'ingegni che vogliono essere addestrati nelle discipline matematiche; si potrà fare per via d'esempi della morale, della gramatica, fors'anche della geometria intuitiva, ma della matematica vera, no. Ci opporrà forse alcuno l'esempio di un libro che ha avuto una fortuna meritata, quello sulle applicazioni delle funzioni ellittiche di Greenhill; ma ci si conceda che il caso qui è ben differente.

Ad altre conseguenze ancora più gravi fu condotto l'autore dal desiderio di appianare la via agli studiosi; egli ha fatto astrazione quasi completamente da tutto quanto fu fatto da mezzo secolo in qua per ridurre il Calcolo infinitesimale ad una scienza rigorosa. Per citare soltanto i punti più salienti, ricorderemo i teoremi sulle funzioni di funzioni (p. 107) e sulle funzioni implicite (p. 150), il ragionamento a p. 110 dove si ammette tacitamente che il limite della derivata sia la derivata del limite, il teorema sull'inversione dell'ordine delle derivazioni (p. 311), e la definizione — inesatta e diversa da quella data prima in un caso speciale (p. 76) — della continuità delle funzioni di due variabili (p. 311). — Che sia opportuno presentare il Calcolo infinitesimale in forma possibilmente semplice a chi ne incomincia appena lo studio, è indubitato; ma la semplificazione non deve mai essere tale da condurre ad insegnare cose non vere. In nessun campo, più che in quello della matematica, è legge suprema il vecchio precetto: *sed magis amica veritas* (1)!

G. Vivanti.

G. Rost. — *Theorie der Riemann'schen Thetafunction.* — Leipzig, Teubner, 1901, 4.°, pag. IV+66.

L'autore di questo opuscolo si è prefisso lo scopo di esporre sistematicamente la teoria delle funzioni θ abeliane, quale è contenuta nelle classiche memorie di Riemann, completandola nei punti in cui essa è mancante. Il lavoro è scritto con ordine e chiarezza, e noi ne consigliamo la lettura a chiunque voglia apprendere i principii della teoria delle funzioni abeliane.

G. Vivanti.

(1) Cfr. la recensione su: Czuber, *Vorlesungen über Differential - und Integralrechnung*, Boll. di bibl., 1898, p. 98.

Annuaire pour l'an 1902 publié par le Bureau des Longitudes. Paris, Gauthier-Villars, p. IV + 656 + 34 + 91 + 15 + 7 + 38. [Prezzo fr. 1.50; franco 1.85].

Il piccolo volume che ci sta sott'occhio è degno di quelli che lo precedettero. Sono in esso condensate un'immensità di notizie di indiscutibile attendibilità ed insuperabile esattezza, necessarie all'ingegnere, al fisico ed all'astronomo, e utili ad ogni studioso. Si chiude con le seguenti « Notices scientifiques »:

POINCARÉ, *La télégraphie sans fil.*

CORNU, *Les courant polyphases.*

GUYON, *Sur l'application de la division décimale du quart de cercle à la pratique de la navigation.*

JANSSEN, *Observatoire du sommet du Mont Blanc* (*création et travaux*). G. L.

PROGRAMMI E RIASSUNTI
DI CORSI UNIVERSITARI

UNIVERSITÀ DI PAVIA.

Corso di Analisi superiore. Anno 1900-1901.

Il Corso di Analisi superiore che sviluppai nell'anno passato all'Università di Pavia trattò della *Teoria dei gruppi di trasformazioni di Lie.* Alla fine dell'anno impresi a scrivere e riordinare le lezioni, allo scopo di farne argomento di un volume, attualmente in corso di stampa presso l'editore Hoepli di Milano.

I numerosi volumi che il Lie, insieme ai suoi discepoli, pubblicò su questa teoria, geniale creazione sua, rappresentano, mi pare, una miniera troppo vasta perchè un principiante, nei suoi primi studii, possa in essa facilmente orientarsi; ed è perciò che io nutro fiducia che l'opera mia possa riuscire gradita agli studiosi.

Gentilmente invitato dal Chiar.^{mo} Direttore di questo periodico, pubblico ora ben volentieri il sommario del corso da me tenuto, attenenendomi però quasi sempre, per la disposizione della materia, all'ordine da me seguito nel suddetto volume in corso di stampa, in cui ho trovato anche necessario comprendere qualche altro argomento in più di quelli che potetti sviluppare nel corso, e sopprimerne invece qualche altro.

Milano, Novembre del 1901.

ERNESTO PASCAL.

CAPITOLO I.

Gruppi di trasformazioni in generale.

§ 1. Preliminari. Concetto di trasformazione. Parametri della trasformazione e condizioni perchè essi sieno essenziali. Esempi.

§ 2. Definizione di gruppi continui di trasformazioni. Gruppi finiti e gruppi infiniti. Gruppi di Lie. Simiglianza di due gruppi.

§ 3. Esempi di gruppi più comuni. Gruppi lineari, gruppi proiettivi, gruppi Cremoniani.

§ 4. Equazioni differenziali caratteristiche di un gruppo. Primo teorema fondamentale della teoria dei gruppi. Esempio.

§ 5. Gruppo ad un sol parametro. Esempio.

§ 6. Formole esplicite canoniche per le trasformazioni di un gruppo ad un parametro. Trasformazioni infinitesimali.

§ 7. Traiettorie di un gruppo ad un sol parametro. Riduzione a forma canonica dei simboli delle trasformazioni infinitesimali. Determinazione del gruppo canonico data la sua trasformazione infinitesimale.

§ 8. Proprietà varie dei simboli delle trasformazioni infinitesimali e relazioni fra loro. Formola di Jacobi. Ordine di una trasformazione infinitesimale in un determinato punto.

§ 9. Formola del prodotto di due trasformazioni finite poste sotto la forma canonica.

§ 10. Le espressioni $X f$ considerate come primi membri di equazioni a derivate parziali. Sistemi completi di $X f = 0$.

§ 11. Costruzione, mediante r trasformazioni infinitesimali indipendenti, di ∞^{2r} trasformazioni ad r parametri essenziali.

§ 12. Gruppi ad r parametri contenenti la trasformazione identica.

§ 13. Proprietà di un assieme di ∞^{2r} trasformazioni, le cui formole soddisfanno ad equazioni del tipo (A) del § 4.

§ 14. Gruppi ad r parametri in generale. Relazioni caratteristiche fra le r trasformazioni infinitesimali di un gruppo ad r parametri avente la trasformazione identica. Secondo teorema fondamentale della teoria dei grnppi.

§ 15. Relazioni fra le costanti c. Terzo teorema fondamentale della teoria dei gruppi. Struttura di un gruppo. Bibliografia.

§ 15. Le trasformazioni infinitesimali di un gruppo ad r parametri definite mediante un sistema di equazioni a derivate parziali.

CAPITOLO II.

Teoria generale dell' invariantività rispetto ad un gruppo di trasformazioni.

§ 1. Invariantività di una funzione rispetto ad un gruppo. Invarianti di un gruppo.

§ 2. Invariantività di un sistema di equazioni finite rispetto ad un gruppo.

§ 3. Cenni sul problema di determinare tutti i possibili sistemi di equazioni, che ammettono una o più date trasformazioni infinitesimali.

§ 4. Caso in cui le trasformazioni infinitesimali date godono di una certa proprietà, o, più particolarmente, sono atte a generare un gruppo canonico ad r parametri. Sistemi di equazioni invarianti rispetto ad un gruppo canonico ad r parametri.

§ 5. Rappresentazione geometrica dei sistemi di equazioni invarianti rispetto ad un gruppo. Sottogruppo di stabilità relativo ad un punto.

§ 6. Invariantività di un sistema completo di equazioni a derivate parziali, lineari, di 1.° ordine, omogenee, rispetto ad un gruppo.

§ 7. Invariantività rispetto ad un gruppo di un sistema di trasformazioni infinitesime. Il sistema delle trasformazioni infinitesime che appartengono ad un gruppo canonico ad r parametri, è invariante rispetto al gruppo stesso.

§ 8. Invariantività di una trasformazione o di un gruppo rispetto ad una trasformazione o ad un gruppo, e di un gruppo rispetto ad un gruppo, ovvero permutabilità di due trasformazioni, di una trasformazione e di un gruppo, o di due gruppi. Trasformazioni infinitesimali e sottogruppi caratteristici o invarianti di un dato.

CAPITOLO III.

Proprietà relative alla costituzione dei gruppi.

§ 1. Transitività dei gruppi.

§ 2. Imprimitività dei gruppi.

§ 3. Sistaticità di un gruppo.

§ 4. Isomorfismo di due gruppi.

§ 5. Similitudine di due gruppi.

CAPITOLO IV.

Gruppi aggregati ad un dato.

§ 1. Gruppo aggiunto.
§ 2. Gruppo di struttura.
§ 3. Gruppo parametrico.
§ 4. Gruppo di imprimitività.
§ 5. Gruppi ampliati.
§ 6. Gruppo reciproco di un gruppo semplicemente transitivo ad *n* parametri essenziali.

CAPITOLO V.

Teoria invariantiva dei gruppi ampliati.

§ 1. Invariantività delle equazioni e delle espressioni pfaffiane.
§ 2. Invariante simultaneo di una espressione pfaffiana e di una trasformazione infinitesimale.
§ 3. Sistema aggiunto di un dato sistema di equazioni pfaffiane. Sistemi completamente integrabili.
§ 4. Sistemi di equazioni pfaffiane congiunti invariantivamente al sistema dato. Bibliografia sulla teoria delle equazioni pfaffiane.
§ 5. Invarianti differenziali relativi ad un gruppo dato. Parametri differenziali.

CAPITOLO VI.

Trasformazioni di contatto.

§ 1. Invariantività per le trasformazioni puntuali ampliate a due variabili della speciale equazione pfaffiana $dy - p\,dx = 0$.

Definizione di traformazioni di contatto nel piano.

Loro espressione analitica generale e dimostrazione della loro esistenza.

Il prodotto di due trasformazioni di contatto è anche una trasformazione di contatto.

L'inversa di una trasformazione di contatto è anche una trasformazione di contatto.

Esempi di trasformazioni di contatto: trasformazione di dilatazione; trasformazione per polari reciproche.

Per una trasformazione di contatto agli ∞^2 punti del piano corrispondono ∞^2 curve del piano, e questa corrispondenza rappresenta una condizione necessaria e sufficiente perchè si abbia una trasformazione di contatto.

§. 2. Varietà ∞^1 di elementi lineari nel piano (varietà M_1).

Sono di due specie: *a*) quelle formate di un punto fisso e da tutte le direzioni partenti da esso — *b*) quelle formate dagli infiniti punti di una curva, ognuno accompagnato della tangente in quel punto.

L'equazione pfaffiana $dy - p\,dx = 0$ è verificata da tali due varietà ∞^1 e solo da esse.

Se una equazione pfaffiana generale $A\,dy + B\,dy + C\,dp = 0$ è soddisfatta da tutte le varietà del tipo *a*) o del tipo *b*), essa è necessariamente della forma $dy - p\,dx = 0$.

Le trasformazioni di contatto mutano le M_1 nelle M_1 e ogni trasformazione che muta una M_1 in una M_1 è di contatto.

Proprietà delle varietà M_1: la distanza fra due loro elementi infinitamente vicini è un infinitesimo di ordine superiore.

§ 3. Per una trasformazione di contatto, a due curve tangenti possono corrispondere o due curve tangenti oppure una curva ed un punto su di essa.

La trasformata di una curva è l'inviluppo delle trasformate dei suoi punti.

§ 4. Sieno

$$x_1 = X\,(x, y, p)$$
$$y_1 = Y\,(x, y, p)$$
$$p_1 = P\,(x, y, p)$$

le formole che danno una trasformazione di contatto; le funzioni X, Y, P soddisfano alle relazioni $[XY] = 0$, $[PY] = P\,[PX]$ le quali rappresentano condizioni necessarie e sufficienti perchè queste funzioni possano rappresentare i secondi membri delle equazioni che danno una trasformazione di contatto.

§ 5. Legame tra le equazioni differenziali ordinarie di 1.° ordine e le trasformazioni di contatto.

Se si possono trovare due funzioni X e Y legate da $[XY] = 0$ e mediante cui possa esprimersi il primo membro dell'equazione differenziale, questa resta risoluta.

§ 6. Invariantività della speciale equazione pfaffiana

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

per una trasformazione puntuale ampliata a tre variabili.

Trasformazioni di contatto nello spazio.

Due specie di queste, cioè ad una e a due funzioni direttrici.

§ 7. Varietà ∞^2 di elementi dello spazio (varietà M_2).

In particolare varietà M_2 che sono di tre diversi tipi, cioè:

a) quelle costituite da tutti i punti di una superficie, ognuno accompagnato dalle direzioni dei rispettivi piani tangenti;

b) quelle costituite da tutti i punti di una curva, ognuno accompagnato dalle direzioni di ciascun piano passante per la tangente;

c) quelle costituite da un punto e da tutte le ∞^2 direzioni di piani per esso passanti.

La equazione pfaffiana $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ è soddisfatta da una qualunque M_2 e solo da esse.

La sola equazione pfaffiana cui soddisfanno tutte le M_2 è quella di sopra considerata.

Trasformazioni di contatto sono quelle e sole, che mutano una M_2 in una M_2.

§ 8. Per le trasformazioni di contatto, da un punto si può ottenere un punto, una linea od una superficie; da una superficie o linea si può ottenere similmente un punto, una linea od una superficie.

A due superficie tangenti corrispondono o due superficie tangenti, o una superficie ed un punto su di essa, o una superficie ed una linea su di essa, o una linea ed un punto su di essa.

L'inviluppo delle trasformate dei varî punti di una superficie è la trasformata della superficie stessa considerata come M_2.

§ 9. Esempi di trasformazioni di contatto nello spazio.

Trasformazione di Legendre.

Trasformazioni per pedali (superficie podarie).

Altra trasformazione di contatto con due funzioni direttrici che dà luogo ad una trasformazione considerata da Eulero ed Ampère.

La 1.ª e la 2.ª sono un caso particolare di un'altra generale, che si può costruire per n variabili, e sono ambedue involutorie.

§. 10. Se $x_1 = X(xyzpq)$, $y_2 = Y(xyzpq)$, $z_1 = Z(xyzpq)$, $p_1 = P(xyzpq)$, $q_1 = Q(xyzpq)$ sono le formole esplicite di una trasformazione di contatto nello spazio, le funzioni X, Y, Z, hanno la rimarchevole proprietà, che le equazioni

$$X = a, \quad Y = b, \quad Z = c,$$

qualunque siano le costanti a, b, c, rappresentano una M_2.

§ 11. Ricerca di tutte le trasformazioni di contatto le quali trasformano una superficie in un'altra in modo che le assintotiche dell'una si mutino in quelle dell'altra. Esse sono proiettività o correlazioni.

NOTIZIE

PER FAVORIRE LE RICERCHE SUL CALCOLO GEOMETRICO. — Il resoconto pubblicato nel Marzo 1901 dalla « International Association for promoting the Study of Quaternions and allied Systems » cf. *Bollettino*, T. II, 1899, p. 111) fa noto che, malgrado alcune perdite pro-dotte da morte, questo sodalizio annovera ancora 68 membri. Ne è attualmente presidente C. J. Joly, prof. di Astronomia nell'Università di Dublino. Oltre alla bibliografia dei quaternioni e teorie affine, già progettate (v. *Bollettino*, T. III, p. 94), venne fatto il piano di una inchiesta sulla posizione attualmente occupata da siffatte teorie nei programmi delle varie Università. Sarebbe poi desiderio della Società il fondare un giornale speciale, destinato ad accogliere i contributi tecnici o filosofici alle teorie che rampollano dalle opere di Hamilton e Grassmann.

*
* *

Il metro proposto come unità di misura nel 1675. — Sotto questo titolo il Prof. A. Favaro presentò un'interessante memoria al Congresso storico tenuto a Parigi nel 1900, nella quale egli dimostrò essere Tito Livio Burattini il primo che immaginò il sistema uniforme di misure oggi in uso. È da deplorare che di questo fatto notevole non abbia potuto far menzione il Bigourdan nell'opera di cui rendemmo già conto (*Bollettino*, T. IV, 1901, p. 102).

*
* *

Tema proposto dal R. Istituto Lombardo per l'anno 1903. — « La teoria dei gruppi di trasformazioni, fondata specialmente da Lie e sviluppata nell'ultimo quarto di secolo, si è mostrata feconda delle più svariate applicazioni alla geometria e all'analisi matematica. L'Istituto desidererebbe un lavoro nel quale si portasse un contributo od un perfezionamento notevole ed originale a questa importante teoria ». Premio L. 1200. I lavori dei concorrenti devono essere scritti in italiano, francese o latino e presentati anonimi non più tardi delle ore 15 del 31 Marzo 1903.

*
* *

I premi dell'Istituto di Francia. — Nella solenne adunanza del 16 Dicembre 1901 vennero conferiti il Premio Francoeur a L. Laugel, il Premio Poncelet a E. Borel, il Premio Petit d'Ormoy a G. Koenigs, il Premio Lalande al Thome ed il Premio Valz a C. André.

Ricordiamo che pel corrente anno i temi posti a concorso dallo stesso sodalizio, sono:

Gran premio delle scienze matematiche. « Perfezionare in qualche punto importante, l'applicazione dei gruppi continui allo studio delle equazioni a derivate parziali ». Scadenza 1.° Ottobre 1902.

Premio Bordin. « Svolgere e perfezionare la teoria delle superficie applicabili al paraboloide di rivoluzione ». Premio 3000 Fr. Scadenza 1.° Ottobre 1903.

*
* *

Errata-corrige alla nota a piè della pag. 75 del T. IV. Il Cesàro di cui è ivi parola è *Giuseppe*; ad *Ernesto* devesi poi la estesa memoria intitolata *Forme poliedriche regolari e semiregolari in tutti gli spazi*, che è pure sfuggita al Brückner.

Marco Bertolone, Direttore-Gerente

Genova - Tipografia R. Istituto Sordo-muti - 1902.

ANNO V. APRILE, MAGGIO E GIUGNO 1902.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. 6, per l'estero Fr. 7.50. Numeri separati L. 2 caduno. — Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

BIBLIOGRAFIA

Sui fondamenti della Geometria, in relazione alla Geometria Non-Euclidea

di ROBERTO BONOLA.

Parte III.

L'idea d'una pubblicazione bibliografica *sui fondamenti della geometria in relazione ecc.*, ci fu suggerita, or sono tre anni, dal chiarissimo prof. F. Enriques, allo scopo di utilizzare il materiale da noi raccolto in occasione di uno studio storico sui fondamenti della geometria.

Gli scarsi mezzi di cui allora disponevamo non ci permisero di offrire che una bibliografia assai incompleta; l'impossibilità di avere dettagliate notizie su talune pubblicazioni, ci indusse in qualche inesattezza nella classificazione.

Avendo in seguito raccolto nuovi dati credemmo opportuno compilare aggiunte da riferirsi ai varì gruppi di lavori già registrati nella I.ª e II.ª parte, includendo anche le citazioni delle recenti pubblicazioni ed in generale di quanto ha attinenza alla geometria non-euclidea.

Con le presenti aggiunte non pretendiamo di aver esaurita la ricca bibliografia dell'argomento; pensiamo solo d'aver notevolmente ridotto il numero delle opere sfuggite ad una prima ricerca.

Le correzioni alle due prime parti e la tavola delle abbreviazioni, usate citando i periodici, troveranno posto in una IV.ª ed ultima parte, insieme al gruppo di lavori che danno uno svolgimento abbastanza completo dell'argomento che ci occupa.

Pavia, Gennaio 1902.

INDIRIZZO ELEMENTARE (aggiunte)

Alexejewsky, W. P. — *Sulla definizione di lunghezza in geometria non-euclidea* (in russo). (Charkow Ges., (2), VI, 1898; p. 139-153).

Barbarin, P. — *Constructions sphériques à la règle et au compas* (Mathesis (2), IX, 1899; p. 81-85).

Id. — *Études de Géométrie non-euclidienne* (Mémoires couronnés, Belgique, LX; 1900; 167 p.)

Id. — *La Géométrie non-euclidienne* (Paris, Carré et Naud, 1901).

Id. — *Le cinquième livre de la Métagéométrie* (Mathesis, (3), I; 1901).

Id. — *Sur le paramètre de l'Univers* (Bordeaux Procès-Verbaux; 1901).

Bolyai, J. — *The science absolute of space, indipendent of the truth or falsity of Euclid's axiom XI (which never can be establisched a priori) followed by geometric quadrature of the circle in the case of the falsity of axiom XI* — Tradotto da G. B. Halsted con prefazione e appendice — (Tokyo sugaku-butsurigiku kwai kiji, V, 1892-94; p. 94-135).

Id. — *The science absolute of space, indipendent of the truth or falsity of Euclid's axiom XI.* Translated from the original Latin by George Bruce Halsted. (G. B. Halsted, 2407 Guadalupe St., Austin, Texas, U. S. A. 1894).

Bonnesen, T. — *Bemaerkninger om en Hovedseatning i den elementaere Plangeometri* (Nyt Tidsskrift; VI, 1900; p. 25-32).

Burnside, W. — *The construction of the Straight Line joining Two Given Points* (Proc. L. M. S.; XXIX, 1898; p. 125-132),

CASSANI, P. — *Sui fondamenti della Geometria - Considerazioni e proposte* (Atti del R. Istituto Veneto, X, 1898; p. 42-60).
COLLIGNON — *Note sur l'existence géométrique du rectangle* (Ass. Franc. pour l'adv. des sciences; II, 1899; p. 87-99).
CREVETES, Th. - *Essai sur le postulat d'Euclide* (Sococu, Bucarest 1895).
DAUGE, F. — *Sur l'interprétation d'un théorème de géométrie riemanienne* (Mathesis; (2), VIII. 1898; p. 5-20).
Id. — *Sur la limite vers la quelle tend un certain triangle Lobatcheffskien* (Mathésis, (2), VIII, 1898; p. 267-273).
DE FRANCESCO, D. — *Sopra alcune formule di Geometria non-euclidea* (Giorn. Mat., XXXI, 1899; p. 98-106).
DEHN, M. — *Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck* (Math. Ann.; LII, 1900; p. 404-439).
GAUSS, C. F. — Recensione delle opere seguenti :
Commentatio in primum elementorum Euclidis *librum, qua veritatem geometriae principiis ontologicis niti evincitur, omnesque propositiones, axiomatum geometricorum loco habitae demonstrantur. Auctore* J. C. Schwab, *Regi Württembergiae a consiliis aulicis secretioribus, academiae scientiarum Petropolitanae, Berolinensis et Harlemensis Sodali* - Stuttgart 1814. Typis F. Steinkopf.
Vollständige Theorie der Parallel-Linien. Nebst einem Anhange in welchem der erste Grundsatz zur Technik der geraden Linie angegeben wird. Herausgegeben von Matthias Metternich, *Doctor der Philosophie, Professor der Mathematik Mitglied der gelehrten Gesellschaft nützlicher Wissenschaften zu Erfurt.* Mainz 1815 (Gött. gelehrte Anzeigen, 1316; p. 617-622; oppure: Gauss Werke, IV p. 364-368; VIII, p. 170-174).
Id. — Recensione dell'opera seguente:
Theorie der Parallelen, von Carl Reinhard Müller, *Doctor der Philosophie, ausserordentlichem Professor der Mathematik — Marburg, 1822* (Gött. gelehrte Anzeigen 1822, p. 172-173: oppure: Gauss Werke, IV, p. 368-370; VIII, p. 183-185).
Id. — *Corrispondenza di Gauss con Bolyai, Schumacher, Gerling, Wachter, Olbers, Taurinus, Bessel, Lobatscheffsky, Sartorius von Waltershausen* — ed altri scritti di Gauss (1799-1846) (Gauss Werke; VIII, Grundlagen der Geometrie; p. 159-268).
GIUDICE, F. — *Sulla metrica degli spazi a curvatura costante* (Torino, atti, XXXV; 1899-1900 p. 119-144).
EFIMOV, M. — *Les séries dans la pangéométrie* (Nouv. Ann., (3), XVIII, 1899; p. 28-31).
ENGEL, F. — *Construction d'une parallèle dans la géométrie de Lobatcheffsky* (Kasan, Boll., (2), VII, 1897; p. 118-121).
Id. — *Zur nichteuklidischen Geometrie* (Leipz. Ber., L, 1898; p.181-191).

Hausdorff, F. — *Analytische Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie* (Leipzig Ber., LI, 1899; p. 161-214).

Hilbert, D. — *Grundlagen der Geometrie* — quest'opera é contenuta nella « Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber Denkmals herausgegeben von dem Fest-Comitee » (Leipzig, Teubner 1899).

Id. — *Les principes fondamentaux de la géométrie* (Traduzione di Laugel dell'opera precedente, colle aggiunte di Hilbert (Ann. École Norm. (3), XVII, 1900; p. 103-209).

Hölder — *Anschauung und Denken in der Geometrie* (Leipzig, 1900).

Janssen van Raaij — *Sur une formule de la géométrie non-euclidienne* (Nieuw Arch. voor Wiskunde, reeks 2, deel 3, stuk 1; 1896; p. 77-79).

Kagan, H. (*) — *Démostration nouvelle des équations fondamentales de la géometrie de l'éspace de corbure constante négative* (Nouv. Ann., (3), XIV, 1865; p. 20-30).

Id. — *Note sur une formule bien connue de la géométrie imaginaire* (Nouv. Ann., (3), XIV, 1895; p. 251-258).

Kahan, H. — *Schizzo del sistema geometrico di Lobatscheffsky* (in russo) (Spaczinski's Bote, N.° 269, p. 120-126; N.° 270, p. 150-153; 1898).

Lobatscheffskij, N. — *Geometrical researches on the theory of parallels*. Tradotto da G. B. Halsted con prefazione ed appendice. (Tokyo sugaku-butsurigiku kawai kiji, V, 1892-94; p. 6-50).

Id. — *The non-euclidean Geometry. Geometrical researches on the theory of parallels* (Austin, Texas, U. S. A. 1894).

Id. — ·*Nouveaux principes de la géométrie avec une théorie complète des parallèles*. Traduction du russe par M. F. Mallieux - Première partie; (Liége, Mem, (3), II, 1899; 101 p.).

Id. — *New principles of Geometry, with a complete theory of paralleles*. Tradotto dal russo da G. B. Halsted (Austin, Texas, 1897.)

Id. — *The introduction to Lobachevski's new elements of geometry*, Traduzione di G. B. Halsted (Texas Academy, 1897).

Id. — *Zwei geometrische Abhandlungen* (Vedi Engel: Urkunden zur Geschichte der Nicht-euklidischen Geometrie — scritti storici).

Macaulay, F. S. — *John Bolyai's science absolute of space*. (The Mathematical Gazette, 1896-97; p. 25-31; p. 50-60).

Manning, H. P. — *Non-Euclidean Geometry* (Boston, U. S. A.; Ginn & Company, 1901).

(*) Questa pubblicazione fu registrata erroneamente nell'Indirizzo-metrico differenziale. — Cfr. *Boll.* II, pag. 36.

MANSION, P. — *Principes fondamentaux de la géométrie non-euclidienne de Riemann* (Report of the Brithish Ass., Oxford, 1894).
Id. — *Teoría sucinta de las funciones hiperbolicas* (Arch. de Matematicas puras y. Aplicadas, I, 1896 p. 29-34; 46-50; 65-71; 86-88; 106-108; 125-127; 150-153; 170-172; 191-192; 211-213).
Id. — *Pour la géometrie non-euclidienne* (Mathésis, (2), VII; 1897; p. 33-43).
Id. — *Note de géométrie non-euclidienne* (Mathésis, (2), VII; 1897; p. 158-161).
Id. — *Premièrs principes de la métagéometrie ou géométrie générale.* Traduzione polacca di Dickstein (Wiadomosci matematyczne, I, 1897; p. 1-23; 68-91).
Id. — *Sur l'expression analytique du volume d'un corps en géométrie non-euclidienne* (Brux. S. sc., XXI; 1896-97; p. 118-119: oppure: Mathesis, Supp. VII, 1897; 2 p.).
Id. — *Mélanges de géométrie euclidienne et non-euclidienne* (Senza indicazione; 1898).
Id. — *Quelques propriétés d'un espace (analytique) Lobatcheffskien à cinq dimensions* (Brux. S. sc. XXIII, 1898-99; p. 5).
Id. — *Équation des horicycles et des horisphères en géométrie Lobatcheffskienne* (Brux. S. sc., XXIII, 1898-99; p. 32-33).
NEKRASSOW, P. A. — *Metodi algebrici per le soluzioni dei problemi geometrici* (in russo) (Mosca 1896).
PIETZKER, F. — *Ueber die absolute Geometrie* (Zeit. für Math, XXIII 1892, p. 81-106).
REYES Y PRÒSPER — *Sur le théorème relatif au carré de l'hypoténuse et le cinquième postulat d'Euclide* (Mathesis; (2), VII; 1897, p. 86).
Id. — *Note sur le théorème de Pytagore et la géométrie non-euclidienne* (Kasan Boll.; (2), VII; 1897; p. 67-68).
Id. — *Nota sobre un punto de geometria non euclidea* (Archvo de Mat. puras y aplicadas; II, 1898, p. 44-47).
SCHMITZ, A. — *Aus dem Gebiete der nichteuklidischen Geometrie* (Neuburg a D. 1884).
SIKSTEL, V. — *Teoremi fondamentali della geometria sferica* (in russo) (Kasan Boll. (2), II; (2), IV; 1894; p. 18-41).
Id. — *Théorèmes fondamentaux de la géométrie sphérique* (Archiv. d. Math. u. Phy., (2), XV; 1896, p. 159-171 - (2), XVII, 1900; p. 337-353).
SOMMER — *Hilbert's foundations of Geometry* (American M. S. Bull.; VI; 1900).
SIMON, M. — *Zu den Grundlagen der nicht-Euklidischen Geometrie* (Strassburg, 1891).

Simon, M. — *Zwei Sätze zur nicht-Euclidischen Geometrie* (Math. Ann. XLVIII, 1896; p. 607).

Id. — *Die Geometrie der Zwischenebene und der Grenzfläche* (Deut. Math Ver. VII, 1899; p. 67-76).

Tilly (de) J. — *Simple remarque sur le triangle* (Mathésis; (2), VIII, 1898: p. 217-218).

Id. — *Demonstration générale du seconde théorème de Legendre* (Mathésis; (2), IX, 1899; p. 5-9).

Id. — *Sur la somme des angles dans un triangle* (Mathésis; (2), IX, 1899; p. 265-266).

Tarry, G. — *Géométrie générale. Le cercle et la trigonometrie* (Ass. Franc., II, 1891; p. 90-118).

Id. — *Géométrie générale. Mesure des arcs, des courbes, etc.* (Ass. Franc., II, 1892; p. 217-236).

Id. — *Géométrie générale. Les droits et les plans* (Ass. Franc., II, 1894; p. 184-195).

Tirelli, F. — *Osservazioni sulla retta e sul piano* (Napoli, 1879; 22 p.).

Veltmann, W. — *Geometrische Sätze ueber die Fläche und die Winkelsumme des Dreiecks und des Vierecks* (Archv. der Math. und Phy., (2), XVII, 1900; p. 442-448).

Villareal, F. *Geometria imaginarias no-Euclidianas* (Congreso Cientifico en Buenos Ayres - Trabajos de la 1.ª seccion - 1898; p. 72-121).

INDIRIZZO METRICO-DIFFERENZIALE (aggiunte).

Banal, R. — *Sulle varietà a 3 dimensioni con una curvatura nulla e due uguali* (Ann. Mat., (2), XXIV, 1896; p. 213-240).

Id. — *Sugli spazî a curvatura costante* (Lincei, Rendiconti (5), VII, 1898; p. 7-15).

Bianchi, L. — *Sulla applicabilità di due spazî con la medesima curvatura costante* (Lincei, Rendiconti (5), VII, 1898; p. 147-155.

Id. — *Sopra le superficie a curvatura costante* (Lincei, Rendiconti, (5), VIII, 1899; p. 141-151).

Id. — *Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante* (Ann. Mat., (3), III, 1899; p. 185-299).

Id. — *Vorlesungen über Differentialgeometrie* (Leipzig — Teubner, 1899).

Id. — *Sulla integrazione della equazione $\Delta_2 u = o$ nello spazio indefinito non euclideo* (Lincei, Rendiconti, (5), IX, 1900; p. 333-343).

Id. — *Sulla deformazione dei paraboloidi di rotazione negli spazî di curvatura costante* (Ann. Mat., (3), IV; 1900; p. 1-66).

Id. — *Sulla deformazione delle quadriche di rotazione negli spazii di curvatura costante* (Ann. Mat. (3), V, 1901; p. 165-219).

BELTRAMI, E. — *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea* — Tradotto in russo da P. Mey (Appendice al Kasan Boll. (2), III, 18 '3).

Id. — *Sugli spazi di curvatura costante* — Tradotto in russo da P. Mey (Appendice al Kasan Boll. (2), III, 1983).

BERZOLARI, L. — *Un' osservazione sull' estensione dei teoremi d' Eulero e Meusnier agli iperspazii* (Lincei, Rendiconti, (5), VI, 1897; p. 283-290).

Id. — *Ancora sull' estensione dei teoremi d' Eulero e Meusnier agli iperspazii* (Lincei, Rendiconti, (5), VII, 1898; p. 4-6).

Id. — *Sulla curvatura delle varietà tracciate sopra una varietà qualunque* (Torino — Atti, XXXIII, 1897-98; p. 692-700; p. 759-778).

COTTON, E. — *Sur les variétés à trois dimensions* (Toulose, Ann. (2); I, 1899; p. 385-438; - Paris, Gauthier-Villars, 61 p., 1899).

DARBOUX, G. — *Leçons sur la theorie génórale des surfaces — Livre VII — Chap. XIV* (Paris — Gauthier Villars — 1887-1896).

GUICHARD. — *Sur les surfaces minima non euclidiennes* (Ann. École Norm.; (3), XIII, 1896; p. 401-414).

HADAMARD J. — *Sur les éléments linéaires à plusieurs dimensions* (Boll. Sc. Math. XXV, 1901; p. 37-40).

HILBERT, D. — *Ueber Flächen von constanter Gauss'scher Krümmung* (Transactions of the American Math. Society, II, 1901; p. 86-99).

KOMMERELL, K. — *Die nichteuklidische Geometrie und die Trigonometrie auf den Flächen von kostantem Krümmungsmass* (Math. Nat. Mitteilungen, Württemberg, (2), III, 1901; p. 18-31).

RAZZABONI, A. — *Le formule del Frenet in geometria iperbolica e le loro principali applicazioni* (Bologna, 1889; 22 p.).

RIEMANN, B. — *Sulle ipotesi che servono di base alla geometria* — Tradotto dal tedesco in russo da D. Sintsoff (Appendice al Kasan Boll. (2), III, 1893).

Id. — *On the hypotheses wich lie at the bases of geometry* — Tradotto in tedesco da Halsted (Tokyo sugaku-butsurigiku kwai kiji, VII, 1805-96; p. 65-78).

STÄCKEL, P. — *Ueber Biegungen von n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten* (Crelle, C XIII, 1894; p. 102-115).

INDIRIZZO GRUPPALE (aggiunte)

HELMHOLTZ, H. — *Sui fatti che servono di base alla geometria.* Tradotto in russo dal tedesco da Vassilief (Appendice al Kasan Boll. (2), III, 1893).

KLEIN, F. — *A comparative review of recent researches in geometry* - Traduzione dal tedesco - (Bull. of the New York Society, II, 1892-93; p. 215-249).

Klein, F. — *Considerazioni comparative sulle ricerche geometriche moderne* - Tradotto dal tedesco in russo da D. M. Sintsoff - (Kasan Boll., (2), V, 1895-96; p. 16; (2), VI, 1696, p. 28).

Lie, S. — *Osservazioni sulla memoria di Helmholtz* - Tradotto in russo dal tedesco da Sintsoff (Appendice al Kasan Boll. (2), III, 1893).

Ricci, G. — *Sui gruppi continui di movimenti in una varietà qualunque a tre dimensioni* (Memorie Soc. XL, (3), XII; 1899 p. 69-92).

Id. — *Sur les groupes continus de mouvements d'une variété quelconque* (C. R. 1898).

Id. — *Sur les groupes continus de mouvements d'une variétè quelconque à trois dimensions* (C. R. 1898 p. 344-346).

Study, E. — *Ueber Bewegungsinvarianten und elementare Geometrie* (Leipzig. Berich., 1896; p. 649-664).

DISTANZA FINITA (aggiunte)

Hilbert, D. — *Sur la ligne droite regardée comme étant le plus court chemin d'un point à un autre* - Tradotto dal tedesco - (Enseignements Math.; III; 1901; p. 194-200).

Mansion, P. — *Relation entre les distances de cinq ou six points en géométrie non-euclidienne* (Mathesis, supplément; VII; 1897; 7 p).

INDIRIZZO PROIETTIVO (aggiunte)

Barbarin, P. — *Géométrie générale des espaces* (Ass. Française pour l'adv. des sciences, II, 1898; p. 111-132).

Blaser, L. — *Ueber den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie* (Math. Ann., LV, 1901; p. 293-300).

Bonola, R. — *Sulla introduzione degli elementi improprii in geometria proiettiva* (Giorn. Mat. XXXVIII, 1900; p. 105-116).

Id. — *Determinazione per via geometrica dei tre tipi di spazio: iperbolico, parabolico, elittico.* (Rendi. Circolo Palermo, XV, 1901, p. 56-65).

Hausdorff, F. — *Analitische Beiträge zur nicht-euklidischen Geometrie* (Vedi indirizzo elementare, aggiunte).

Klein, F. — *Sur la géométrie dite non-euclidienne.* Traduzione francese della memoria dei Math. Ann. IV. (Toulouse, Mém. Acad. VIII, 1896; p. 573-625).

Lindemann, F. — *Ueber unendlich kleine Bewegungen und über Kräftesysteme bei allgemeiner projectivischer Massbestimmung* (Math. Ann.; VII; 1874; p. 56-143).

Le Vavasseur, R. — *Les systèmes de sphères et l'espace non-euclidien à quatre dimentions* (Toulouse, Bull. Acad. II, 1899; p. 71-87).

MACAULAY, F. S. — *Cayley's theory of the absolute* (The Math. Gazzette, 1898; p. 155-158).

OVIDIO (d') E. — *Nota sulle proiezioni ortogonali nella geometria metrico-proiettiva* (Giornale Mat. XIV; 1876; p. 298-305).

PETERSEN, J. — *Géométrie des droites dans l'espace non-euclidien.* (Danemark, Bull. Acad. Royale, 1900; p. 305-330).

RICORDI, E. — *I movimenti infinitesimi nella generale determinazione di misura proiettiva* (Viterbo, Agnesotti, 1882; p. 1-68).

Id. — *I circoli nella geometria non-euclidea* (Giornale di Math. XVIII; 1880; p. 255-270).

Id. — *Una generalizzazione del problema dei nove punti di Feuerbach nella geometria non-euclidea* (Reggio Calabria 1886; 17 p.).

SCHLESCINGER, L. — *Ueber projective Substitutionen, die einen Kreis ungeändert lassen* (Crelle, CXXI; p. 168-176).

SCOTT C. A. — *On Cayley's theory of the absolute* (American M. S. Bull., (2), III, 1897; p. 235-246).

SCHUR, F. — *Lehrbuch der analytischen Geometrie* (Leipzig, 1898).

Id. — *Ueber die Grundlagen der Geometrie* (Math. Ann., LV, 1901 p. 265-292).

STEPHANOS, M. — *Sur la relation qui existe entre le problème de la trigonometrie sphérique et la théorie du système de trois formes quadratiques binaires.* (Bull. S. M. F., X; 1881-82; p. 134-137).

STRINGHAM, I. — *A proof of the Directro-Focal Property of the Plane Section of a Cone in non-Euclidean Space* (Proc. L. M. S. XXXII, 1900; p. 308-311).

STUDY, E. — *Die Elemente zweiter Ordnung in der ebenen proiectiven Geometrie* (Leipzig Berichte; 53; 1901; p. 338-403)

WOOLSEY, J. W. — *A case of non-euclidean geometry* (Bull. New-York, Society, II; 1892-93; p. 158-161). *(Continua).*

RECENSIONI ED ANNUNZI

Bibliothéque du Congrès international de Philosophie. III. *Logique et Histoire des Sciences.* Paris, A. Colin, 1901, 8.°, pag. 688 [Prezzo 25 fr.].

È questo il III dei quattro volumi in cui vennero adunate le comunicazioni fatte al Congresso internazionale di filosofia, del quale per ben due volte (v. *Bollettino* T. III, 1900, p. 99 e T. IV, 1901, p. 32) tenemmo parola; è un grosso volume, di mole doppia dei suoi fratelli, e che va raccomandato a coloro che s' interessano ai progressi delle scienze fisiche e matematiche; tutti gli articoli si trovano accuratamente tradotti in francese, il che toglie al libro che annunciamo quell' aspetto di *rigatino,* tanto disapprovato da Giosuè Carducci.

Dei ventiquattro scritti pubblicati, quattro sono di indole essenzialmente storica, mentre gli altri concernono la filosofia e la logica.

Di quelli, due — dovuti a M. Cantor e G. Milhaud — si riferiscono alle origini del calcolo infinitesimale, il terzo è di S. Günther e concerne le origini della legge di gravitazione, il quarto e di H. Bouasse e tratta dei principii della termodinamica.

Degli altri venti scritti, i primi due rappresentano l' indirizzo *inglese* agli studii di logica matematica; eccone i titoli: Mac Coll, *La logique symbolique et ses applications;* Johnson, *Sur la théorie des équations logiques.* Segue la *Théorie des équations logiques à trois termes a, b, c* del Poretskii, e quindi due, rappresentanti l' *indirizzo tedesco*; sono quello dello Schröder *Sur une extension de l'idée de l'ordre* e quello del Russell concernente *L'idée d'ordre et la position absolue dans l'espace et le temps.* I quattro articoli che vengono poi rappresentano degnamente l'*indirizzo italiano* degli studii di logica matematica; eccone gli autori e i soggetti: Peano, *Les définitions mathématiques;* Burali-Forti, *Sur les différentes méthodes logiques pour la définition du nombre réel;* Padoa, *Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une Introduction logique à une théorie déductive quelconque;* Pieri, *Sur la géométrie envisagée comme un système purement logique.* L' Italia è inoltre rappresentata dal Professore Vailati, che ha fatto al Congresso una interessante lettura *Des difficultés qui s'opposent à une classification rationelle des sciences.*

Due speciali teorie geometriche sono trattate dal Macfarlane (*Les idées et principes du Calcul géométrique*) e da G. Lechalas *(De la comparabilité des diversas espaces);* i principii della meccanica da R. Blondlot e H. Poincaré, e quelli della termodinamica da U. Le Vernier; alla chimica teorica, esatta, quasi matematica sono dedicati due scritti del Kozlowski e del Wald. Altri due articoli possono passare sotto silenzio, essendo i loro temi estranei al piano del *Bollettino* nostro. Invece una breve *Note sur l'induction et la généralisation en Mathématiques* dell' Hadamard, a parere nostro, merita tanto l' attenzione dei nostri lettori, che crediamo prezzo dell' opera riferirne qui una traduzione fedele.

« Da molto tempo si è fatta notare la somiglianza esistente tra i cammini che segue lo spirito umano, nella ricerca delle verità scientifiche, quando si tratti di questioni matematiche e nel caso di questioni sperimentali.

Infatti, se la dimostrazione delle leggi matematiche procede per deduzione, è notorio che succede spessissimo l'opposto riguardo alla ricerca di queste stesse leggi. In una immensità di circostanze, gli è mediante l'induzione, mediante un'ipotetica generalizzazione di risultati conseguiti in casi speciali, che si scopre la via da seguire ed i risultati che si dovrà poi sforzarsi di dimostrare.

Che tali generalizzazioni possano *a priori* essere ingannevoli, gli è ciò che è appena necessario dire. Ma (ed è appunto questo il fatto logico su cui mi permetto di attirare l'attenzione) tale osservazione, enunciata così, è incompleta. Non soltanto siffatte generalizzazioni possono trarre in inganno, cioè non vi è ragione perchè non lo siano, ma *vi sono spesso delle ragioni perchè lo siano*. Gli è ciò che a più riprese si è manifestato nel corso delle ricerche intraprese in questi ultimi anni.

Le generalizzazioni a cui alludiamo hanno, infatti, per intento di passare dallo studio di problemi già risolti a quello di problemi che ancora non poterono esserlo. Ora nella via seguita dalla scienza (almeno della scienza matematica), nella rapidità più o meno grande con cui le questioni che essa propose si sono chiarite, si può dire che il caso non ha parte alcuna. Se una certa questione potè venire trattata ed un'altra non, o se una questione potè venire risolta in un caso speciale ma non in generale, gli è che il caso particolare differisce dal caso generale per caratteristiche essenziali, per caratteristiche le quali, per semplificarlo, toccano l'essenza delle cose. In tal caso vi è la massima probabilità che una determinata circostanza, incontrata nello studio del caso risolto, non si sia presentata che per effetto di quelle speciali caratteristiche.

Un esempio ben chiaro è offerto dalle equazioni differenzionali. Poincaré ha studiato il modo con cui sono disposte le traiettorie per le equazioni del I ordine e I grado; tale disposizione è totalmente differente da quella che presentavasi nei casi che si erano saputi trattare anteriormente. In generale, ogni traiettoria si avvolge infinite volte attorno ad una certa linea chiusa (detta *ciclo limite*): ora questo fatto non s'incontrava nelle equazioni differenziali del I ordine che si erano integrate.

Una tale differenza non recherà stupore se si pensa che le equazioni integrabili devono questa prerogativa all'esistenza di un integrale noto, che è di necessità o una funzione uniforme, ovvero una funzione i cui varî valori si permutano secondo leggi relativamente semplici. Gli è appunto a questa specialissima condizione che è dovuta la disposizione eccezionale presentata allora dalle traiettorie. Grazie ad essa, lo studio dei casi particolari dà del caso generale una idea falsa quanto sarebbe quella che si formebbe dell'ellisse chi studiasse un ellisse infinitamente schiacciata in un segmento rettilineo.

In altre ricerche, relative alle equazioni differenziali del 2.° ordine, le cose succedono in modo del tutto simile. Lo stesso dicasi per certe questioni della teoria delle funzioni, quali sarebbero lo studio del contegno di una funzione rappresentata da una serie di Maclaurin, sul cerchio di convergenza delle serie.

In una parola, al principio secondo cui « questioni analoghe devono ammettere soluzioni analoghe », gli esempi a cui facemmo allusione conducono ad opporre il seguente: *Dati due problemi analoghi, ma di cui uno solo potè essere trattato, vi è ragione per ritenere che i risultati ottenuti nella soluzione dell' uno siano differentissimi da quelli che si devono ottenere risolvendo l' altro.*

È chiaro che questo principio non obbliga a rinunciare ai servigi che ancora può rendere l'induzione matematica, soltanto ne limita la portata.

Non spetta a me l' indagare se lo stesso principio interviene applicando l' induzione alle scienze sperimentali. È evidente che per esse, le cose non succedono proprio nello stesso modo, essendo il caso un padrone assai più potente per lo sperimentatore che pel matematico, e la possibilità o la impossibilità di risolvere una determinata questione dipende, nel massimo numero di casi, da circostanze accessorie. Tuttavia bisogna osservare che le cose possano mutare di mano in mano che la scienza progredisce. Gli è ciò che viene dimostrato dagli esempi che abbiamo citati e dei quali il numero e l' importanza crebbero indubbiamente in questi ultimi anni ».

In aggiunta ed a ulteriore conferma di questa bella osservazione ci sia lecito notare come essa sia balenata quasi tre secoli prima dinnanzi alla mente onniveggente di Fermat. Infatti nell' esordio della meravigliosa Dissertazione avente per scopo il *Paragone delle curve con le rette* il sommo matematico osserva:

« Per quanto mi consta, non venne finora dimostrata da alcun geometra la eguglianza fra una retta assegnata ed una curva puramente geometrica.

Quello infatti che un sottile geometra inglese ha recentemente scoperto e dimostrato, che cioè *la cicloide ordinaria è eguale al quadruplo del diametro del cerchio generatore*, sembra avere, secondo il parere dei geometri più dotti, una portata limitata.

Essi ritengono infatti essere una legge ed un ordine naturale che sia impossibile trovare una retta eguale ad una curva, a meno che non si supponga già un' altra retta eguale ad un' altra curva (1); e, prendendo come esempio la cicloide, provano che ciò accade in questo caso. Non lo nego; infatti è evidente che il tracciamento del cicloide

(1) Questa legge venne enunciata da R. de Sluse; cfr. una lettera di Pascal a Huggens (*Oeuvres de Pascal*, La Haye, 1779, T. V, pag. 413).

presuppone l' eguaglianza di un' altra curva e di una retta, cioè quello del cerchio generatore della cicloide con la retta base della cicloide. Ma da ciò che segue si vedrà che cosa si può dire della legge di Natura da essi stabilita e quanto sia pericoloso stabilire un assioma sopra uno o due fatti sperimentali *(et quam pericolosum ab uno aut ultero experimento statiem ad assioma properare)* ».

L' esempio offerto da Fermat a sostegno di questa osservazione è, notoriamente, la parabola semicubica, curva da cui egli insegnò poi a dedurre in vari modi innumerevoli altre curve tutte rettificabili.

Osserviamo, finendo, che a conforto della tesi sostenuta da Fermat e dall' Hadamard sta anche la proposizione recentemente stabilita dal Pringsheien: *Se una serie di potenze è affatto generale, tutti i punti della circonferenza di convergenza sono singolari e quindi la funzione di cui quella serie è un elemento non è continuabile (nel senso di Weierstrass) oltre questa circonferenza;* è questo un fatto che non poteva ottenersi per generalizzazione, tutte le funzioni note essendo rappresentate da serie speciali, ammettenti continuazione.

G. L.

G. Vivanti: *Teoria delle funzioni analitiche.* Manuali Hoepli 1901. (Prezzo L. 3).

Nella teoria delle funzioni analitiche all' indirizzo di Cauchy e Riemann si contrappone, come è noto, quello di Weierstrass, basato su concetti aritmerici, che permette di svolgere la teoria senza il sussidio del Calcolo infinitesimale, e fa della medesima una continuazione immediata dell' Algebra: il metodo di Cauchy e Riemann ha su quello di Weierstrass il vantaggio di una maggiore speditezza e concisione ed anche di una maggiore eleganza; quest' ultimo riesce dal punto di vista logico più rigoroso.

Ispirandosi alle idee di Weierstrass il Chiarissimo Prof. Vivanti ha esposto diffusamente nel Manuale dianzi citato, tutta quella parte della teoria, che è divenuta oramai classica.

L' uniformità prestabilita di metodo è sempre rigorosamente osservata, e questa uniformità costituisce la caratteristica principale del libro, che lo differenzia dalle altre pubblicazioni congeneri, nelle quali predomina un indirizzo eclettico. L' A. supera inoltre felicemente tutte le difficoltà che si frappongono al conseguimento del suo fine, dando anzi prova di molta destrezza tutte le volte che si presenta il bisogno di ridurre un qualche procedimento a forma elementare; e dell' uso di un unico mezzo si avvantaggia non poco l' euritmia dell' esposizione.

Meritano in modo speciale, nell' ordine d' idee ora espresse, di essere segnalate le ricerche, già inserite nei Rendiconti del Circolo

Matematico di Palermo (1), *Sul concetto di derivata nella teoria elementare delle funzioni analitiche.*

Come studi assai geniali ed importanti, non ostante il numero limitato dei risultati ottenuti, notiamo poi quelli *sulle serie di potenze, i cui coefficenti dipendono da una variabile.*

Concludendo, l' idea, che a noi pare assai buona, di una esposizione, basata sul solo metodo elementare di Weierstrass, di tutta la *teoria generale* delle funzioni analitiche, è dall' A. tradotta in atto molto abilmente, e l'esposizione stessa unisce al pregio della chiarezza e del rigore quello della brevità.

Non meno accurata e ricca di particolari è la prima parte del libro, che precede quella via descritta, e contiene le nozioni principali della teoria degli aggregati, nozioni che costituiscono un sussidio indispensabile dell' analisi, e nello studio stesso di cui è parola hanno capitale importanza.

Sarebbe stato qui opportuno, che l' A. si fosse più ampiamente giovato delle ricerche ultime di Cantor, e in ogni modo che avesse sempre aggiunto i concetti di addizione e moltiplicazione delle potenze degli aggregati (altrimenti detti *numeri cardinali transfiniti*) e stabilito le formole ad esse operazioni relative, giacchè quei concetti e quelle formole sono di grande utilità e possono dar luogo a numerose applicazioni, come Cantor stesso osserva (2). Con ciò non intendiamo del resto diminuire l' importanza di questa parte, che, nei limiti fissati dall' A. e per lo scopo da esso voluto, riesce del pari utile ed efficace.

Una terza parte s' aggiunge alle due dianzi considerate, contenente quei nuovi capitoli della teoria, che sono tutt' ora in via di formazione.

Gli argomenti vi sono esposti quali per disteso, quali in succinto, e ciò perchè i risultati di alcuni autori vengono stabiliti con dimostrazioni fondate su basi estranee alla teoria di Weierstrass, ed altri sono stati soltanto enunciati, o devono essere maggiormente chiariti.

Nondimeno chi legge può formarsi un' idea chiara e precisa delle questioni, a cui mirano queste nuove ricerche, e del punto a cui esse sono giunte; e lo scopo dell' A., che è quello principalmente di *mettere in luce il molto che ancora rimane a farsi, di mostrare quali nuovi e fecondi campi siano aperti all' ingegno ed all' attività dei giovani analisti*, è pertanto raggiunto; anzi devesi dire, che il libro riesce un' ottima guida nello studio di questo ramo importantissimo dell' analisi, tanto più che esso offre via via il vantaggio

(1) T. XIII (1899).

(2) *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* I. (Math. Annalen T. 46, 1895).

di una grande ricchezza di citazioni ed in fine quello di una lista bibliografica.

Non è peraltro da disconoscere che forse più opportuno, certo più utile, sarebbe stato rinunciare in quest' ultima parte alla detta uniformità di metodo, allo scopo di dare di alcuni punti un' esposizione meno sommaria: il libro avrebbe inoltre contenuto esso stesso i mezzi necessari per completare, mediante la lettura dei lavori originali, le cognizioni in esso acquistate, e si sarebbe anche arricchito di utili confronti fra i due metodi, che, non ostante la diversità del punto di partenza, vengono in fondo a coincidere.

L'A. ha, come dicevamo, inteso rivolgersi ai giovani analisti; noi termineremo aggiungendo che *principalmente* nella biblioteca di ognuno di essi non dovrebbe mancare questo Manuale.

C. Severini.

H. Konen. *Geschichte der Gleichung* $t^2 - \mathrm{D}\,u^2 = 1$. Mit 2 Figuren im Text. Leipzig, Hirzel, 1901, 8.°, p. 132.

L'equazione indeterminata, la cui storia è narrata nell' opuscolo che annunziamo, reca di consueto il nome del geometra inglese Pell; perchè mai l'autore si è scostato dalla consuetudine invalsa? La ragione sta che la prima radice di tal costume risiede in un errore di cui sembra principalmente responsabile Eulero, il quale al Pell attribuì un procedimento di soluzione di essa, dovuto invece a Lord Brouncker e pubblicato da Wallis, e in parte anche a Dirichlet, il quale, probabilmente traviato da Eulero, fece vagamente allusione a ricerche del Pell su quell' equazione (1). Invece questa appare, almeno in qualche caso speciale, sin dall'epoca greca; basta infatti ricordare, come fa l'A., l'equazione $t^2 - 2u^2 = \pm 1$, così strettamente legata alla teoria platoniana dei *numeri diagonali e diametrali*, e l'equazione $t^2 - 4729494\,u^2 = 1$, che s' incontra tentando risolvere il celebre *problema dei buoi* attribuito ad Archimede; si può aggiungere che in Diofanto (VI: 12, 14, 15) si trovano alcune condizioni di risolubilità dell' equazione generale. Sotto tale forma essa trovasi poi nei matematici arabi, i quali lo risolsero con un metodo così geniale che l' Hankel non esitò a dirlo la cosa più sottile che sia stata fatta nella teoria dei numeri, prima di Lagrange.

Ma in Occidente chi per primo studiò a fondo l'equazione $t^2 - \mathrm{D}\,u^2 = 1$ è Fermat, il cui nome — seguendo la ragionevole proposta del D.r Konen — dovrebbe essere ad essa collegato; egli contribuì alla so-

(1) La questione storica dell'origine del nome *equazione di Pell* non è ancora pienamente chiarita; si vegga a tale proposito un articolo del Wertheim in *Bibl. math.*, 3.a Serie, Vol. III, 1902, p. 113-126.

luzione di essa, non solo direttamente, ma anche col farne soggetto di una sfida che suscitò in Francia ed Inghilterra vivo interesse e lotte feconde, nelle quali s' illustrarono Frenicle, Lord Brouckner e Wallis. Dopo di essi, per uno di quei fenomeni di sosta tanto comuni nella storia del pensiero umano, la questione rimase quasi per cent' anni dimenticata o trascurata, finchè cioè Eulero nuovamente la incontrò nelle sue ricerche sopra l' analisi indeterminata di 2.° grado. Per quanto notevoli siano i risultati a cui egli pervenne, essi impallidiscono di fronte alle soluzioni realmente definitive che di quella equazione diede Lagrange e che il Legendre tanto contribuì a far conoscere con la sua *Théorie des nombres*.

Una luce nuova ed inattesa venne projettata sulla stessa questione da Gauss, al cui impulso devonsi posteriori importanti ricerche di Jacobi, di Dirichlet e di altri minori.

Altri nuovi orizzonti vennero aperti dal Kronecker, ma il nostro autore rinuncia ad esporne i fondamenti e le conseguenze; è da augurarsi che egli, ritornando sopra tale deliberazione, completi l' opera utilissima da lui intrapresa, per compiere la quale egli sembra avere una preparazione più che sufficiente. G. L.

H. Wiener. *Die Einteilung der ebenen Kurven und Kegel dritter Ordnung in 13 Gattungen.* Mit zwei Figuren. Halle a. S., M. Schilling., 8.° gr., p. VI + 34. [Mk. 1.60].

Ormai due secoli e mezzo trascorsero dal giorno in cui Newton insegnò a classificare le curve del 3.° ordine; a partire dalla pubblicazione della sua celebre *Enumeratio linearum tertii ordinis*, innumerevoli sono i lavori che vennero scritti sopra il medesimo tema, alcuni aventi il modesto intento di dimostrare le asserzioni del sommo inglese, ma altri contenenti nuovi criterî di classificazione: basti ricordare i nomi di Stirling ed Eulero, di Chasles e Möbius, di Plücker e Cayley per dimostrare in quali alte sfere del pensiero quell' argomento abbia destato vivo e continuato interesse. Era quindi presumibile che la questione di classificare le cubiche piane fosse ormai esaurita. Lo scritto che annunciamo dimostra errata tale supposizione e conferma non esistere campo per quanto coltivato, il quale sia incapace di compensare con qualche frutto il coltivatore sapiente ed operoso.

Il lavoro del Wiener appartiene alla categoria di quelli puramente sintetici; i metodi dello Staudt sono ivi costantemente ed abilmente sfruttati; così, non soltanto è ivi esposta una completa rappresentazione reale dei nove flessi di una cubica generale, ma è eziandio dimostrata l' opportunità di distribuire le curve in questione nelle categorie seguenti:

Curve di Genere 0.

1. S. Curva con cuspide.
2. D. Curva con punto doppio.
3. D′. Curva con punto isolato.

Curve di Genere 1.

Δ Triangolo con un solo lato reale.
4. I. Forma intermedia tra Δ e H_1.
5. H_1. Curva armonica con due rami.
6. I_1. Forma intermedia tra H_1 e Δ^1.
Δ^1 Triangolo con tre lati reali.
7. II. Forma intermedia tra Δ^1 e A.
8. A. Curva equianarmonica (curva limite di Möbius).
9. III. Forma intermedia tra Δ e H_2.
10. H_2. Curva armonica con un solo ramo.
14. III^1. Forma intermedia tra H_2 e A^1.
12. A^1. Curva equianarmonica (figura omografica della curva limite di Möbius).
13. II^1. Curva intermedia tra A^1 e Δ.
Δ Triangolo con un solo lato reale.

Il lavoro del Wiener può servire di modello per chi in avvenire vorrà applicare alle *questioni di forma* i metodi puramente geometrici inventati da Staudt. Esso è pertanto ben più di una semplice illustrazione di una serie di modelli geometrici, come può credere chi legge occupare esso il secondo posto nella Nuova Serie di *Matematische Abhandlungen aus dem Verlage mathematischer Modelle von Martin Schilling Halle a. S.*, ed essere collegata alla Serie XXV delle figure edite di questa Casa. G. L.

G. Frizzo. *De numeris libri duo. Authore Johanne Noviomago; esposti e illustrali.* Verona-Padova, F.lli Drucker, 1901, 8.°, p. 174 [Prezzo L. 3].

Giovanni Broukhorst (1494-1570), volgarmente conosciuto sotto il sopranome di Noviomago, derivato da Nimwegen sua patria, ha un posto nella storia delle scienze esatte, oltre che per essere stato editore di Beda il Venerabile e traduttore della *Geografia* di Tolomeo, come autore di una operetta di aritmetica che, sotto il titolo *De numeris libri duo*, venne stampato a Parigi nel 1539. Questa è spesso citata (1) essendo l'unico scritto ove sia serbata notizia di uno strano

(1) Nesselmann, *Die Algebra der Griechen* (Berlin, 1842), p. 83-4; Cantor, *Mathem. Beiträge zum Kulturleben der Völker* (Halle, 1863), p. 166, e *Vorlesungen üb. Gesch. der Math.*. T. II (2.a Aufl., Leipzig, 1900), p. 410; Friedlein, *Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griehen und Römer* (Erlangen, 1869), p. 12-13.

procedimento per indicare i numeri, il quale è di origine incerta (caldea?) e di scopo ed usi (da parte degli astrologi?) non chiari. Una copia di questo lavoro, esistente nella Biblioteca di Forlì, essendo caduta sotto mano all' Egregio Prof. Frizzo — ben noto, non solo per molte pubblicazioni di carattere didattico, ma anche per avere, nel 1883, dato alle stampe *Le regoluzze di Maestro Paolo dell' Abbaco* — egli pensò essere prezzo dell' opera il divulgarne la conoscenza fra gli studiosi. Ma invece di riprodurla integralmente e fedelmente, la compendiò e commentò: è questo un sistema che potrà forse non riscuotere il plauso di coloro i quali non ammettono se non le riproduzioni diplomatiche, ma che indubbiamente otterrà l'approvazione di chi loda tutti i lavori capaci di diffondere la conoscenza delle opere delle età passate, qualunque siano d' altronde i mezzi a tal fine adoperati; e certamente, quando si tratti di lavori non molto originali ed importanti — come è per l' appunto quello del Noviomago — una semplice ristampa non avrebbe attratto che scarsi lettori, mentre una particolareggiata recensione, accompagnata da commenti, da raffronti e (per dir tutto) da belle figure illustrative — quale è quella che ci sta dinnanzi — sedurrà molti col fascino che emana da ogni cosa bella.

Il primo libro dell' opera del Noviomago è diviso in *ventisette* capitoli; esso ha per iscopo di fare conoscere i procedimenti che vennero suggeriti per indicare i numeri della serie naturale e per effettuare le operazioni su di essi e le frazioni; è dunque un trattato di vera *logistica*, nel senso che questa parola aveva nell' antica Grecia; nel quale vediamo sfilare successivamente i segni numerali adoperati dai Romani e dai Greci, poi la nota *loquela digitorum* di Beda ed i simboli degli astrologi caldei (v. sopra) e da ultimo le nostre cifre. Non è il caso dilungarsi su quanto Noviomago espose riguardo alle operazioni aritmetiche sui numeri interi; basti rilevare nel Cap. XIX quello speciale procedimento abbreviativo per la moltiplicazione di due numeri a, b della prima decina, fondato sull' identità

$$ab = (10 - a)(10 - b) + 10(a + b - 10),$$

e che, evidentemente è una generalizzazione della così detta *regula Nichomachi* per calcolare il quadrato di un numero di una cifra (1). Un cenno va anche fatto delle nozioni esposte sulle progressioni e sull' uso del *pallottoliere*, intorno alle frazioni e le regole del tre. « Tutto questo primo libro, osserva il Prof. Frizzo, riluce per una ragguardevole genialità didattica giustificata dal fatto che il Noviomago, dopo avere mostrato con rara efficacia la utilità e necessità della logistica, non si limita punto ad esporne aridamente i precetti,

(1) Cantor, *Vorlesungen*, T. I, (2.ª ed., Leipzig, 1894), p. 404.

ma questa esposizione egli rende particolarmente leggiadra con piacevoli raffronti ed opportune digressioni nelle lettere, nella storia, nelle scienze, esempio codesto che anche nelle nostre scuole dovrebbe essere saggiamente imitato, ricordando le multiformi applicazioni della matematica alle scienze ed alle arti e rievocando il nome di coloro, che, nello svolgersi dei secoli, maggiormente concorsero al suo incessante e meraviglioso progresso ».

Il II libro è dedicato a Andrea Eygerd di Rostock e contiene i primi rudimenti della teoria dei numeri. Nessuna influenza esercitò sull' autore Diofanto, il che non deve recare meraviglia poichè soltanto nel 1575 l'*Aritmetica* venne stampata (in latino); ma invece Noviomago scelse a modelli Nicomaco, Teone Smirneo, Giamblico e li imitò in modo così pedissequo che egli potrebbe considerarsi ancora tanto aderente alle scuole neo-platonica e neo-pitagorica, quasi come rappresentante di un secondo rinascimento di quel misticismo numerico, le cui scaturizioni risalgono al filosofo di Samo ed al fondatore dell' Accademia.

Ma il libro II dell' opera di Noviomago rappresenta un vero regresso di fronte a quello degli aritmetici greci, giacchè, mentre ne ha tutti i difetti, non contiene le questioni più elevate e difficili di cui questi si occuparono. La dimenticanza in cui quell' opera è caduta è dunque il prodotto, non da incuria o ingiustificato disprezzo, ma l' effetto di un verdetto imparziale che la storia ha pronunciato. Il Prof. Frizzo con la sua pubblicazione non pretese di ottenere una modificazione di esso e nemmeno una revisione del processo: egli intese soltanto di « lumeggiare un caratteristico periodo scientifico » e vi è perfettamente riuscito (1).

G. L.

V. VOLTERRA. *Sui tentativi di applicazione delle matematiche alle scienze biologiche e sociali.* Discorso letto per la solenne inaugurazione dell' anno scolastico 1901-1902 nella R. Università di Roma. Roma, Tip. Pallotta, 1901, p. 26.

Era da tempo desiderio universale che qualche analista di professione, distogliendosi dalle consuete sue ricerche, si occupasse di studiare e misurare il valore e la portata dei varî tentativi che in questi ultimi decenni vennero fatti per sottoporre ad una trattazione matematica certi fenomeni che il mondo organico e la società presentano. È dunque da salutare con gioia il bel discorso con cui il

(1) Avvertiamo che in alcune copie dell' opera del Frizzo a p. 66 venne erroneamente stampato Wallis in luogo di Valla; lo avvertiamo perchè il conseguente anacronismo non ponga il lettore in grave imbarazzo.

Prof. Volterra rese conto delle idee che in lui suscitarono gli sforzi da varie parti fatti per applicare il calcolo agli elementi della teoria dell' evoluzione organica (Galton, Schiaparelli, Pearson) ed alle teorie classiche dell' economia politica (Walras, Pareto). L' occasione in cui l' illustre successore di Beltrami manifestò tali idee non consentì lunghi sviluppi e discussioni profonde, onde è da augurarsi che egli completi questo suo scritto d' occasione con altro di mole più conforme alla vastità e profondità del tema. E poichè, secondo lui, « il meccanico ravvisa nel processo logico per ottenere le condizioni dell' equilibrio economico, lo stesso ragionamento che egli fa per stabilire il principio dei lavori virtuali, e, allorchè si trova dinnanzi alle equazioni differenziali dell' economia, prova il desiderio di applicarvi per primo quei metodi d' integrazione che ben conosce alla prova », così è generale il voto che egli ceda a questo desiderio, e rechi così alla scienza sociale un contributo di altezza paragonabile a quella dei progressi che a lui devono l' Analisi e la Fisica matematica.

G. L.

A. B. Basset. *An elementary Treatise on cubic and quartic Curves.* Cambridge, Deighton Bell and Co. 1901. 8.° gr. p. XVI + 225.

Quest' opera contiene più o meno di quanto il suo titolo annuncia e promette. In *più* comprende una lucida esposizione analitica degli elementi della teoria generale delle curve algebriche e un compendio delle proprietà essenziali delle più note curve trascendenti (cicloide, epicicloidi, evolvente di circolo, catenaria, spirale logaritmica, spirale d' Archimede, spirale iperbolica, lituo). Ma per converso non include nè una completa teoria delle curve del terzo e del quarto ordine, nè una disamina completa di tutte le cubiche e le quartiche speciali; di quella teoria sono però tracciate con mano sicura le prime linee e di queste sono studiate le cubiche circolari in genere, la logogiclica di Booth, la trìsettrice di Maclaurin, la cissoide di Diocle, la parabola cubica e la versiera, e quindi le quartiche bicircolari, le ovali di Cassini, di Gerono e di Cartesio, la lumaca di Pascal, la cardioide e la concoide di Nicomede. Basti ciò a provare quanto ricca e varia sia la materia trattata dal Sig. Basset e qual messe di utili cognizioni essa assicuri al giovane lettore.

Non possiamo nè vogliamo chiudere questo cenno senza dare notizia di alcuni utili complementi dall' autore proposti per la nomenclatura in uso. Per le curve dotate di punti doppì egli suggerisce l' epiteto *autotomiche*, da contrapporsi a quello di *anautotomiche* per le curve che non si annodano. Una curva chiusa è da lui denominata *perigrafica*, onde *aperigrafica* è una linea estendentesi all' infinito. Una curva d'ordine pari perigrafica può constare di due o più porzioni perigrafiche, le quali possono essere interne le une alle altre, oppure ciascuna esterna a tutte le altre; nel primo caso la curva è denominata *endodromica*, nel secondo *esodromica*. Finalmente una curva si dirà *emipartita, bipartita,*, *tripartita* ecc., secondochè consta di una, due, tre ecc. parti distinte. Raccomandiamo ai futuri espositori delle teorie delle curve queste proposte che ci sembrano ragionevoli, come quelle che permettono di evitare certi giri di frasi lunghi ed incomodi.

G. L.

E. Netto. *Lehrbuch der Combinatorik.* Leipzig, Teubner, 1901, 8.º gr. p. VIII + 290. [Prezzo del Vol. legato Mk. 9].

L' epoca circostante al punto di passaggio dal Sec. XVIII al XIX è caratterizzata, nella storia della matematica tedesca, da una scuola che considerava come fine supremo, che le scienze esatte dovevano raggiungere, il perfezionamento dell' analisi combinatoria. Le esagerazioni in cui in conseguenza cadde un Hindeburg, un Eschenbach, un Rothe gettarono un' ombra di ridicolo sopra una disciplina pur meritevole di considerazione e di studio; l' epoca in cui essi dominarono fu ritenuta come un periodo di decadenza e venne considerato come uno dei meriti di Gauss l' avere mostrato come ben altri argomenti esigessero e meritassero gli sforzi concordi degli investigatori. Tuttavia, riposta l' analisi combinatoria nel posto che non avrebbe mai dovuto abbandonare, essa trovò anche più tardi dei solerti cultori, i quali si adoperarono a perfezionarla spintivi assai spesso da questioni di algebra, di teoria dei numeri, di probabilità e anche di geometria. Raccogliere e coordinare i risultati conseguiti in tal modo è quello che il Netto fece concisamente in un articolo dell' *Enciclopedia matematica* e che ripetè con tutta la desiderabile ampiezza nell' opera che annunciamo ora.

La quale si apre con un Capitolo sopra le operazioni fondamentali dell' analisi combinatoria ed i risultati a cui esse conducono; ad esso ne segue un altro sul teorema del binomio e del polinomio. I seguenti concernono il calcolo del numero delle combinazioni *speciali;* ora tale specializzazione è di differente natura secondochè gli elementi dei gruppi studiati sono designati con le lettere $a, b, c, \ldots$ o con i numeri $1, 2, 3, \ldots$ I problemi che nascono nelle prime ipotesi sono trattati nel Cap. IV, gli altri nei tre successivi. Ad altre operazioni combinatorie più complicate è dedicato il Cap. IX ed a' problemi notissimi, collegati ai nomi di Steiner e Kirkmann, i due successivi. Alcune applicazioni dell' analisi combinatoria sono esposte nel Cap. XII e nell' ultimo sono adunate alcune formole importanti. Esatte citazioni agevolano il risalire alle fonti e un particolareggiato indice alfabetico rende facile il consultare l' opera del Netto.

Da questo cenno, forzatamente troppo breve, non risulta, come sarebbe stato necessario, che il nuovo trattato del ben noto Professore dell' Università di Giessen è pei suoi meriti destinato a prendere posto nella biblioteca di qualunque matematico; chè, se l' analisi combinatoria non sta alla cima del grande edificio matematico moderno, essa è fondamento di molte parti di esso ed apre l'adito a parecchie altre, onde nessuno vorrà privarsi del vantaggio di averne sottomano gli elementi essenziali.

G. L.

Annuaire des Mathématiciens 1901-1902 publié sous la direction de C. A. LAISANT *et* AD. BUHL. Paris, C. Naud, 1902, 8.º picc. p. XXII+469. [Prezzo 5 fr.].

« Nessuno di coloro che si occupano in un qualsia misura di lavori di matematica ignora a quale diffusione prodigiosa sia oggi arrivata questa scienza. Su qualsia soggetto, una quantità di memorie, d'articoli, di note vengono pubblicate nel mondo intero ed in centinaia di raccolte poriodiche ed opere speciali; gli è da questo punto di vista che la Bibliografia matematica, la quale 25 o 30 anni fa era poco più d' un oggetto di semplice curiosità, è divenuta oggi una delle questioni gravi di cui bisogna preoccuparsi. Ma anche quando, col mezzo di informazioni bibliografiche sufficienti, colui che si consacra ad un soggetto speciale è giunto a conoscere alcuni dei lavori che vi si riferiscono, gli è in generale indispensabile di mettersi in relazione coi matematici le cui indagini procedono nella medesima direzione, sia per ottenere nuove indicazioni, sia per comunicare loro i risultati ottenuti, sia semplicemente per fare giungere loro i lavori recentemente pubblicati. In una parola, la corrispondenza fra matematici è oggi una cosa indispensabile.

Ma, per rivolgersi ad un corrispondente, non basta l' averne trovato il nome in fine di un articolo; bisogna sapere dove abita e possibilmente averne l' indirizzo esatto. La cosa non è così facile come sembra ».

Ed è appunto per agevolarla che venne progettata ed eseguita la pubblicazione che annunciamo, la quale porge anzitutto in ordine alfabetico i nomi di più di 6000 cultori e cultrici delle scienze esatte; considerata soltanto come un semplice bilancio delle forze matematiche attive, essa possiede una considerevole importanza, giacchè, al pari di tutte le opere che rasentano la statistica, permette di trarre delle conseguenze istruttive. Basti ad es. citare il fatto che in quell' elenco di 6000 nomi, non meno di 180 appartengono al sesso gentile (1) e che fra essi si trova quello, ben noto in altri campi, di Miss Loïe Füller; curioso è anche l'incontrare nella lista dei nostri colleghi il nome di Vittoriano Sardou!

Un' opera come quella che ci sta sott'occhio è destinata fatalmente a presentare, almeno nelle sue prime edizioni, inesattezze e lacune e noi ne segnaleremo qui alcune, concernenti l'Italia, allo scopo di ostacolare il diffondersi di notizie errate e di aiutare i signori Laisant e Buhl nel lavoro preparatorio ad una nuova edizione.

Notiamo in primo luogo improprio l'annoverare fra i matematici il d'Achiardi (non *d'Archiardi*), il Briosi ed il Taramelli ed errato il chiamare *del Giudice* invece che *del Gaizo* il noto cultore della storia della medicina. La morte ha poi già colpiti i professori Bertoldo, Cua, Fellizzati, Gobbi-Belcredi, Legnazzi, Perroni e Turazza, onde i loro nomi non potevano più trovar posto nell'*Annuaire* per l'anno *1901-1902*. Ai compilatori del quale rimasero altresì ignoti molti recenti traslochi o collocamenti a riposo, fra cui ricorderemo quelli di Almansi, de Berardinis, Bortolotti, Ciani, Daniele, Fano, Fibbi, Finzi, Grassi, Lombardi, Morera, Ovazza, Pannelli, Perna, Pizzetti, Porro, Vailati e Volterra. Meno numerosi, ma più strani, sono certi sdoppiamenti che subirono taluni. Così: il Bagnera si presenta col suo vero nome, nonchè sotto quello di Baguera; il Celoria prima come Giovanni e poi come Jean; un altro noto matematico prima come Enriques Federigo poi come Enriquez Federico; due volte s'incontra la signorina Massarini e due volte il Prof. Nicoletti, due Oseletto Tersilla (una anzi come se Tersilla ne fosse il cognome e Oseletto il nome) e due tanto il Prof. Porchiesi quanto il Prof. Tedone; Volterra Vito si presenta poco prima come Vito Volteira, ed il Vassilief della pag. 349 non differisce dal Wassilief della pag. 359.

Dovremmo fare anche qualche osservazione sull'ortografia dei nomi di alcune città, ma per brevità le sopprimiamo. Invece non possiamo tacere che certe traduzioni in francese di nomi di scuole (specialmente tedesche) renderanno difficile il rintracciare coloro che v'insegnano. Così, perchè tradurre *Technische Hochschule* con *Université technique;* e perchè ritenere equivalente *Collège royal* a *Realgymnasium*?..... Affinchè l'*Annuaire* consegua il fine che si è proposto è da augurarsi che nelle annate venture i nomi delle varie scuole vengano dati nella lingua originale. In tali annate poi sarà facile ai compilatori di rendere meno incompleti gli elenchi delle pubblicazioni periodiche e delle società

(1) Va rilevato che molte signore sono notate nell'*Annuaire* soltanto perchè appartengono alla Società astronomica di Francia, la quale annovera molte socie nell'aristocrazia francese ed in quella russa.

scientifiche (che seguono l'elenco alfabetico dei matematici), ricorrendo al *Catalogo internazionale della letteratura scientifica*, attualmente in gestazione.

Rendono più importante ed attraente il volume esaminato un cenno su Hermite, scritto dal Borel ed accompagnato da un bel ritratto, nonchè alcune note scientifiche dovute a P. Appell, J. Petersen, A. G. Greenhill, C. Méray (sull'*Esperanto*) e P. H. Schonte.

G. L.

Tratado de trigonometría plana por Carlo Wargny. Valparaiso 1901, 8.º gr., p. XII + 274.

Il tempo in cui la vecchia Europa aveva il monopolio incontrastato della ricerca scientifica è ormai finito. I germi, che avevano già dati frutti succulenti e gustosi al di quà dell'Oceano, sparsi poi in America, in Asia ed in Oceania hanno già cominciato a svolgervi; in conseguenza, non solo l'America Settentrionale, l'India e l'Australia hanno dato il loro contributo al patrimonio matematico dell'umanità, ma persino il Giappone si è ascritto fra i paesi ove la Geometria e l'Analisi vengono coltivate ed ora ci sta dinnanzi agli occhi un ottimo libro scritto, da uno che è Professore nel Liceo e nella Scuola Navale di Valvaraiso, col nobile intento di « contribuire alla maggiore diffusione delle scienze esatte nel Chilì ». Lo segnaliamo ai nostri lettori specialmente per essere desso attestazione indiscutibile nell'alto livello che la nostra scienza ha ormai raggiunto nell'America meridionale e promessa dei progressi che essa è destinata a compiervi. Del resto, anche prescindendo da tale significato, il libro del nostro collega chileno merita considerazione non piccola; fondato sulle più reputate esposizioni della trigonometria piana e ricco di un gran numero di eleganti esercizî, il favore dei professori e degli studenti è da augurargli e non può certo mancargli.

G. L.

E. Hammer. *Sechstellige Tafel der Werte* $\log \frac{1+x}{1-x}$ *für jeden Werte des Arguments* $\log x$ *von* $3.0-10$ *bis* $9.99000-10$ (*vom Argument* $9.99000-10$ *an bis* $9.999700-10$ *sind die* $\log \frac{1+x}{1-x}$ *nur noch fünfstellig augegeben, von dort an vierstellig*). 8.º gr., p. IV + 73. Leipzig, Teubner 1902 [Prezzo del Vol. legato Mk. 3,60].

Il titolo di quest'opera ne indica sufficientemente il contenuto, caratterizzandola come un utile complemento alle ordinarie tavole logaritmiche. Essa è destinata a prendere il posto di una tavola analoga (ma con cinque sole decimali) che F. W. Rex pubblicò nel 1884 in francese e tedesco. L'egregio Professore del Politecnico di Stuttgart, al quale la nuova opera è dovuta, si giovò per comporla di materiali fornitigli dal Rex e opportunamente chiuse il suo libro con esaurienti indicazioni sopra la costruzione e l'uso della sua Tavola, le quali lo renderanno meglio accetto ai pratici.

G. L.

F. Bohnert. *Elementare Stereometrie.* Mit 113 Figuren. Leipzig, Göschen 1902. 8.°, p. VII + 183. (Prezzo del Vol. legato Mk. 2.40).

È il IV vol. della *Sammlung Schubert.* La materia di essa è assai più elevata ed ampia di quanto potrebbe farlo credere il titolo che porta ed il numero di pagine che conta; valga a provarlo l'indice che ne diamo.

Parte Prima:

I. Stereometria di posizione. — II. Angoli solidi. — III. Volume di alcuni corpi semplici. — IV. La sfera. — V. I solidi regolari.

Parte Seconda:

VI. Il «corpo centrale» di Heinze; conseguenti calcoli di volumi. — VII. La regola di Simpson; cubature mediante considerazioni algebriche. — VIII. Cubature di solidi di rivoluzione mediante la regola di Guldin. Determinazione di centri di gravità — IX. Le coniche.

G. L.

A. Baule. *Lehrbuch der Vermessungskunde.* II erweiterte und umgearbeitete Auflage. Mit 280 Figuren im Text. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1901, 8.°, p. VIII + 471. [Prezzo del Volume legato Mk. 8.80].

Introduzione.

I.ª *Parte.* Teoria degli strumenti di misura.

A. Le parti costituenti gli strumenti misuratori.

B. Mezzi per segnalare i punti trigonometrici.

C. Istrumenti per misurare gli angoli.

D. Istrumenti per misurare segmenti.

E. Istrumenti per misurarne altezze.

F. Istrumenti per la misura delle acque.

G. Conservazione degli strumenti.

II.ª *Parte.* Teoria delle misure.

A. Misurazioni orizzontali.

B. Misurazioni verticali.

III.ª *Parte.* Sulla teoria del disegno.

G. L.

GALILEO FERRARIS. *Wissenschaftliche Grundlagen der Elektrotechnik. Nach den Vorlesungen über Elektrotechnik gehalten in dem R. Museo Industriale in Turin. Deutsch herausgegeben von* D.r LEO FINZI. Mit 161. Figuren im Text. Leipzig, Teubner 1901, 8.º gr., p. XII+358. [Prezzo del Vol. leg. Mk. 12].

Indice:

PROGRAMMI E RIASSUNTI DI CORSI UNIVERSITARI

CORSO DI MATEMATICHE SUPERIORI

R. UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

(Anno 1899-900)

Studio sulle serie di funzioni.

Teorema generale sulle serie convergenti in ogni punto di un intervallo.

Dimostrazione del teorema di *Cantor* relativo al tendere a zero dei coefficienti nelle serie trigonometriche convergenti.

Sulla continuità di una serie di funzioni.

Condizione necessaria e sufficiente per la continuità di una serie di funzioni continue, in un punto: in tutto un intèrvallo. Condizione necessaria e sufficiente per la continuità assoluta rispetto alle variabili n e x, della somma dei primi n termini, in ogni punto (x, ∞).

Gruppi di funzioni tutte contenute tra due numeri finiti e funzioni lìmiti.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista almeno una funzione limite continua. — Funzioni egualmente continue.

Dimostrazione dell'esistenza degli integrali nelle equazioni differenziali ordinarie, senza presupporre la condizione di *Lipschitz.*

Condizioni di *Lipschitz*, di *Volterra* sufficienti per la unicità.

Metodo di *Picard,* o di *Peano,* delle approssimazioni successive.

Rappresentazione approssimata di una funzione continua mediante un polinomio razionale e intero, secondo *Weierstrass.*

Condizione necessaria e sufficiente per la sviluppabilità di una funzione in serie di *Taylor*, secondo *Prinsgheim.*

Teoria degli insiemi. — Numerabilità. — Gruppi non numerabili. — Corrispondenza biunivoca e reciproca tra gruppi in spazi di differente numero di dimensioni. — Gruppi derivati. — Numeri transfiniti. — Gruppi riducibili. — Gruppi perfetti. — Gruppi rinchiudibili.

Principio di condensazione delle singolarità. — Esempio di *Weierstrass.*

Funzioni continue che non ammettono mai derivate. — Esempio di *Weierstrass.*

Funzioni a variazione limitata. — La funzione di *Weierstrass* non è a variazione limitata.

Estremi oscillatori, secondo il *Dini.* — Proprietà fondamentale.

Teoremi di *Scheeffer* intorno alla questione: quand'è che dall'eguaglianza di due estremi oscillatori omonimi si può dedurre l'eguaglianza delle funzioni, all'infuori di una costante?

Integrale. — Varie forme della condizione di integrabilità. — Teorema di *Du-Bois-Reymond* sull'integrabilità di una funzione composta di più funzioni integrabili.

Integrale superiore e inferiore.

Funzioni ad integrale superiore (inferiore) nullo esteso a un tratto qualsiasi. — Funzioni ad integrale ordinario nullo in ogni parte dell'intervallo.

L'integrale di una funzione è sempre una funzione a variazione limitata.

Ognuno dei quattro estremi oscillatori di una funzione integrale differisce dalla funzione sotto il segno, per una funzione ad integrale nullo. — Se uno degli estremi oscillatori di una funzione continua è integrabile, lo sono anche gli altri, e integrati riproducono tutti la funzione primitiva, all'infuori di una costante.

Essistono funzioni finite e continue aventi in ogni punto derivata determinata e finita e non atta all'integrazione in alcuna parte dell'intervallo.

Condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità di una serie di funzioni integrabili. Condizione sufficiente per l'integrazione termine a termine: per la derivazione.

Secondo teorema della media.

Integrali di funzioni con punti di infinito. — Integrali assolutamente convergenti: semi-convergenti. —Valgono tutte le proprietà degli integrali ordinari se il gruppo dei punti di infinito è *riducibile*.

Esempi di funzioni continue, non costanti, la cui derivata è nulla da per tutto, tranne nei punti di un gruppo perfetto rinchiudibile.

Anche per le funzioni con un gruppo riducibile di punti di infinito, l'integrazione e la ricerca di estremi oscillatori sono da riguardarsi come operazioni inverse, astrazione fatta da costanti e da funzioni di integrale nullo.

Estensione del secondo teorema della media.

Limite di un'integrale contenente sotto il segno il prodotto di una funzione a variazione limitata per una funzione contenente, oltre la variabile, un parametro che può crescere indefinitamente.

Serie trigonometriche.

Cenno storico sull'origine e sullo sviluppo della teoria.

Sviluppo di una funzione a variazione limitata in serie di *Fourier*. — Applicazioni.

Integrale di *Fourier*. — Fattore discontinuo di *Dirichlet*.

Prof. C. Arzelà.

NOTIZIE

TEMA RIPROPOSTO A CONCORSO DAL R. ISTITUTO VENETO. — « I caratteri projettivi delle superficie algebriche a due dimensioni dello spazio ad n dimensioni ». Potranno anche essere premiate ricerche importanti che non risolvono completamente il tema. Scadenza 31 Dicembre 1902. Premio L. 3000.

* * *

PUBBLICAZIONI RECENTI SULLA STORIA DELLA MATEMATICA. — Oltre alla traduzione in polacco della commemorazion fatta dal Prof. E. Pascal all'Istituto lombardo (cf. *Bollettino* T. IV, 1901, p. 32), traduzione dovuta al Dickestein e pubblicata nel giornale da questo diretto, vanno menzionate le seguenti:

F. KLEIN. *Gauss' Wissenchaftliche Tagebuch* 1776-1814 (nel Festschrift zu Feier der 150 en Besthens der k. Ges. der Wiss. zu Göttingen, 1901).

F. AMODEO. *Stato delle matematiche a Napoli del 1650 al 1732.* (Atti dell'Accademia Pontaniana, 1901-1902.

G. VIVANTI. *Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica,* Saggio storico. Nuova edizione riveduta (Napoli, B. Pellerano, 1901).

G. LORIA. *Le scienze esatte nell'antica Grecia.* Libro V (ultimo). *L'aritmetica dei Greci* [I. La logistica greca. II. L'aritmetica nella Scuola di Pitagora. III. L'aritmetica nell'Accademia. IV. Neopitagorici e Neoplatonici. V. Diofanto. VI. Ricreazioni aritmetiche dei Greci]. (Mem. della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, 2.ª Serie, Vol. XII, 2.ª Parte) (1).

G. RICCI. *Origini e sviluppo dei moderni concetti fondamentali sulla geometria.* Discorso inaugurale letto nell'Aula Magna della R. Università di Padova il 5 Novembre 1901. (Padova, 1902).

G. LORIA. *Donne matematiche.* Lettura tenuta nella Grande Aula della R. Accademia Virgiliana. (Mantova, 1902).

* * *

QUESTIONE D'ASTRONOMIA PROPOSTA DALLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI DANIMARCA. — « Il n.° 3289 delle *Astronomische Nach-*

(1) Gli estratti si trovano in vendita presso la Libreria C. Clausen, Torino.

richten indica una trasformazione che, applicato al problema generale dei tre corpi, lo libera dalle singolarità provenienti dalla collisione di uno di questi corpi con gli altri. Siccome esistono infinite trasformazioni siffatte, così si può sperare che fra esse se ne trovi una capace di rimediare similmente alle conseguenze delle altre collisioni e di togliere quindi al problema tutte le singolarità. Per ciò l'Accademia propone la sua *medaglia d'oro* (del valore di L. 320 corone) come premio ad uno studio conclusivo sopra quelle trasformazioni ».

Le memorie possono essere scritte in una delle lingue danese, svedese, inglese, tedesca, francese e latina; e devono essere inviate anonime al Prof. H. G. Zeuthen, Segretario dell'Accademia, non più tardi del 31 Ottobre 1903.

*
* *

NUOVI DOCUMENTI PER LA STORIA DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA contiene l'importante nota del Prof. Stäckel intitolata *Die Entdeckung der nichteuklischen Geometrie durch Johann Boyai* ed inserita nel Vol. XVII dei *Mathem. und Naturwiss. Berichtte aus Ungaru*. Essa rappresenta un primo frutto delle ricerche fatte dallo Stäckel nei manoscritti dei Bolyai serbati nel Collegio di Maros-Vásárheley ed ha come conclusione principale che Giovanni da solo ha concepita e svolta la sua scienza assoluta dello spazio. Estremamente curiose sono le lettere pubblicate nella citata nota in cui Wolfango, con calde e commoventi parole, si sforza di dissuadere il figlio suo dal dedicarsi a risolvere una questione a cui egli ha sacrificato invano la felicità di tutta la sua vita; ma Giovanni Bolyai era ormai tanto attaccato ad essa, che le parole di suo padre rimasero inascoltate; così una nuova disciplina geometrica vide la luce.

*
* *

RESOCONTI DI CONGRESSI. — Il Tomo V delle *Annales internationales d'histoire* (Paris 1901) contiene per esteso i lavori presentati al Congresso storico internazionale tenuto a Parigi nel 1900 (v. *Bollettino* Tomo III, 1900, p. 31); interesseranno principalmente i nostri lettori gli scritti dell'Heiberg (contenente il testo commentato di una breve memoria aritmetica di Anatolio), di E. Saavedra sulla risoluzione delle operazioni cubiche, di M. Cantor su alcuni particolari biografici relativi a Gauss, del Favaro (v. *Bollettino* Tomo V, 1902, p. 32), di M. Gallian sui problemi meccanici attribuiti ad Aristotele, del Carra de Vaux su uno scritto arabo avente attinenza con Apollonio Pergeo, di S. Günther sopra i sistemi astronomici intermedi fra il Tolemaico ed il Copernicano, di G. Eneström sulla creazione di un repertorio bibliografico per la storia delle scienze e di P. Tannery sopra una geometria analitica inedita dell'Ozanam e su alcune lettere al P. Mersenne. Il Tannery stesso presidente effettivo del Congresso aggiunse poi notevoli osservazioni ad alcune delle enumerate comunicazioni.

Gli *Atti del secondo Congresso dei professori di matematica delle scuole secondarie tenute in Livorno nei giorni 17, 18, 19, 20. 21 e 22 Agosto 1901* (Livorno 1902) sono formati anzitutto dai verbali delle adunanze e dalle relazioni, fatte dai Professori all'uopo incaricati, intorno alle modificazioni da arrecarsi ai programmi di matematica delle Scuole normali (Prof. A. Conti), delle Scuole classiche (Prof. B. Bettini), dello Scuole ed Istituti tecnici (Prof.ri S. Ortu-Carboni e G. Sforza) e delle Università (Prof. G, Pittarelli). Contengono poi per esteso le seguenti comunicazioni fatte al Congresso: Caminati, *Sulla divisione di un angolo in parti eguali;* Giudice, *Il concetto d'integrale esposto a scopo elementare;* Vailati, *Di un modo di riattaccare la teoria delle proporzioni fra segmenti a quella dell'equivalenza;* Biasi, *Sopra due definizioni contestate di Euclide;* Loria, *Carattere di divisibilità per un numero intero qualunque;* Padoa, *Logica matematica e matematica elementare.*

⁂

Concorsi di indole didattica. — Il *Bollettino di Matematica* diretto dal Prof. A. Conti, nel n. 3 del corrente suo Anno I ha proposto i seguenti temi per due concorsi a premi: I. *Con quale indirizzo e con quali programmi ed orari convenga impartire l'insegnamento della matematica nelle Scuole tecniche e negli Istituti tecnici, finchè non sia alterato l'attuale ordinamento di queste Scuole.* II. *Nell'ipotesi che sia tolta dall'Istituto Tecnico la sezione fisico-matematica e che nel Liceo gli studi siano ordinati in due sezioni, una letteraria e l'altra scientifica, dire dello sviluppo che lo studio della matematica potrebbe avere nella sezione scientifica, dei relativi programmi ed orari.* Scadenza 31 Dicembre 1902.

⁂

Italiane dottoresse in matematica. — Dalle interessanti note statistiche di recente pubblicate da V. Ravà sopra *Le laureate in Italia* (Roma, Tip. Cecchini, 1902) risulta che dal 1877 al 1900 *venti* donne conseguirono il titolo ed il grado di *Dottore in matematica.* Sette di esse si laurearono a Pavia (Predella Lia, Sacchi Stella, Valentini Lucia, Crema Norma, Riva Maria, Moretti Anita, Magnani Teresa), tre a Padova (Bisson Ersilia, Pressi Cornelia, Maestro Ida), due in ciascuna delle Università di Napoli, Pisa, Roma e Torino (Massarini Iginia, Tagliacozzo Emilia; Fabri Cornelia, Grassi Anaide; Vanni Elena, Todaro Sofia; Terracini Ida, Levi Costantina), una a Bologna (Bortolotti Emma) ed una a Messina (Desimone Lucia). Siffatte lauree vennero conferite una in ciascuno degli anni 1887, 1891, 1892, 1893, 1900; due negli anni 1894, 1896, 1898, 1899; tre nel 1895; e quattro nel 1897.

*
* *

PROGRESSI DELL' « ESPERANTO ». — La nuova lingua, che i nostri lettori conoscono (*Bollettino*, T. III, 1900, p. 127), specialmente grazie all'attiva propaganda del Méray, in Francia va diffondendosi. E il primo fascicolo pubblicato nel 1902 dalla *Revue Bourguignonne de l'enseignement supérieur*, contiene due articoli relativi alle scienze esatte (*Le cadran solaire de Dijon* e *À propos des V Postulatum d'Euclide*), il primo redatto in francese ed accompagnato da una traduzione in Esperanto, l' altro scritto in questa lingua.

*
* *

TEMA PROPOSTO DALLA SOCIETÀ OLANDESE DELLE SCIENZE (HARLEM). « Verso la metà del XVII Secolo nel Giappone si è svolta una particolare scienza matematica (vedi Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, T. III, 1898, p. 646-650, come pure *Revue semestrielle des publications mathématiques*, T. VI, 2.ª Parte, p. 18-23), di cui è ignoto con precisione sino a quale punto essa debba la propria origine ad influenze straniere. Ove siffatta influenza sia esistita, non è improbabile ne sia stato veicolo la lingua olandese, di modo che tale influenza sarebbe provenuta da lavori olandesi originali o tradotti. Checchè ne sia, la Società richiede uno studio sopra la natura ed il grado di questa scienza giapponese ed in pari tempo una ricerca delle sue relazioni con la scienza europea ».

I lavori dei concorrenti possono essere redatti in olandese, francese, latino, inglese, italiano o tedesco; ma *non devono essere scritti di mano dell'autore*. Essi si devono inviare anonimi, col sistema consueto, prima del 1.º Gennaio 1904, al Prof. J. Bosscha a Harlem. Il premio consiste in una medaglia d'oro o in 150 fiorini, e potrà essere raddoppiato.

Marco Bertolone, Direttore-Gerente

Genova - Tipografia R. Istituto Sordo-muti - 1902.

ANNO V. LUGLIO, AGOSTO E SETTEMBRE 1902.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. **6**, per l'estero Fr. **7.50**. Numeri separati L. **2** caduno. — Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

BIBLIOGRAFIA

Sui fondamenti della Geometria, in relazione alla Geometria Non-Euclidea

di ROBERTO BONOLA.

Parte III.

(Continuazione e fine v. pag. 41)

INDIRIZZO VETTORIALE (aggiunte).

RUDERT, E. — *Grundlagen zu einer Geometrie der Kugel nach Grassmann's Ausdehnungslehre* (Programmabhandlung N. 604, III. Realsch., 1899, Leipzig, 44 p.).

VAHLEN K. TH. — *Ueber Bewegungen und complexe Zahlen.* (Math. Ann. L V; 1902; p. 585-593).

WHITEHEAD, A. N. — *The geodesic geometry of surfaces in non Euclidean space* (Proc. L. M. S., XXIX, 1898; p. 275-324).

Id. — *A Treatise on Universal Algebra, with applications* — Libri V, VI. (Cambridge, University Press, 1898).

PUBBLICAZIONI CHE SI RIFERISCONO ALLA MECCANICA ED ALLA FISICA MATEMATICA.

Andrade, J. — *Sur la réduction des vecteurs et les propriétés metriques* (C. R., CVXVI, 1897; p. 394-396).

Id. — *Le groupe d'équivalence et ses bases cinématiques* (C. R. CXXXVI, 1898; p. 1775-1777).

Id. — *Sur quelques paradoxes de statique non-euclidienne* (Bull. S. M. de France, XXVII, 1899; p. 73-75).

Berry, B. — *On the evaluation of a certain determinant which occurs in the mathematical theory of statics and in that of elliptic geometry of any number of dimensions* (Cambridge Proc. Phil. Society, IX, 1798; p. 2-10).

Burnside, W. — *On two theorems in elementary kinematics* (Mes. of. Math XXV, 1895; 94-96).

Id. — *On the resultant of two finite displacements of a rigid body.* (Mess. of Math.; XIX; 1889-90; p. 104-108).

de Francesco, D. — *Sopra alcune formule elementari di geometria non-euclidea* — (Gior. Mat. XXXVI, 1898; p. 98-106).

Id. — *Sul moto spontaneo di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante* (Torino, Atti, XXXV; 1899; p. 34-38; p. 231-243).

Id. — *Alcuni problemi di meccanica in uno spazio pseudosferico a tre dimensioni di curvatura costante.* (Napoli, Atti, X, 1899-1900).

Id. — *Sull' integrazione delle equazioni differenziali del moto spontaneo di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante* (Lincei, Rendiconti, (5), IX, 1900; p. 245-252).

Id. — *Alcuni problemi di meccanica in uno spazio a tre dimensioni di curvatura costante* (Napoli, Rendiconti, (3), XXXIX, 1900; p. 15-16; p. 153-155),

Id. — *Su alcuni problemi di meccanica in uno spazio pseudosferico, analiticamente equivalenti a problemi nello spazio ordinario* (Napoli, Rendiconti, (3), VI, 1900; p. 28-38).

Id. — *Sul moto di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante* (Math. Ann. L V; 1902; p. 573-584).

Klein, F. — *Mathematical Theory of the Top.* (New-York; Scribners's Sons - 1897).

Lindemann, F. — *Ueber unendlich kleine Bewegungen und über Kräftesysteme bei allgemeiner projectivischer Massbestimmung* (Vedi indirizzo proiett. aggiunte).

Ricordi. — *I movimenti infinitesimi nella generale determinazione di misura proiettiva* (Vedi indirizzo proiett. aggiunte).

Somigliana, C. — *Sopra la dilatazione cubica di un corpo elastico in uno spazio di curvatura costante* (Ann. Mat., XVI, 1888-89; p. 101-116).

SCRITTI STORICI, CRITICI, FILOSOFICI (aggiunte)

Alasia, C. — *Poligeometrognomia generale e la geometria non-euclidea del Chrystal* (Trapani, Quo-Vadis?, I, 1901; n.° 5-6, p. 20-23; n.° 7-8, p. 19-21).

Andrade, J. — *L'enseignement de la géométrie et les géométries non-euclidiennes* (Enseignement Math., I, 1899; p. 114-126).

Id. — *Euclidien et non-euclidien* (Enseignement Math., I, 1900; p. 298-300).

Barbarin P. — *Sur la géométrie des êtres plans.* (Bordeaux - Procès Verbaux - 1901).

Bonnel, I. — *Les hypothèses dans la géométrie* (Mem. Acad. Lyon (3), V, 1898; 401-429).

Id. — *Les axiomes et les hypothèses dans la géométrie* (Paris, Hermann; 1899).

Burkhardt, H. *Beiträge zu Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie* (Gött. Nachr. 1895; p. 114-118).

Cayley, A. — *Presidential Address to the British association* - September 1883 (Report Brit. Ass. for adv. of Science - 1883 — Math. Papers N.° 784; IX; p. 429-459).

Chrystal. — *Non-Euclidean geometry* (Edimb. Proc; X; 1880, p. 638-644).

Chandler, C. H. — *Trascendental space* (Wisconsin Academie Trans. XI, 1897; p. 239-248).

Crawley, E. S. — *Geometry: Ancient and Modern* (Popular Science Montly, 1901; p. 257-266).

Delboeuf, J. — *La géométrie euclidienne sans le postulat d'Euclide* (Mem. Société R. de sciences; Liège; (2), XIX, 1897; 117 p.).

Duport, H. — *Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie* (S. M. F. Bull. XXVII, 1899; p. 138-141).

Dupuis, N. F. — *On trascendental Geometry* (Proc. and Trans. R. Soc. Canada, (2), III; 1898; p. 3-16).

Clinlock, Mc. E. — *On the early history of the Non-Euclidean geometry* (Bull. New-York Math. Soc., II, 1892; p. 144-147).

Engel, Fr. — *Nicolaj I. Lobatschefsky. Rede, gehalten bei der feierlichen Versammlung der Kaiserlichen Universität Kasan am 22. October 1893, von A. Wassiljef* (tradotto dal russo) (Zeits. für Math. und Phys. XL, 1895; p. 205-244).

ENRIQUES, F. — *Sulla spiegazione psicologica dei postulati della geometria* (Rivista Filosofica; 1901; Vol. IV, p. 171-195).

FAGGI, A. — *Attraverso la geometria* (Rivista Filosofica, T. IV, 1901, 3-28).

FONTENÉ, G. — *Sur l'hypothèse Euclidienne* (Revue de Métaphysique et de mor. 1899; p. 183-188).

GALDEANO (de) G. Z. — *Nociones sobre los sistemas geométricas* (El Progreso Math., V, 1895; p. 57-67).

GALLUCCI, G. — *Geometria non-euclidea* (Il Pitagora, Giornale di Mat., I, 1895; p. 12-13; 21-23).

HADAMARD, I. — *Sur la forme de l'espace* (Bordeaux, Procès-verbaux, 1895-96; p. 24-25).

HALSTED G. B. — *New principles of Geometry* (Vedi Lobatscheffskij indirizzo elementare, aggiunte).

Id. — *Non-Euclidean Geometry, historical and expository* (The American Math. Monthly, IV, 1897; p. 10, 77-79, 101-102, 170-171, 200, 247-249, 269-270, 307-308).

Id. — *Scientific Books, Urkunden zur Geschichte* (Vedi Engel, Stäckel) (Science N. S. IX, 1899; p. 813-817).

Id. — *Report on progress in Non-Euclidean Geometry* (Proc. of the American Ass. for the adv. of science, XLVIII, 1899; p. 53-68); (The American Math. Monthly VI, 1899; p. 219-233).

Id. — *Non-Euclidean Geometry* (American Math. Monthly VII, 1900; p. 123-133).

Id. — *Non-Euclidean Geometry of teachers* (Popular Astronomy 1900).

Id. — *Lambert's Non-Euclidean geometry* (Bull. New-York Math. Soc. III 1893-94; p. 79-80).

Id. — *Nicolài I. Lobachévsky. Address prononced at the commemorative meeting of the imperial university of Kasan, October 22-1893, by A. Vasiliev;* Tradotto dal russo con prefazione (Austin Texas, 1894; 40 p.).

Id. — *Non-Euclidean Geometry, historical and expository* (The American Math. Montly, I, 1894; p. 70-72, 112-115, 149-152, 188-191, 222-223, 259-260, 301-303, 345-346, 837-973, 421-423).

Id. — *Non-Euclidean Geometry, historical and espository* (The American Math. Monthly, II, 1895; p. 10, p. 42-43, 67-69, 108-109, 144-146, 181-214, 256-527, 309-313, 346-348).

Id. — *Non-Euclidean Geometry, historical and expository* (The American Math. Monthly, III, 1896; p. 13-14, 35-36, 67-69, 109, 132-133).

Id. — *Darvinism and non-Euclidean Geometry* (Kasan, Boll. (2), VI, 1896 p. 22-25).

Halsted, G. B. — *Non-Euclidean Geometry, historical and expository* (The American Math. Monthly, V, 1898; p. 1-2, 67-68, 127-128, 290-291).

Id. — *The introduction to Lobachévski's new elements of Geometry* (Vedi Lobatscheffkij, indirizzo elementare; aggiunte).

Id. — *Gauss and the non-Euclidean Geometry* (Science, N. S., XII, 1890; p. 842-846).

Id. — *Supplementary report on non-Euclidean Geometry* (Science, N. S. XIV, 1901; p. 705-717).

Id. — *The appreciation of non-Euclidean Geometry* (Science N. S. XIII, 1891; p. 462-465).

Issely, L. — *La géométrie non-euclidienne* (Bull. Soc. des Sciences Naturelles, Neuchâtel XXIV, 1895-96; p. 137-148; XXV, 1896-97; p. 253-255).

Karagiannides, A. — *Die nicht-euklidische Geometrie vom Altertum bis zur Gegenwart* (Berlin, Mayer und Müller, 1893).

Klein, F. — *Zur ersten Verteilung des Lobatschewsky Preises, Gutachten betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie* (Kasan Boll. (2) VIII, 1898; p. 1-27), (Math. Ann. L, 1898; p. 583-600).

Koenigsberger, L. – *The investigations of Hermann von Helmholtz on the fondamental principles of mathematics and mechanics,* (Tradotto dal tedesco). (Annual report of the board of regents of the Smithsonian instituten 1896; pubblicato nel 1898; p. 93-124).

Lagrange, Ch. — *Pour la géométrie euclidienne* (Belgique, Bull. (3), XXXVII, 1899; p. 506-521).

Lechalas, G. — *Identité des plans de Riemann et des sphères de Euclide* (Brux. S. sc. XX, 1896; p. 167-177).

Id. — *L'axiome de la libre mobilité* (Revue de Méthaphisique et de Mor., 1898; p. 746-758).

Lie, S. — *Bemerkungen zu neueren Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie* (Leipz. Ber. XLIV, 1892; p. 106-115).

Loria, G. — *Eugenio Beltrami e le sue opere matematiche, § IX, X, p. 412-423* (Bibliotheca Mathematica II, 1901; p. 392-440).

Mansion, P. — *Sur la non-identité du plan riemannien et de la sphère euclidienne* (Brux. S. sc· XX, 1896; p. 178-182).

Id. — *Sur une méthode élémentaire d'exposition des principes de la géométrie non-euclidienne* (Mathesis (2), VII, 1897; p. 112-117; 134-139).

Id. — *Quelques documents récents sur les premières récherches de Lobatchefsky, J. Bolyai et Gauss en géométrie non-euclidienne* (Brux. S. sc. XXII, 1897-98; p. 44-45).

MANSION, P. — *Ueber eine Stelle bei Gauss, welche sich auf nicht-euklidische Metrik bezieht* (Deutscher Math. Ver., VII, 1899; p. 156-158).

Id. — *Mémoires de géométrie générale analytique; par M. Barbarin Rapport de P. Mansion* (Belgique, Bull. 1900; p. 28-42).

Id. — *Sur la géometrie non-euclidienne chez Gauss* (Brux. S. sc., XXV, 1901).

Id. — *Sur le postulatum d'Euclide* (Enseignement Math. II, 1900; p. 457).

NEWCOMB, S. — *The philosophy of hyperspace* (Bull. of American Math. Society, (2); IV, 1897-98; p. 187-195).

OVIDIO (d') E. — *Cenno della memoria del Sig. Colonnello de Tilly « Essai de géométrie analytique générale »* (Torino, Atti, XXIX, 1893-94; p. 65-67).

PASCAL, F. — *Repertorio di matematiche superiori. T. II, Cap. XX, XXI, p. 844-892.* (Milano, Hoepli, 1900).

PHILIPPOW, M. M. — *Lobatschefsky's Raum und mehrfach ausgedehnter Raum* (Wissenschaftl. Revue N.° 15, 19, 22, 24, 25, 27, 28; 1894).

POINCARÉ, H. — *On the foundation of Geometry* (The Monist; A Quartely Magazine IX, 1898-99, p. 1-43).

Id. — *Des fondements de la géométrie; à propos d'un livre de M. Russel* (Revue de Métaphy. et de Mor., 1899; p. 251-279).

Id. — *Sur les principes de la géométrie; Replique à Russel* (Revue de Métaphy. et de Mor. 1900; p. 76-86).

REINHARDT, N. — *Geometria non-euclidea e positivismo* (in russo) (Kasan, 1897).

REYES Y PRÓSPER — *Breve reseña historica de la geometria No-Euclidea* (Progreso Math. IV, 1894; p. 13-17).

RUSSEL, A. W. — *An essay on the foundations of Geometry* (Vedi Bertrand Russel, scritti storici, 9).

Id. — *Les axiomes propres à Euclide sont-ils empiriques?* (Revue de Métaphy. et de Mor. 1898; p. 759-766).

Id. — *Sur les axiomes de la géométrie* (Revue de Métaphy. et de Mor. 1899; p. 684-707).

Id. — *Essai sur les fondements de la géométrie* (Traduzione in francese dell'opera sopra citata; Paris, Gauthiers-Villars, 1901).

SCHISCHKIN, N. J. — *Lobatschefsky's Raum* (Fragen der Philosophie u. Psychologie, XXI, 1894; p. 115-135).

SCHOTTEN, H. — *Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts* (Leipzig, Teubner, I Bd. 1890; II Bd. 1893).

SCHULTZ, J. — *Psychologie der Axiome* (Göttingen, Vandenhoeck u. Ruprecht, 1899).

Semikolenow, G. — *Studien über die Geometrie von Lobatschefsky* (Teil I, Libau 1893; Teil II, Libau 1894).
Isokolow, N. P. — *Bedeutung der Untersuchungen von N. I. Lobatschefsky in der Geometrie und deren Einfluss auf ihre weitere Entwickelung* (Bericht. d. phys. Math. Ges. zu Kiew. 1893; Kiew Nachr, p. 1-39; 1894).
Stallo, J. B. — *Concepts of Modern Physics.*
Id. — *La Matière et la Physique moderne*, Traduzione francese dall'opera precedente (Paris, Alcan, 1884).
Stäckel, P. — *Ein Brief von Gauss an Gerling* (Gött. Nachr, 1896; p. 40-43).
Id. — *Friederich Ludwig Wachter ein Beitrag Zur Geschichte der nicht-euclidischen Geometrie* (Math. Ann., LIV, 1900; p. 49-85).
Sorel, G. — *Le système des mathématiques* (Revue de Métaphy. et de Mor. 1900; p. 407-428).
Id. — *Die Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrie durch Johann Bolyai* (Math. u. Naturwissenshaf. Berich. aus Ungarn, XVII; 1901).
Id. — *Franz Schmidt* (Deutsch. Math. Verein; XI; 1902).
Story, W. F. — *Hyperspace and non-euclidean Gèometry* (Math. Review. I, 1897; p. 169-184).
Tarry, G. — *Géométrie plane des êtres plans* (Revue de Montheuil).
Tchelpanoff, G. — *Rivista della letteratura riguardante la questione dell'intuizione dello spazio* (Kief. Boll. 1898; p. 1-14, in russo).
Tikhomandritzky, M. — *Sur le postulatum d'Euclide* (Enseignement Math. II, 1900; p. 385-388).
Vassilief, A. — *Nicolai J. Lobatschefsky* (Vedi Halsted; Engel).
Id. — *Il Gesuita Saccheri*, in russo (Kasan Boll., (2); III; 1893).
Villareal, F. — *Geometria imaginarias ó no-Euclidianas* (An. de la Sociedad Cientifica Argentina; XLVI; 1898; p. 23-32, 67-92, 128-148).
Zinger, N. J. — *Missverständnisse in den Ansichten über die Grundlagen der Geometrie* (Fragen d. Philosophie u. Psychologie; XXI, 1894; p. 115-135).

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI MATEMATICHE
di Ernesto de Jonquières
(3 Luglio 1820 — 12 Agosto 1901)

Gli scritti contenuti nel seguente elenco sono disposti in ordine cronologico ed il valore di ciascuno è caratterizzato col *sistema degli asterischi,* da noi proposto (v. *Bollettino,* T. III, 1900, p. 69); cioè, i lavori fondamentali ed ottimi sono contrassegnati con due asterischi; i secondarì con un solo; i lavori polemici, bibliografici o non esenti da mende non ne hanno alcuno. La giustificazione di ogni simbolo scelto si troverà, assieme ad una biografia dell'autore, nell'articolo intitolato: *L'oeuvre mathématique d'Ernest de Jonquières* (Bibl. mathem. 3.ª Serie, T. III, 1902).

G. LORIA.

1855.

1.* Solution de la Question 306 (voir pag. 211). Nouv. Annales, T. XIV, p. 318-320.

2.* Solution de la Question 303 (voir pag. 117) (1). Nouv. Annales. Ib. id., p. 435-440.

3.* Démonstration des théorèmes de Nicollic (voir pages 263 et 425). Ib. id., pag. 440-443).

4.* Solution de la Question 310 (voir pag. 263). Ib. id., p. 444-445.

1856.

5.** Mélanges de géométrie pure, comprenant diverses applications des théories exposées dans le Traité de géométrie supérieure de M. Chasles, au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace, aux sections coniques, aux courbes du troisième ordre, etc. et de la traduction du Traité de Maclaurin sur les courbes du troisième ordre. Paris, 8.º, p. VIII + 261.

6.* Mode de construction et de description de la courbe du quatrième ordre determinée par quatorze points. (Extrait d'un Mémoire sur la génération des courbes géométriques, presenté par l'Auteur à l'Académie des Sciences). G. di Liouville, 2.ª Serie, T. I, p. 411-420.

7.* Démonstration de quelques théorèmes de M. Steiner (voir T. XIV, p. 141). Nouv. Annales, T. XV, p. 94-98.

8.* Solution géométrique de la Question 280 (Chasles). Ib. id., p. 99-102.

9.* Sur les N.os 170 et 652 de la Géométrie supérieure. Ib. id., p. 160-161.

10.* Démonstration géométrique des théorèmes de M. Steiner enoncés sous les n.os 5, 6 et 7 (voir T. XIV, p. 141 et 142). Ib. id., p. 190-196).

11.* Théorème concernant quatre coniques inscrites dans le même quadrilatère. Ib. id., p. 312-314.

(1) Il problema risolto porta in realtà il n.º 298.

12.* Problème sur cinq coniques et cinq droites anharmoniquement correspondantes. Ib. id., p. 365-370.

13.* Problème sur les courbes du quatrième ordre. Ib. id., p. 370-372.

14.* Note sur la Géométrie organique de Maclaurin, contenant diverses applications des théories de la géométrie moderne. G. di Liouville, 2.ª Serie, T. II, p. 153-165.

15.** Mémoire sur la théorie des pôles et des polaires dans les courbes d'ordre quelconque, particulièrement dans les courbes du troisième et du quatrième ordre, comprenant diverses applications de cette théorie. Ib. id., T. II, p. 249-266.

16.* Note relative au §§. XX du mémoire qui précède. Deuxième mode de déscription de la courbe du quatrième ordre determinée par quatorze points. Ib. id., p. 267-272.

17.* Applications diverses des théories de la géométrie supérieure. Construction des sections coniques déterminées par cinq conditions. Nouv. Annales, T. XVI, p. 116-125.

18.* Solutions géométriques de la Question 369 (voir p. 126). Id. ib., p. 189-192.

19.* Solution de la Question 388 (Faure) (voir p. 183). Id. ib., p. 347-354.

20.* Cosmographie. Solution de la Question 331. Id. ib., p. 354-357.

21. Solution géométrique de la Question 377 (Harrison). Id. ib., p. 407-409.

1858.

22.** Essai sur la génération des courbes géométriques, et en particulier sur celle de la courbe de quatrième ordre. Mèm. prés. par divers savants à l'Acad. des Sciences, T. XVI.

23.* Note relative à la construction de diverses courbes à trois points multiples des degrés supérieurs, et théorèmes rélatifs à ces courbes. Ann. di matem. T. I, p. 110-112.

24.* Note relative à une courbe du sixième ordre qui se présente en Astronomie. Ib. id., p. 112-116.

25.** Note sur un problème de géométrie à trois dimensions. G. di Liouville, 2.ª Serie, T. III, p. 53-56.

26.* Note relative à quelques propriétés des figures homographiques dans l'espace. Nouv. Annales, T. XVII, p. 51-55.

27.* Solution géométrique de la Question 296 (voir T. XIV, p. 142). Id. ib. (p. 399-403). Réctification Id. T. XVIII, 1859, p. 64.

1859.

28.* Solution de la Question 376 (voir T. XVI, p. 179). Nouv. Annales, T. XVIII, 1859, p. 129-138.

29.* Conique donnée par des points ou des tangentes. Id. ib., p. 215-217.

30.* Discussion d'un probléme relatif à la construction des coniques. Id. ib., p. 404-406.

31.* Solution de la Question 443 (voir p. 77). Id. ib., p. 261-264. Addition Id. p. 406-407.

32.** Sur le nombre des coniques qui sont déterminées par cinq conditions, lorsque, parmi ces conditions, il existe des normales données. Construction de ces conique. Théorèmes relatifs aux contacts d'une série de coniques et d'un faisceau de droites. G. di Liouville, 2.ª Serie, T. IV, p. 49-56.

33.** Solution de deux problèmes de géométrie à trois dimensions. Id. ib., p. 81-92.

34.** Généralisation de la théorie de l'involution. Applications géométriques. Annali di Matem. T. II, 1859, p. 86-94.

1861.

35.* Solution de la Question 524 (Faure) (voir T. XIX, p. 234). Nouv. Annales, T. XX, p. 25-26.

36.* Solution géométrique des Questions 494 et 499 (voir T. XVIII, p. 444 e T. XIX, p. 43). Id. ib., p. 26-30.

37.* Théorémes concernant les courbes géomètriques planes. Id. ib., p. 83-85.

38.* Solution de la Question 548 (voir T. XIX, p. 405, et T. XX, p. 56). Id. ib., p. 85-87.

39.* Lieu géométrique du sommet d'un angle de grandeur constante circonscrit à une courbe de la classe *n*. Id. ib., p. 206-210.

40.** Solution de quelques questions générales concernant les courbes algébriques planes. G. di Crelle, T. LIX, p. 313-334.

41.** Théorèmes généraux concernant les courbes géométriques planes d'un ordre quelconque. G. di Liouville, 2.ª Serie, T. VI, p. 113-134.

1862.

42.** Étude sur les singularités des surfaces algébriques. Noeuds ou points coniques. Giorn. di Liouville, 2.ª Serie, T. VII, p. 409-413.

1863.

43.* Note au sujet d'un article publié dans le Journal de Mathématiques, T. VI, 2.e Série. G. di Liouville, 2.ª Serie, T. VIII, p. 71-72.

44. Corrispondenza. Giorn. di Matem., T. I, p. 128.

45.** Études sur les courbes à double courbure tracées sur une surface algébrique d'ordre quelconque. Annali di Matem., T. V, p. 24-38.

46. Correspondance. Nouv. Annales, 2.ª Serie, T. II, p. 203-205.

1864.

47.* Formules exprimant le nombre des courbes d'un même systéme d'ordre quelconque, qui coupeut des courbes données d'ordre également quelconque, sous des angles donnés ou sous des angles indéterminés, mais dont les bissectrices ont des directions données. C. R. T. LVIII, p. 535-537.

48.* Propriétés diverses des systèmes de surfaces d'ordre quelconque. Id. ib., p. 567-571.

49.** Études sur les singularités des surfaces algébriques. Plans tangents doubles et triples. Nouv. Annales, 2.ª Serie, T. III, p. 5-21.

50. Questions 677, 678 et 679 (Schröter) (voir, 2.ª Série, T. II, p. 522). Id. ib., p. 33-36.

51.** De la transformation géométrique des figures planes, et d'un mode de génération de certaines courbes à double courbure de tous les ordres. Id. ib., p. 97-111.

52. Du contact des courbes planes, et en particulier des contacts multiples des sections coniques avec une même courbe d'ordre quelconque. Id. ib., p. 218-222.

53.* Exercises sur la théorie des sections coniques. Id. ib., p. 504-508.

1865.

54.* Note sur les systèmes de courbes et de surfaces, et sur certains formules qui s'y rattachent. G. di Liouville, 2.ª Serie, T. X, p. 412-416.

55.** Propriétés des systèmes de surfaces d'ordre quelconque. C. R., T. LXI, p. 440-443.

1866.

56.* Recherches sur les séries ou systèmes de courbes et de surfaces algébriques d'ordre quelconque, suivies d'une reponse à quelques critiques de M. Chasles. (Paris, Gauthier-Villars, 1866), p. 21.

57.* Détermination du nombre des courbes d'ordre r qui ont un contact d'ordre $[n < mr]$ avec une courbe donnée d'ordre m, et qui satisfont, en outre, à $\frac{r(r+3)}{2} - n$ conditions quelconques. C. R., T. LXIII, p. 423-425.

58.* Détermination du nombre des courbes du degré r qui ont deux contacts, l'un d'ordre n, l'autre d'ordre n' $(n+n' < mr-1)$, avec une courbe donnée du degré m, et qui satisfont, en outre, à $\frac{r(r+3)}{2}-n-n'$ autres conditions. Ib. id., p. 485-488.

59.* Détermination du nombre des courbes de degré r qui ont, avec une courbe fine U^m du degré m, autant de contact d'ordre quelconque qu'on le voudra, et qui satisfont, en outre, à d'autres conditions données. Ib. id., p. 522-526.

60.* Sur la détermination des valeurs des caractéristiques dans les séries ou systèmes élémentaires de courbes et de surfaces. Ib. id., p. 793.

61.* Observations relatives à la théorie des séries ou systèmes de courbes. Ib. id., p. 870-874, 909-954.

62.** Mémoire sur les contacts multiples d'ordre quelconque des courbes de degré r, qui satisfont à des conditions données, avec une courbe fixe du degré m; suivi de quelques reflexions sur la solution d'un grand nombre de questions concernant les propriétés projectives des courbes et des surfaces algébriques. G. di Crelle, T. LXVI, p. 289-321.

63.* Théorèmes fondamentaux sur les séries de courbes et de surfaces d'ordre quelconque. G. di Matem., T. IV, p. 45-53.

64.** Note sur les séries de courbes à double courbure. Ib. id., p. 210-211.

65.* Note pour le *Giornale di Matematiche*. Ib. id., p. 212-213.

1867.

66. Documents rélatifs à une revendication de priorité (litogr. Paris, 4 Févr. 1867).

67. Lettre à M. Chasles sur une question en litige. Paris, p. 15.

1868.

68. Propriétés des réseaux de courbes et de surfaces algébriques. C. R. T. LXVII, p. 1338-1340.

69. Réponse à une observations présentée dans le *Giornale di Matematiche*. Nouv. Ann., 2.ª Serie, VII, p. 111-116; 192.

1869.

70.** Sur les réseaux de courbes et de surfaces algébriques. Math. Annalen, T. I, p. 424-431.

1877.

71. Lettre de M. l'Amiral de Jonquières à M. Saltel sur une question en litige. La Rochelle, Typ. A. Siret, 1 pag. datata 23 Aprile 1877.

72.** Note sur quelques théorèmes fondamentaux dans la théorie des courbes et des surfaces algébriques, et sur une loi générale d'où l'on peut les faire dériver. Annali di Mat., 2.ª Serie, T. VIII, p. 312-328.

1878.

73. Méthode nouvelle pour la décomposition des nombres en somme quadratiques binaires; application à l'analyse indéterminée. C. R. T. LXXXVII, p. 399-402.

74. Décomposition du carré d'un nombre N et de ce nombre lui-même en somme quadratiques de la forme $x^2 + t y^2$, t étant en nombre rationnel positif ou négatif; résolution en nombres entiers du système des équations determinées $y = x^2 + t(x + \alpha)^2$, $y^2 = z^2 + t(z + \beta)^2$. Nouv. Ann., 2.ª Serie, T. XVII, p. 419-425, 425, 433-446.

75. Études sur les décompositions en somme de deux carrés, du carré d'un nombre entier composé de facteurs premiers de la forme $4n+1$, et de ce nombre lui-même. Formules et applications à la résolution complète, en nombres entiers, des équations $y = x^2 + (x - 1)^2$ et $y^2 = z^2 + (z + 1)^2$. Ib. id., p. 241-247, 289-310.

76.* Détermination de certains cas généraux où l'équation $x^3 \pm a = y^2$ n'admet pas de solution en nombres entiers. Ib. id., p. 374-381.

77.* Au sujet des cas d'impossibilité d'une solution en nombre entiers de l'équation $x^3 \pm a = y^2$. Ib. id., p. 514-516.

1882.

78.* Formules pour déterminer combien il y a de nombres premiers n'excédant pas un nombre donné. C. R. T. XCV, p. 1144-1146.

79. Sur la formule recemment communiquée à l'Académie au sujet des nombres premiers. Lettre à M. Bertrand. Ib. id., p. 1343-1344.

1883.

80.* Addition à une note sur les nombres premiers. C. R. T. XCVI, p. 231-232.

81.** Note sur un point de la théorie des fractions continues périodiques. Ib. id., p. 568-571.

82.** Sur la composition des périodes des fractions continues périodiques. Ib. id., p. 694-696.

83.** Additions aux communications précédentes sur les fractions continues périodiques. Ib. id., p. 832-833.

84.** Loi des périodes. Ib. id., p. 1020-1023, 1129-1131, 1210-1213.

85.** Sur les fractions continues périodiques dont les numérateurs diffèrent de l'unité. Ib. id., p. 1297-1306.

86.** Études des identités qui se présentent entre les réduites appartenant, respectivement aux deux modes de fractions continues périodiques. Ib. id., p. 1351-1354.

87.** Lois de coïncidences entre les réduites des fractions périodiques des deux modes. Ib. id., 1420-1423.

88.** Lois des identités entre les réduites des fractions périodiques des deux modes. Ib. id., p. 1490-1493.

89.** Loi des identités entre les réduites des deux modes. Ib. id., p. 1571-1574.

90.** Études sur les fractions continues périodiques. Ib. id., p. 1721-1724.

91.* Considérations théoriques sur les flotteurs remorqués en divergence. Ib. id. T. XCVII, p. 1173-1178.

92.* Sur le ricochet des projectiles sphériques à la surface de l'eau. Ib. id., p. 1278-1281.

93. Notice sur la carrière maritime, administrative et scientifique du Vice-Admiral de Jonquières, Grand-Officier de la Légion d'honneur, Directeur général du Dépôt des cartes et plans de la Marine, Vice-Président de la Commission des phares, Membre de la Commission de l'Observatoire. Paris, 1883, p. 28.

1884.

94.* [Dernier théorème de Fermat]. C. R. T. XCVIII, p. 863-864.

95. Note sur le degré des surfaces osculatrices. Ib. id., p. 1025-1026.

96.* Commentaire arithmétique sur une formule de Gauss. Ib. id., p. 1358-1362, 1515.

97. Sur la règle de Newton pour trouver le nombre des racines imaginaires des équations algébriques numériques. Ib. T. IC, p. 62-67.

98. Sur deux théorèmes de M. Sylvester et sur la règle de Newton. Ib. id., p. 111-115.

99. Règle de Newton-Sylvester. Suite à deux communications précédentes. Ib. id., p. 165-170.

100.* Examen de deux points de doctrine relatifs à la Règle de Newton. Conclusions. Ib. id., p. 269-272.

101.** Sur les équations algébriques. I. Considérations générales. Équations binômes. Équations trinômes. - II. Équations polynômes. - III. Des équations irrationnelles. - Ib. id., p. 345-351, 469-473, 483-488.

102.* Théorèmes concernant les polynômes algébriques complets; application à la règle des signes de Descartes. Ib. id., p. 1143-1144.

1885.

103. Sur quelques singularités du phénomène des marées, à propos d'un Ouvrage de M. Hatt. C. R. T. C, 703-705.

104.* Sur une rélation de récurrence qui se présente dans la théorie des fonctions elliptiques. Ib. id. T. CI, 1885, p. 415-417.

105.* Sur les transformations géométriques birationelles d'ordre *n*. Ib. id. 1885, p. 720-724.

106.* Solution d'une question d'analyse indeterminée, qui est fondamentale dans la théorie des transformations Cremona. Ib. id., p. 857-861.

107.* Sur la dérivation des solutions dans la théorie des transformations Cremona. Ib. id., p. 921-922.

108.** Mémoire sur les figures isographiques et sur un mode uniforme de génération des courbes à double courbure d'un ordre quelconque au moyen de deux faisceaux correspondants de droites. Giorn. di Mat. T. XXIII, p. 48-75.

1886.

109.* Étude arithmétique d'une équation indéterminée du troisième degré. Atti dell'Acc. pontif. dei Nuovi Lincei, T. XXXVII, p. 183-188.

110.* Étude sur les équations algébriques numériques dans leur relation avec la règle des signes de Descartes. Ib. id., T. XXXVIII, p. 55-74.

111.* Au sujet de certaines circonstances qui se présentent dans le mouvement de la toupie. C. R. T. CII, p. 1519-1522.

112. Notice sur la vie et les travaux de Louis-François-Clément Bréguet. Ib. id. T. CIII, p. 5-14 (Riprodotto nella *Revue maritime et coloniale,* Settembre 1886).

113.* Sur le mouvement d'un solide homogène, pesant, finé par un point de son axe de figure. Ib. id., p. 17-21.

114.* Note sur un principe de mécanique rationnelle et une démonstration dont Daniel Bernoulli s'est servi en 1757. Ib. id., p. 617-620.

115.* Étude sur une question d'analyse indéterminée. Giorn. di Matem. T. XXIV, p. 1-11.

1887.

116.* Sur les mouvements d'oscillation simultanés de deux pendules suspendus bout à bout. C. R. T. CV, p. 23-27.

117.* Sur les mouvements oscillatoires subordonnés. Ib. id., p. 253-255.

118. Recherche du nombre *maximum* de points doubles *(proprement dits et distincts)* qu'il est permis d'attribuer arbitrairement à une courbe algébrique d'ordre *m*, cette courbe devant d'ailleurs passer par d'autres points simples, qui complètent la détermination de la courbe. Ib. id., p. 917-923.

119. Détermination du nombre maximum absolu de points multiples d'un même ordre quelconque *r*, qu'il est permis d'attribuer arbitraire-

ment à une courbe algébrique C_m, de degré m, conjointement avec d'autres points simples donnés en nombre suffisant pour compléter la détermination de la courbe. Ib. id., p. 971-977.

120.* Génération des courbes unicursales Ib. id., p. 1148-1154.

121. Génération des surfaces algébriques d'ordre quelconque. Ib. id., p. 1203-1209.

1888.

122.* Construction géométrique de courbes unicursales, notamment de celle du cinquième ordre douée de six points doubles. Rend. del Circolo mat. di Palermo, T. II, p. 118-123.

123. Détermination du nombre maximum de points doubles, proprement dits, qu'il est permis d'attribuer arbitrairement, à une surface algébrique de degré m, dont la détermination est completée par d'autres points simples donnés. C. R. T. CVI, 1888, p. 19-26.

124. Sur un trait caractéristique de dissemblance entre les surfaces et les courbes algébriques, d'ou dépendent les limites respectives des nombres de points doubles (ou, plus généralement, de points multiple d'ordre r) qu'il est permis de leur attribuer arbitrairement. Ib. id., p. 156-162.

125. Sur quelques notions, principes et formules qui interviennent dans plusieurs questions concernant les courbes et les surfaces algébriques. Ib. id., p. 234-241.

126.* Construction *géométrique* de la surface du troisième ordre. Réflexions sur la génération des surfaces algébriques à l'aide de deux faisceaux projectifs. Ib. id., p. 526-529.

127.* Construction géométrique, par deux faisceaux projectifs, de la surface du troisième degré determinée par diverses conditions. Ib. id., p. 907-912.

128.* Nouvelles recherches sur la construction, par deux faisceaux projectifs de la surface générale du troisième ordre. Ib. id., T. CVII, p. 209-215.

129.* Construction géométrique d'une surface, à points doubles, du quatrième ordre. Ib. id., p. 430-432.

129 bis.* Théorie élémentaire, d'après les méthodes de Poinsot, du mouvement de la toupie. Mém. de l'Acad. des Sciences de l'Institut de France, T. XLIV.

1890.

130. Su un point fondamental de la théories des polyèdres. C. R. T. CX, p. 110-115.

131. Note sur le théorème d'Euler dans la théorie des polyèdres. Ib. id., p. 169-173.

132. Note sur un mémoire de Descartes longtemps inédit, et sur les titres de son auteur à la priorité d'une découverte dans la théorie des polyèdres. Ib. id., p. 261-266.

133. Écrit posthume de Descartes sur les polyèdres. Ib. id., p. 677-680, 315-317.

134. Note sur un mémoire présenté, qui contient, avec le texte complet et revu de l'écrit posthume de Descartes: *De solidorum elementis*, la traduction et le commentaire de cet ouvrage. Ib. id., p. 677-680.

135.* Écrit posthume de Descartes intitulé « de solidorum elementis ». Texte latin, revu et accompagné de quelques notes explicatives. Bibl. mathem., 2.ª Serie, T. IV, p. 43-55.

136.* Écrit posthume de Descartes « De solidorum elementis ». Texte latin (original et revu) suivi d'une traduction française avec notes. Mém. de l'Acad. des Sciences de l'Institut de France, T. XLV, p. 325-379.

1895.

137.* Sur les dépendances mutuelles des déterminants potentiels. C. R. T. CXX, p. 408-410, 580.

138.* Démonstration d'un théorème sur les nombres entiers. Ib. id., p. 534-557.

139.* Sur une question d'algèbre qui a des liens avec le dernier théorème de Fermat. Ib. id., p. 1139-1143, 1236.

1896.

140. Sur une lettre de Gauss, du mois de Juin 1805. C. R. T. CXXII, p. 829-830.

141. Au sujet d'une lettre inédite de Gauss. Ib. id., p. 857-859.

142.* Quelques propriétés des racines primitives des nombres premiers. Ib. id., p. 1451-1455.

143.* Quelques propriétés des racines secondaires des nombres premiers. Ib. id., p. 1513-1517.

144. Au sujet d'une précédente communication, relative à quelques propriétés des racines primitives et des racines secondaires des nombres premiers. Ib. id., T. CXXIII, p. 374.

145. Au sujet des nombres premiers dont un nombre quelconque donné que peut être racine primitive. Ib. id., p. 405-406.

146. Berichtigung zweier Druckfehler in Band II von Gauss Werken. Gött. Nachr., p. 365.

1897.

147.* Sur certains points de la théorie des residus des puissances. Caractères distinctifs de nombres, ou racines, d'ou proviennent les résidus générateurs. C. R. T. CXXIV, p. 334-340, 428.

1898.

148.* Solutions algébriques de diverses questions concernant les équations indéterminées du second degré à trois termes. C. R. T. CXXVI, p. 863-871, 992.

149.* Sur un point de doctrine dans la théorie des formes quadratiques. Ib. id., p. 991-997.

150.* Addition à une précédente communication, concernant la théorie des formes quadratiques. Ib. id., p. 1077-1081, 1177.

151.* Formules générales donnant des valeurs de D pour lesquelles l'équation $t^2 - D u^2 = -1$ est résoluble en nombres entiers. Ib. id., p. 1837-1843.

152.* Extension du No. 162 des « Disquisitiones arithmeticae » de Gauss. Id. T. CXXVII, p. 596-601.

153.* Rapprochements entre les méthodes de Lagrange et de Gauss pour la résolution en nombres entiers des équations indéterminées du second degré. Ib. id., p. 694-700.

1899.

154.* Question 1371. L'Intermédiaire des mathématiciens, T. VI, p. 91-95.

1901.

155.* Au sujet d'une précédente communication. Rectification d'une erreur dans la communication Comptes rendus, T. CXXVI, p. 886. C. R. T. CXXXII, 1901, p. 750.

RECENSIONI ED ANNUNZI

J. Hadamard. — *La série de Taylor et son prolongement analytique.* (Collection *Scientia*, série phys.-math. N. 12). Paris, Naud, 1901. IX-102 p. 8º.

L'autore di questo opuscolo, che occupa un posto eminente tra i cultori della teoria delle funzioni analitiche, riassume in pochi tratti, ma con mano maestra, le più recenti ricerche concernenti le serie di potenze, la loro continuazione analitica e i loro punti singolari.

Dopo avere esposto (C. I) le nozioni più elementari relative alle funzioni analitiche, egli enuncia (C. II) come il problema principale da risolvere quello di determinare *effettivamente* la continuazione d'una serie di potenze, problema che si scinde in due: calcolo della funzione in un punto qualunque, e determinazione dei punti singolari. Alla prima questione rispondono *teoricamente* le formole che danno i coefficienti delle serie dedotte, ma queste formole sono di uso difficile, oltrechè manca un criterio che guidi nella scelta della catena di punti intermedi che deve condurre dalla origine al punto considerato; per poter fare questa scelta con sicurezza, occorrerebbe aver risolta la seconda questione. Il nodo della difficoltà sta nella troppa generalità del problema; d'altra parte è difficile restringere il campo delle funzioni da studiarsi senza escludere alcuno dei casi più interessanti. Questa circostanza ha dato origine a due gruppi di metodi: gli uni affatto generali, gli altri riferiti soltanto alle forme più semplici di singolarità.

Un primo metodo *generale* (C. III), che consiste nello studio diretto della continuazione analitica, esige anzitutto la conoscenza del raggio di convergenza d'una data serie di potenze. A questo proposito si ha il teorema di Cauchy-Hadamard, il quale stabilisce che il raggio di convergenza R d'una serie di potenze $\sum_{m=o}^{\infty} a_m x_m$ è dato da:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{m=\infty}} \left| \sqrt[m]{a_m} \right|,$$

$\overline{\lim}_{m=\infty} u_m$ denotando il più grande dei valori limiti dell'insieme u_0, u_1, u_2, ... Sulla circonferenza di convergenza giacciono punti singolari, e si presenta il problema di determinarli. Un punto singolare è dato da $\lim_{m=\infty} \frac{a_m}{a_{m+1}}$, quando questo limite esiste (Fabry). Ma può più generalmente stabilirsi, sotto diverse forme (Hadamard, Fabry), un criterio per riconoscere se un dato punto della circonferenza di convergenza è o no singolare; come possono trovarsi (Leau) certe condizioni, sotto le quali esistono su questa circonferenza archi non contenenti alcuna singolarità.

Di continuazione non può parlarsi quando la circonferenza di convergenza è una sezione per la funzione considerata (C. IV), ciò che - come è noto (Pringsheim, Borel, Fabry) - costituisce il caso più generale. Non è però sempre facile riconoscere se una data serie si trovi in questa condizione; a ciò possono servire due teoremi dovuti, l'uno a Fabry, l'altro a Le Roy.

Ricerche *speciali* che si connettono con quelle sinora esposte sono quelle (Hadamard) relative alla natura delle singolarità esistenti sulla circonferenza di convergenza (C. V). Così si può trovare la condizione perchè questa non contenga altra singolarità che un polo, e determinare l'affissa di quest'ultimo; e analogamente si può trattare il caso in cui i p punti singolari d'una funzione più vicini all'origine (p è un numero finito) sono poli. Per lo studio delle singolarità non polari conviene introdurre un nuovo concetto, quello di *ordine* d'un punto singolare. L'ordine della serie sulla circonferenza di convergenza è il massimo degli ordini dei punti singolari giacenti su di essa, ed è dato da:

$$\omega = 1 + \overline{\lim_{m=\infty}} \frac{\lg |a_m|}{\lg m}.$$

In una classe abbastanza estesa di casi si possono determinare i punti singolari d'ordine massimo. Però non tutti i punti singolari sono d'ordine finito; anzi limitandosi allo studio dei punti di questa natura si vengono ad escludere casi interessanti.

Un secondo metodo *generale* (C. VI) consiste nella costruzione di espressioni atte a rappresentare una serie di potenze fuori del suo cerchio di convergenza. Esso comprende da una parte le ricerche di Cesàro, Borel, Padé, Stieltjes ed altri sulle serie divergenti (1), e le conseguenti costruzioni di serie di polinomi in base alle ricerche di Runge, Hilbert e Painlevé, dall'altra i teoremi recenti di Mittag-Leffler sulla rappresentazione d'una funzione analitica entro la *stella* ad essa appartenente, teoremi dai quali Leau ha dedotto una generalizzazione del suo metodo sopra ricordato per lo studio delle singolarità.

Un terzo metodo *generale* (C. VII) è quello di trasformazione, che consiste nel ridurre lo studio della funzione considerata a quello di una o più altre legate ad essa da note relazioni. Come esempio può citarsi il teorema (Le Roy): La funzione:

$$\varphi(x) = \int_0^1 V(t)\, f(tx)\, dt,$$

dove $V(t)$ è una funzione qualunque (purchè tale che l'integrale abbia un senso anche quando ai suoi elementi si sostituiscano i loro valori assoluti), non può avere alcun punto singolare che non sia tale per $f(x)$.

A questa categoria di ricerche si raggruppano due importanti teoremi, che portano rispettivamente i nomi di Hadamard e di Hurwitz:

La serie $\Sigma\, a_m\, b_m\, x^m$ non ha in tutto il piano altri punti singolari

(1) A tale proposito v. la recensione su Borel, *Leçons sur les séries divergentes* che uscirà in un prossimo fascicolo di questo *Bollettino*.

che quelli ottenuti moltiplicando tra loro le affisse dei punti singolari delle serie $\Sigma\, a_m\, x^m$, $\Sigma\, b_m\, x^m$.

La serie:

$$\Sigma \left(a_0 b_m + \binom{m}{1} a_1 b_{m-1} + \ldots + a_m b_0\right) \frac{1}{x^{m+1}}$$

non ha altri punti singolari che quelli ottenuti sommando tra loro le affisse dei punti singolari delle serie $\Sigma \frac{a_m}{x^{m+1}}$, $\Sigma \frac{b_m}{x^{m+1}}$.

Le trasformazioni si possono considerare (C. VIII) sotto un punto di vista più generale (Bourlet, Pincherle), studiando, per esempio, l'insieme di tutte quelle che hanno la proprietà distributiva (*trasmutazioni lineari*). Importanti sono le trasmutazioni lineari *degeneri*, le quali conducono a qualche risultato notevole intorno alle singolarità delle funzioni (Pincherle).

Le teorie esposte sono suscettibili di generalizzazione in vario senso (C. IX). Le ricerche di Stieltjes e Borel sulle serie divergenti e sulle frazioni continue sono in parte applicabili alle serie a raggio di convergenza nullo. Si può tentare lo studio di serie i cui termini, anzichè essere semplicemente potenze della variabile, abbiano altre forme (Servant). Più importante è l'estensione alle funzioni di più variabili (Lemoine, Biermann, Lerch).

Infine come applicazioni (C. X) possono citarsi: la determinazione delle radici delle equazioni algebriche o trascendenti (Runge, Hadamard), lo studio delle serie trigonometriche (Painlevé), la ricerca delle proprietà aritmetiche dei coefficienti d'una serie (Tchebycheff, Teixeira, Hurwitz, Pincherle, Borel). G. VIVANTI.

E. LEMOINE. *Géométrographie ou Art des constructions géométriques.* Paris, C. Naud éditeur, 1902, 8.º, p. 87 [Prezzo 2 fr.].

Secondo i principii posti da Euclide una costruzione geometrica è legittima soltanto quando sia eseguibile *teoricamente* mediante rette e circoli, *in pratica* coll'aiuto della riga e del compasso; essa è tanto più semplice quanto è minore il numero delle linee che esige e tanto più esatta quanto più in essa predomina la circonferenza sulla retta. Per tradurre queste indicazioni un po' vaghe in un procedimento esatto e sicuro, da potersi porre nelle mani di qualunque geometra, sin dal 1888 il Lemoine ha proposto un metodo ed una speciale simbolica, che egli poi, aiutato da alcuni suoi conterranei, ha perfezionato, svolto e largamente applicato (1). È l'*arte delle costruzioni geometriche* o *Geo-*

(1) Si direbbe che l'utilità di siffatto metodo sia stata presentita dal Wiener, che, nel suo *Lehrbuch der darstellenden Geometrie,* indicò per ogni soluzione il numero delle costruzioni elementari che racchiude.

metrografia, alla quale in questi ultimi quattordici anni egli ha dedicato tutto il tempo che non consacrò alla geometria del triangolo e che ora espone in un corpo di dottrina, nell' opuscolo che annunciamo e che porta il N. 8 nella nota collezione intitolata *Scientia*. I fondamenti del procedimento immaginato dal Lemoine sono ormai assai noti, se non altro perchè si leggono nella più recente edizione (1900) dell' ottimo *Traité de géométrie* di Rouchè e de Comberousse; in Italia esso ha già trovato estimatori e cultori; onde crediamo non sia il caso di esporne qui l' essenza. Notiamo sôltanto che esso ha già prestati alla geometria ottimi servigi, avendo condotto a surrogare le antiche soluzioni di certi problemi classici con altre di gran lunga migliori; valga ciò a evitare che il nuovo ramoscello sorto sul vetusto tronco della geometria venga spregiato e divelto, a raccomandarlo invece come meritevole di considerazione e di cura. Se, quindi, sarebbe da rammaricare che esso assorbisse troppe forze, ben degne di altro uso, sarebbe del pari da lamentare venisse totalmente trascurato. Appunto nell' ipotesi che la Geometrografia attragga l'attenzione di qualche lettore del *Bollettino*, è opportuno avvertire che l' opuscolo del Lemoine non è un ritratto completo e fedele dello stato attuale in cui quella teoria si trova; ed è da rimpiangere che l' autore non abbia coronata la sua opera con un elenco completo, o meglio con un' analisi esauriente, dei lavori che vi si riferiscono.

G. L.

Probabilités et moyennes géométriques, par E. CZUBER, *trad. de l'allemand par* H. SCHUERMANS, *préf. de* CH. LAGRANGE. — Paris, Hermann, 1902, XII-244, p. 8.° [L. 8,50].

È una traduzione dell' opera di Czuber: *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte* (Leipzig, Teubner, 1884). Discorrere di quest'opera interessantissima sarebbe cosa superflua: essa è conosciuta e degnamente apprezzata dal pubblico matematico di tutti i paesi, come ne è prova il fatto che, dopo quasi vent' anni, è ancora sentito il bisogno di una traduzione di essa. Osserveremo solo che, a parte la sua importanza in rapporto alle scienze applicate, essa offre un vasto campo di esercizi sul Calcolo infinitesimale e su altre parti delle matematiche, sicchè la vediamo con piacere riapparire sotto una veste che la rende più accessibile agli studenti dei nostri Atenei.

G. VIVANTI.

NECROLOGIO

Camillo Tito Cazzaniga

L'immatura fine del compianto Camillo Tito Cazzaniga — il quale giovane d'anni si era già potentemente affermato nelle Scienze matematiche, in guisa da dare sicura promessa che, ove la natura fosse stata con lui meno avara, nuove e ancor più luminose traccie avrebbe lasciato di sè nella Scienza — non poteva a meno di commuovere vivamente tutti quelli che si occupano delle discipline matematiche. Ed è perciò quasi doveroso che questo periodico dedichi un cenno alla memoria del lagrimato Estinto, onde sopra tutto ricordarne i meriti.

Camillo Tito Cazzaniga nacque a Virgilio, nei pressi di Mantova, il 9 Aprile 1872; quivi compì i primi studi, primeggiando sempre in tutto, talchè vinse un premio nella gara d'onore nazionale, in Lettere italiane, indetta fra i licenziati dagli Istituti tecnici.

Primo negli esami d'ammissione entrò nel Collegio Ghislieri, in guisa che egli, sprovvisto di mezzi di fortuna, potè compiere gli studi matematici nella R. Università di Pavia, conseguendovi trionfalmente nel 1896 il diploma di laurea colla memoria: « Sui determinanti infiniti » della quale riparleremo più innanzi. Insegnò poi con plauso nella Scuola consorziale di Magistero in Matematica annessa all'Università di Pavia, interrompendo per un anno il suo insegnamento per recarsi a Gottinga a compirvi un corso di perfezionamento, il che gli era stato reso possibile dall'aver conseguita per concorso una borsa di studio. Le sue notevoli pubblicazioni stavano per aprirgli l'adito a brillante avvenire: se non che nel 1899, cosa che è a rimpiangersi vivamente, una condanna subìta per ragioni politiche fu ritenuta motivo sufficiente per negargli la libera docenza. Preclusagli così, sia pure momentaneamente, la carriera universitaria, dopo aver tenuto per alcuni mesi come supplente l'insegnamento delle Matematiche superiori nell'Università di Pavia, gli fu giuocoforza accettare il posto d'insegnante di Matematica nel R. Istituto tecnico di Sassari. Pur troppo è probabile che qui l'insalubrità del clima e le amarezze cagionategli dalle contrarietà sofferte abbiano arrecato non lieve colpo alla sua fibra. Fatto sta che mentre, superate le primitive difficoltà, egli era in procinto di conseguire presso la R. Università di Messina quella libera docenza che un anno prima gli era stata negata per l' Università di Pavia (il che gli avrebbe permesso d' entrare nell'insegnamento superiore, come ne aveva già avuti sicuri affidamenti da più d' una delle Facoltà matematiche italiane, le quali sarebbero state ben liete d' accoglierlo nel loro seno), lo assalì un morbo che non perdona. Così, dopo circa cento giorni di sofferenze continue, serenamente sopportate con quel carattere nobilissimo, adamantino che mai non si smentì neppure un momento durante tutta la sua travagliata esistenza, Camillo Tito Cazzaniga fu rapito il giorno 30 Ottobre del 1900 all' affetto della famiglia, di cui era il legitimo orgoglio ed al tempo stesso il valido sostegno, all' affetto degli amici, alle speranze della Scienza.

L' attività del compianto Cazzaniga si rivolse principalmente a due campi di ricerche: l' uno la teoria dei determinanti, l' altro la teoria delle funzioni seguendo l' indirizzo dei Weierstrass. Nel primo campo il lavoro più importante e per la novità dell' argomento trattato e per i notevoli contributi arrecati dal C. è senza dubbio quello *Sui determinanti d'ordine infinito.* Egli partendo da un nuovo criterio di convergenza d' un determinante infinito, che gli parve opportuno introdurre — criterio consistente nel considerare convergente un determinante infinito D nel quale, indicandone con $a_{i,w}$ gli elementi $(i, w = 1, 2 \ldots)$ e con $D_{m,n} = \left[a_{i,w}\right]$ $(i, w = -n \ldots . \; 0 \; \ldots . + m)$ i determinanti minori, sia:

$$\left| D_{m+p,\,n+q} \; D_{m,\,n} \right| < \sigma$$

per m, n abbastanza grandi e p, q interi qualunque — studiò dapprima le proprietà fondamentali dei determinanti convergenti. Dopo passò a sviluppare la teoria di varie classi di determinanti infiniti presentanti particolare interesse; e chiuse l' importante monografia con un' applicazione ai sistemi lineari infiniti, studiando in particolare gli importanti risultati dovuti in questo campo al Prof. Pincherle.

Oltre a questo lavoro dobbiamo al C. una serie di interessanti pubblicazioni di minor mole intorno alle proprietà di speciali determinanti sì finiti che d' ordine infinito, ai loro sviluppi e alle operazioni che su essi si possono eseguire.

Nella Teoria delle funzioni il C. si segnalò per la geniale estensione al campo ellittico di teoremi fondamentali del Weierstrass, del Picard e d' altri autori intorno alle funzioni uniformi.

In una prima pubblicazione (*Funzioni olomorfe nel campo ellittico*) il C., prendendo le mosse da un' analoga ricerca del Prof. Pascal, rappresentò, valendosi della funzione σ di Weierstrass, sotto forma di prodotto infinito, una funzione doppiamente periodica di dati periodi che nell' interno del parallelogramma fondamentale ammetta un sol punto singolare essenziale, punto limite di infiniti zeri. Indi costruì le più elementari trascendenti per il campo ellittico e dopo aver accennato come, mediante i risultati dell'Appell, sia facile estendere il teorema di Mittag-Leffler nello stesso campo, diede per questo campo i teoremi corrispondenti a quelli del Guichard per le trascendenti intere. Finalmente stabilì le formole atte allo sviluppo ed alla rappresentazione di funzioni meromorfe nel campo ellittico e di funzioni, ammettenti infiniti zeri nell'interno d'un cerchio posto alla sua volta entro il parallelogrammo dei periodi e sulla cui circonferenza esistano infiniti punti singolari della funzione, estendendo così un noto teorema del Picard.

In una seconda Nota (*Sul teorema di Weierstrass nel campo ellittico*) egli diede lo spezzamento in fattori primari di funzioni uniformi nel campo ellittico, pari, dispari o aventi gli stessi periodi della funzione *sn*. Un terzo lavoro (*Sulle funzioni olomorfe e meromorfe nel campo razionale e nel campo ellittico*) fu dal C. dedicato ad un'estensione del teorema del Picard sui *valori d'eccezione* delle funzioni intere, valendosene per la determinazione d'un limite superiore per il numero di valori d'eccezione che può presentare una funzione olomorfa *o meromorfa nel campo ellittico.*

Un altro lavoro del Cazzaniga (*Note critiche sulla teoria degli integrali curvilinei e di superficie*) è dedicato a porre nella loro forma più generale gli integrali curvilinei e di superficie.

Elenco delle pubblicazioni di C. T. Cazzaniga

Nei *Rendiconti del R. Ist. Lomb. di Sc. e Lettere*

1. Sopra i determinanti di cui gli elementi principali variano in progressione aritmetica - Serie II, vol. XXIX, 1896.
2. Sopra i determinanti gobbi - Serie II, vol. XXX, 1897.
3. Relazioni fra i minori di un determinante di Hankel - Serie II, vol. XXXI, 1898.
4. Sul teorema di Weierstrass nel campo ellittico - Serie II, vol. XXXI, 1898.
5. Note critiche sulla teoria degli integrali curvilinei e di superficie - Serie II, vol. XXXIII, 1900.
6. Aggiunte ad una mia Nota intorno ai determinanti - Serie II, vol. XXXIV, 1901 (postuma).

Negli *Annali di Matematica pura ed applicata*

7. Sui determinanti d'ordine infinito - Serie II, vol. XX, 1897.
8. Intorno ad un tipo di determinanti nulli di ordine infinito - Serie III, vol. I, 1898.

9. Appunti sulla moltiplicazione dei determinanti normaloidi - Serie II, vol. II, 1899.

Negli *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*

10. Funzioni olomorfe nel campo ellittico - vol. XXXIII, 1898.
11. Sulle funzioni olomorfe e meromorfe nel campo razionale e nel campo ellittico - vol. XXXIII, 1898.
12. Intorno ai reciproci dei determinanti normali - vol. XXXIV, 1899.

Nei *Mathematische Annalen*

13. Précis d'une theorie élémentaire des determinants cubiques d'ordre infini - vol. LIII, 1900.

Nel *Giornale di Matematiche*

14. Sul calcolo di qualche determinante numerico - vol. XXXVI, 1898.
15. Due teoremi sulla teoria delle forme - vol. XXXVIII, 1900.

Nel *Periodico di Matematica*

16. Qualche complemento al teorema di Hunyadi su certi determinanti - Tomo XVI, 1900.

ADOLFO VITERBI.

PROGRAMMI E RIASSUNTI DI CORSI UNIVERSITARI

R. UNIVERSITÀ DI PAVIA

CORSO DI ANALISI SUPERIORE

Anno 1901-1902.

Le ricerche sulle equazioni ai differenziali totali di primo ordine furono cominciate da PFAFF sul principio del secolo passato (e da ciò quelle equazioni furono chiamate *pfaffiane*) e lo scopo principale era allora quello di ricavarne luce per il problema delle equazioni a derivate parziali di primo ordine. Fra i primi che se ne occuparono, e con questo intento, è da annoverarsi anche il grande JACOBI.

In prosieguo di tempo quella teoria si è andata sviluppando in varie direzioni, e notevoli progressi si son potuti conseguire quando ad essa si sono applicati i concetti e i risultati relativi alle teorie delle trasformazioni e della invariantività.

Le ricerche analoghe per le equazioni di ordine superiore al primo, se si eccettuano alcuni casi molto particolari trattati da GULDBERG, non erano state mai intraprese, per quanto, come credo d'avere io recentemente mostrato, il loro studio presenta un interesse non trascurabile, e di esse io mi sono perciò a varie riprese occupato in parecchi lavori pubblicati negli ultimi due anni (*Compt. Rend. de l'Acad. de Paris*, t. 130, 1900; *Math. Ann.*, t. 54; *Rend. Ist. Lomb.* (2) t. 33, 1900, p. 287; *ibid.*, p. 675; *ibid.*, t. 34, 1901, p. 563; *ibid.*, p. 1180; *Annali di Matematica* (3) t. 7; *Rend. Ist. Lomb.* (2) t. 35, 1902, p. 244).

Nel corso di Analisi Superiore da me dettato a Pavia in questo anno io mi sono proposto di sviluppare appunto i particolari di tutto questo complesso di teorie, su cui mi è sembrato interessante richiamare l'attenzione dei giovani, e il mio compito è stato, per le prime parti del corso, agevolato dalla pubblicazione recentemente avvenuta di un libro di EDUARD v. WEBER (*Vorl. über das Pfaff'sche Problem*, ecc. Leipzig, 1900) in cui è esposta la teoria completa, naturalmente solo per il caso del primo ordine. È del programma di questo mio Corso di lezioni che mi permetto di dare ora notizia ai lettori di questo periodico.

Milano, Giugno 1902.

ERNESTO PASCAL.

Sulla teoria generale delle equazioni ai differenziali totali di primo e second'ordine

PARTE I.

Sulle equazioni a derivate parziali lineari di primo ordine e sui simboli delle trasformazioni infinitesime

1. Generazione di una equazione a derivate parziali. — Trasformazione per cui la funzione incognita venga a comparire nell'equazione solo per mezzo delle sue derivate.
2. Equazione a derivate parziali lineare omogenea di primo ordine, $Xf = 0$, e sua generazione mediante gli $n-1$ suoi integrali indipendenti. — Sua soluzione generale. — Osservazioni sulle possibili soluzioni singolari ed esempio relativo. — Caratteristiche di una tale equazione. — Considerandone il primo membro come simbolo di una trasformazione infinitesima, ogni punto dello spazio si sposta lungo la tangente alla caratteristica passante per esso. — Superficie integrale come luogo di caratteristiche. — Esempi relativi alle superficie cilindriche, coniche, conoidi, di rivoluzione.

3. Trasformazione del simbolo X. — Se alcune delle nuove variabili sono integrali dell'equazione $Xf=o$, il numero dei termini della equazione trasformata resta ridotto.
4. Moltiplicatore di JACOBI. — Soddisfa ad una equazione a derivate parziali. — Il quoziente di due moltiplicatori è costante o integrale della equazione. — Se ρ è moltiplicatore, e ω una soluzione, sarà $\rho\omega$ un moltiplicatore, e ogni moltiplicatore si può porre sotto questa forma. — Espressione del moltiplicatore dell'equazione trasformata. — Conosciuti $n-2$ integrali e un moltiplicatore, si può con quadrature conoscere l'ultimo integrale. — Caso particolare di $\rho=1$ ed applicazione alle equazioni della dinamica.
5. Studio del simbolo operativo X. — La parentesi $(X_1 X_2)$, e sue proprietà. — Identità di JACOBI. — Identità contenute in una mia Nota nei *Rend. Ist. Lomb.* del 1901, nelle quali si presentano i numeri Bernoulliani. — Studio di questi numeri; dimostrazione delle loro principali proprietà e delle relazioni ricorrenti fra essi esistenti. — Metodo per ricercare delle nuove relazioni di secondo grado fra i numeri Bernoulliani, seguendo gli sviluppi di un'altra mia Nota nei *Rend. Ist. Lomb.* 1902.
6. Sistemi di equazioni $X_h f=o$, sistemi completi e teoremi relativi. — Sistemi completi sotto la forma Jacobiana *speciale*. — Un sistema completo di m equazioni in n variabili ammette sempre $n-m$ integrali indipendenti. — Metodo per trovarli. — Semplificazione notevole di MAYER colla quale l'integrazione si riduce a quella di un solo sistema di equazioni differenziali ordinarie. — Esempio relativo.

   Sistemi Jacobiani in senso più ampio. — Con una trasformazione di variabili il sistema resta Jacobiano. — Proprietà di questi sistemi in quanto ai loro integrali. — Condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema sia Jacobiano. — Trasformazione di un sistema completo in Jacobiano. — Metodo di integrazione di un sistema Jacobiano ed esempio relativo.

   Rappresentazione geometrica degli integrali. — Caratteristiche delle equazioni date e superficie integrale. — Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema sia completo espressa mediante una costruzione geometrica relativa alle caratteristiche.

PARTE II.

Equazioni ed espressioni ai differenziali totali di primo ordine o pfaffiane

1. Significato geometrico di un sistema di $n-m$ equazioni pfaffiane in n variabili. — Sistema di equazioni $Xf=o$ *aggiunto* del dato. —

Forme simmetriche sotto cui possono mettersi il sistema dato e il suo aggiunto. — Sistema aggiunto di uno risoluto rispetto ai differenziali di $n-m$ variabili.

2. Sistemi completamente integrabili. — Il sistema aggiunto di uno completamente integrabile è completo e reciprocamente. — Forma di Frobenius per le condizioni della completa integrabilità. — Altra forma delle medesime condizioni: una certa matrice gobba deve avere per caratteristica $2n-2m$. — Applicazione al caso di una sola equazione. — Altra applicazione al caso in cui una espressione pfaffiana si possa ridurre alla forma $\rho\, d f$, ovvero semplicemente $d f$. — Dimostrazione del teorema che le indipendenti fra le equazioni pfaffiane di cui i coefficienti sono le note espressioni (ij) formate mediante i coefficienti di una equazione pfaffiana data, formano un sistema completamente integrabile.
3. Moltiplicatore di Lie e sue varie proprietà.
4. Sistemi completamente integrabili contenuti in altri più ampî. — Sistemi che diventano o restano completamente integrabili coll' aggiunta di relazioni fra le x. — Sistemi parzialmente integrabili. — Sviluppo delle considerazioni contenute in una mia Nota su questo soggetto nei *Rend. Ist. Lomb.* 1902. — Esempi relativi.

PARTE III.

Teoria invariantiva di una equazione pfaffiana

1. Riassunto della teoria dei pfaffiani, cioè delle radici quadrate dei determinanti emisimmetrici di ordine pari. — Notazione di Jacobi. — Teorema sullo sviluppo di un pfaffiano.
2. Invariante simultaneo di una espressione a derivate parziali e di una espressione pfaffiana. — Il sistema aggiunto è connesso invariantivamente al dato.
3. Le tre matrici A, B, C. — Relazioni fra le loro caratteristiche. — Queste sono invarianti.

   Classe di una espressione pfaffiana Δ. — Espressioni pfaffiane equivalenti. — Cangiamento della classe colla moltiplicazione per un fattore. — Cangiamento della classe coll' aggiunta di un differenziale esatto.

   Rango di una equazione pfaffiana. — Equazioni pfaffiane equivalenti.
4. Teoremi varii relativi alle espressioni pfaffiane omogenee.
5. Applicazione di una trasformazione infinitesima ad una espressione pfaffiana. — Espressioni o equazioni pfaffiane che *ammettono* una o più trasformazioni infinitesime. — Condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema di equazioni pfaffiane sia completamente

integrabile è che esse ammettano tutte le trasformazioni infinitesime rappresentate dal proprio sistema aggiunto. — Ricerca di tutte le trasformazioni infinitesime che appartengono al sistema aggiunto di una equazione pfaffiana e che la lasciano invariata — Sistemi V e W. — Trasformazioni infinitesime che lasciano invariata una equazione pfaffiana senza appartenere al sistema aggiunto. — Trasformazioni infinitesime che lasciano invariata, a meno di un differenziale esatto, una equazione pfaffiana. — Proprietà dei sistemi V e W. — Essi sono completi e invariantivamente connessi alla equazione data.

PARTE IV.

Il problema di Pfaff

1. Trasformazione di una espressione pfaffiana nel prodotto di un'altra con una variabile di meno, per un fattore finito contenente tutte le variabili. — Metodo di Pfaff. — Ulteriore riduzione e dimostrazione del teorema che condizione necessaria e sufficiente perchè due equazioni pfaffiane sieno equivalenti è che abbiano il medesimo rango.
2. Trasformazione di una espressione pfaffiana nella somma di un differenziale esatto e di un' altra contenente una variabile di meno. — Ulteriore riduzione e dimostrazione del teorema che condizione necessaria e sufficiente perchè due espressioni pfaffiane sieno equivalenti è che abbiano la medesima classe.
3. Costruzione, mediante i pfaffiani, del sistema di equazioni differenziali da cui dipende la riduzione di Pfaff. — Notevole semplificazione di Jacobi colla quale, nella ulteriore riduzione, in luogo di tanti sistemi di equazioni differenziali ordinarie, ne basta uno solo. — Caso in cui nella equazione mancano dei termini. — Esempi di risoluzione del problema di Pfaff.
4. Applicazione del problema di Pfaff all' integrazione di una equazione generale a derivate parziali di primo ordine. — Semplificazione di Jacobi. — Esempi. — Considerazioni varie sugl'integrali completi di una equazione a derivate parziali di primo ordine e metodo per passare dall'uno all'altro. — Esempi varii.
5. Il problema di Pfaff dal punto di vista della teoria delle trasformazioni. — Per effettuare la prima riduzione bisogna trovare gli $n-1$ integrali indipendenti di una delle equazioni del sistema V o W secondo i casi.

PARTE V.

Le equazioni ai differenziali totali di second' ordine

1. Sistemi di tali equazioni nel caso in cui si immaginano alcune delle variabili come dipendenti. — Esposizione di quanto è conte-

nuto nella mia Memoria nel vol. 54 dei *Math. Annalen.* — Sistemi completamente integrabili, parzialmente e singolarmente integrabili. — Il simbolo in parentesi quadra il cui annullarsi rappresenta le condizioni necessarie e sufficienti per la completa integrabilità. — Teoria del moltiplicatore. — Equazioni cui questo soddisfa. — Esempi.

2. Sopra certi sistemi di equazioni a derivate parziali lineari omogenee di second' ordine. — Esposizione della mia Nota su questo soggetto nei *Rend. Ist. Lomb.* 1901. — Definizione di sistema completo per il caso del second' ordine. — Un caso particolare comprendente a sua volta quello dei coefficienti costanti. — Teorema relativo a questo caso. — Il caso di una sola equazione. — Esempio.
3. I sistemi di tipo generale ai differenziali totali di second' ordine. — Esposizione della mia Memoria negli *Annali di Matematica* (3) t. 7. — Completa integrabilità di una sola equazione. — Introduzione di varii simboli e relazioni fra essi. — Equazione di primo ordine aggregata alla data. — Completa integrabilità di un sistema. — Trasformazione di una forma ai differenziali totali di second' ordine. — Invariante simultaneo di una siffatta forma e di un' altra a derivate parziali lineare omogenea di second' ordine. — Sistema aggiunto. — Espressioni simmetriche per il sistema dato e il suo aggiunto. — Caso in cui le equazioni sieno risolute rispetto ad alcuni dei differenziali secondi. — Sistema completo di equazioni a derivate parziali di second' ordine. — Applicazione delle operazioni di primo e second' ordine su di un' espressione ai differenziali totali di second' ordine. — Condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema sia completamente integrabile è che esso sia invariabile per tutte le operazioni della schiera generale rappresentata dal proprio sistema aggiunto.
4. Esposizione dei risultati dell' altra mia Nota nei *Rend. Ist. Lomb.* 1901 sulla invariantività delle caratteristiche di certe matrici formate in un conveniente modo mediante i coefficienti di una data espressione ai differenziali totali di second' ordine.
5. Cenno sulle equazioni ai differenziali totali di ordine superiore al secondo, e dei risultati contenuti nelle mie due apposite Note nei *Rend. Ist. Lomb.* 1900. — Invariante simultaneo di due espressioni, l' una a derivate parziali e l' altra ai differenziali totali *di ordine qualunque*, ed esposizione dell' altra mia Nota, su questo soggetto, pubblicata nei *Rend. Ist. Lomb.*, giugno 1902.

NOTIZIE

Il primo centenario della nascita di Abel verrà solennemente ricordato, per iniziativa dell'Università di Christiania, nei giorni 4-6 Settembre di quest'anno: a tale commemorazione, alla quale prenderanno parte eminenti rappresentanti di tutte le nazioni civili, si associerà tutto il mondo matematico, che ammira in Abel uno dei più grandi scienziati di tutti i tempi. In tale occasione verrà fatta una speciale pubblicazione, della quale non mancheremo di render conto.

***

Una lettura inedita di Jacobi, scritta in latino e pronunciata il 7 Luglio 1832 in occasione dell'ingresso del sommo geometra nell' Università di Königsberg, venne rinvenuta fra le carte di Franz Neumann e pubblicata da W. Dyck nei *Sitzungsberichte der k. b. Akad. der Wiss. zu München,* T. XXXI, 1901.

***

Carteggio fra Aronhold e Hesse. — Nel T. CXXIV del *Journal für reine und angew. Mathematik* S. Gundelfinger ha pubblicate tre interessanti lettere dirette da Aronhold a Hesse nell'intorno del 1850 e la minuta di una lettera del secondo al primo; i futuri storici della teoria degl' invarianti dovranno tenerne conto.

***

Una nuova Società matematica venne inaugurata a Berlino il 31 Ottobre 1901 sotto la presidenza del Weingarten; è la *Berliner mathematische Gesellschaft*, i cui atti si trovano allegati ai singoli fascicoli dell'*Archiv für Mathematik und Physik.*

***

Argomenti di corsi universitari. — L'ottimo *Bulletin of the American Mathematical Society* contiene in ogni sua puntata un ricco elenco degli argomenti di matematica svolti in 35 Università di Francia, di Germania, d' Inghilterra e degli Stati Uniti. Resta così soddisfatto un vivo desiderio che nutrivano tutti quelli che amano seguire il movimento scientifico e didattico del mondo intero. Sarebbe da augurarsi che elenchi analoghi venissero compilati per quanto si fa in Italia; il nostro *Bollettino* sarebbe lietissimo di ornarne le proprie colonne.

Marco Bertolone, Direttore-Gerente

Genova - Tipografia R. Istituto Sordo-muti - 1902.

ANNO V. OTTOBRE, NOVEMBRE E DICEMBRE 1902.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. 6, per l'estero Fr. 7.50. Numeri separati L. 2 caduno. — Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

RECENSIONI ED ANNUNZI

E. BOREL. *Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions. - Leçons sur les séries divergentes.* — Paris, Gauthier-Villars, 1901, 8.°, p. VII-183.

È questo il terzo dei volumetti che il valente analista francese dedica alla teoria moderna delle funzioni (1), e non è certo meno denso di materia, meno interessante nè meno suggestivo dei due che lo precedono.

*
* *

Le serie divergenti, usate senza scrupolo dai vecchi matematici, poi bandite dall'analisi per opera di Abel e di Cauchy, riapparvero

(1) Dei due primi volumi si è fatto cenno in questo *Bollettino*, T. III, 1900, p. 73-75.

sull'orizzonte un quarto di secolo fa in una memoria di Laguerre (1879); qualche anno dopo (1886) Stieltjes e Poincaré le presero in considerazione da due punti di vista diversi, e da allora i matematici furono indotti a chiedersi se non fosse troppo severo l'ostracismo inflitto a quegli enti analitici, e se da essi non potesse per avventura trarsi qualche vantaggio. Ed infatti, se fosse possibile far corrispondere a ciascuna serie divergente numerica un numero, ed a ciascuna serie divergente a termini variabili una funzione, per modo che il numero o la funzione potesse — almeno in determinate circostanze — sostituirsi esattamente o con approssimazione alla serie corrispondente, questo numero o questa funzione eserciterebbe lo stesso ufficio della somma d'una serie convergente, e potrebbe senza alcun pericolo essere denominato la *somma* della serie a cui corrisponde. È lecito adunque far uso delle serie divergenti, purchè l'ente (numero o funzione) che intendiamo rappresentato da una serie divergente sia tale, che alle operazioni analitiche (addizione, moltiplicazione, divisione, integrazione, derivazione) eseguite sulle serie corrispondano, almeno sotto determinate condizioni restrittive, le operazioni stesse eseguite sugli enti che esse rappresentano.

*
* *

Poincaré parte da questa definizione: Se la serie $\sum_{i=0}^{\infty} C_i x^{-i}$ e la funzione $J(x)$ sono tali che per tutti i valori di n:

$$\lim_{x=\infty} x^n \left[J(x) - \sum_{i=0}^{n} C_i x^{-i}\right] = 0\,,$$

si dice che la serie *rappresenta asintoticamente* la funzione $J(x)$. Data dunque una funzione $J(x)$, se essa ammette una rappresentazione asintotica, i coefficienti di questa sono determinati successivamente dalle relazioni:

$$\lim_{x=\infty} J(x) = C_0,\ \lim_{x=\infty} x\left[J(x) - C_0\right] = C_1,\ \lim_{x=\infty} x^2\left[J(x) - C_0 - \frac{C_1}{x}\right] = C_2,$$

etc., sicchè la rappresentazione asintotica, se esiste, è unica. Al contrario una medesima serie può rappresentare asintoticamente più funzioni, giacchè v'hanno funzioni, come e^{-x}, la cui rappresentazione asintotica è una serie a coefficienti tutti nulli. Se si sottopongono ad operazioni analitiche funzioni suscettibili di rappresentazione asintotica, la funzione risultante ha — con certe restrizioni che non è qui il caso di accennare — per rappresentazione asintotica la serie ottenuta eseguendo le stesse operazioni (come si eseguiscono sulle serie convergenti) sulle serie che rappresentano asintoticamente le funzioni date.

Di qui risulta una conseguenza importantissima.

Data un' equazione differenziale ordinaria d' ordine qualunque n, è noto che si può trovare una serie, ordinata, p. es., secondo le potenze di $\frac{1}{x}$, che soddisfa *formalmente* all' equazione. Ne segue che la funzione rappresentata asintoticamente da quella serie, introdotta nel primo membro dell' equazione al posto della variabile dipendente, dà luogo ad una funzione a rappresentazione asintòtica nulla. D'altra parte, se esiste un integrale dell' equazione suscettibile di rappresentazione asintotica insieme alle sue derivate sino all' n — esimo ordine, le relative rappresentazioni, introdotte nel primo membro dell' equazione, devono ridurlo allo sviluppo asintotico d' una funzione identicamente nulla, cioè a zero, in altre parole devono soddisfare formalmente all' equazione. Se quindi noi sappiamo *a priori* che l'equazione ammette un integrale della natura designata, è certo che la sua rappresentazione asintotica si troverà fra quelle che soddisfanno formalmente all' equazione. In particolare, se l' equazione è lineare e i suoi coefficienti sono polinomi, il numero degli sviluppi che soddisfanno formalmente all' equazione è eguale al numero degli integrali distinti di essa suscettibili di rappresentazione asintotica, quindi le serie rappresentano asintoticamente gli integrali. Praticamente poi queste serie possono servire a calcolare gli integrali stessi con approssimazione tanto maggiore, quanto più grande è il valore della variabile.

Borel studia il caso d' un' equazione lineare del secondo ordine avente per coefficienti delle serie di potenze di $\frac{1}{x}$, e quello più generale d' un' equazione della forma:

$$y'' = f(x, y),$$

e dimostra, sotto certe condizioni, l' esistenza di integrali suscettibili di rappresentazione asintotica.

*
* *

Laguerre ha dato l' esempio d' un integrale di valore finito:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-u}\,du}{z+u},$$

che sviluppato secondo le potenze di $\frac{1}{z}$ dà luogo alla serie divergente per ogni valore di z:

$$\frac{1}{z} - \frac{1!}{z^2} + \frac{2!}{z^3} - \frac{3!}{z^4} + \cdots,$$

la quale a sua volta è *formalmente* eguale alla frazione continua convergente:

$$F = \cfrac{1}{z+1-\cfrac{1}{z+3-\cfrac{4}{z+5-\cfrac{9}{z+7-\ldots}}}}$$

ed ha dimostrato che $J = F$.

Generalizzando l'idea di Laguerre, Stieltjes osserva anzitutto che, se la serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ a termini reali e positivi è divergente, la frazione continua:

$$F = \cfrac{1}{a_1 z + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 z + \cfrac{1}{a_4 + \ldots}}}} \tag{1}$$

è convergente per ogni valore reale positivo o complesso di z. Questa frazione può svilupparsi in una serie:

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots\ldots, \tag{2}$$

dove le c_i sono reali e positive, e tale serie è divergente per ogni valore di z. Reciprocamente, data una serie divergente (2), può dedursi da essa una frazione continua (1), essendo le a_i legate alle c_i dalle relazioni:

$$a_{2n} = \frac{A_n^2}{B_n B_{n-1}}, \quad a_{2n+1} = \frac{B_n^2}{A_n A_{n+1}}, \tag{3}$$

dove:

$$A_0 = 1, \quad B_0 = 1,$$

$$A_n = \begin{vmatrix} c_0\, c_1 \ldots\ldots c_{n-1} \\ c_1\, c_2 \ldots\ldots c_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n-1}\, c_n \ldots c_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad B_n = \begin{vmatrix} c_1\, c_2 \ldots\ldots c_n \\ c_2\, c_3 \ldots\ldots c_{n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n\, c_{n+1} \ldots c_{2n-1} \end{vmatrix}.$$

È naturale pertanto considerare la frazione continua come la rappresentazione analitica della serie divergente. A sua volta poi la (1) può trasformarsi in un integrale definito della forma:

$$J = \int_0^{\infty} \frac{f(u)\, du}{z+u}, \tag{4}$$

dove $f(u)$ è una funzione essenzialmente positiva; anche questo integrale può dunque rappresentare la serie divergente (2).

Data una serie (2), tale che la a ricavate dalle c mediante le (3) formino una serie divergente, la funzione $f(u)$ che figura nel corrispondente integrale (4) è determinata in modo unico. Reciprocamente, data $f(u)$, le c sono determinate in modo unico mediante le:

$$c_n = \int_0^\infty f(u)\, u^n\, du\,;$$

e, se esse sono tali che le corrispondenti a formino una serie divergente, la (2) è una serie divergente per ogni valore di z avente per rappresentazione analitica l'integrale (4). Poichè il problema di riconoscere se una funzione $f(u)$ soddisfa a tale condizione, come ha osservato Stieltjes, non può risolversi in generale, Borel si limita a considerare le funzioni che soddisfanno alla condizione alquanto più restrittiva:

$$\left| f(u) \right| < \mathrm{A} e^{-m\sqrt{u}}, \tag{5}$$

dove A, m sono costanti, e chiama *funzioni di Stieltjes* quelle che, insieme alle loro derivate sino ad un certo ordine λ, soddisfanno alla (5). Egli dimostra che ad un dato sviluppo corrisponde un'unica funzione di Stieltjes; inoltre — detta *serie di Stieltjes* una serie corrispondente ad una funzione di Stieltjes — fa vedere che le serie di questa natura possono sottoporsi ad operazioni analitiche come se fossero convergenti, e che le serie risultanti sono ancora — con qualche restrizione — serie di Stieltjes. Inoltre, a differenza di quanto accade per le serie di Poincaré, una serie di Stieltjes identicamente nulla ha per unico rappresentante analitico un integrale identicamente nullo. Segue da tutto ciò che, se un'equazione differenziale è soddisfatta formalmente da una serie di Stieltjes, l'integrale definito che la rappresenta è un integrale dell'equazione.

*
* *

Un terzo punto di vista per la teoria delle serie divergenti è quello adottato sistematicamente per la prima volta da Cesàro. Egli chiama *semplicemente indeterminata* una serie divergente tale che, denotando in generale con s_r la somma dei suoi primi r termini, il rapporto:

$$\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}$$

tenda ad un limite al crescere indefinitamente di n; questo limite può dirsi la *somma* della serie, e coincide coll'ordinaria somma nel caso speciale in cui la serie è convergente. Una serie di tal natura risulta p. es. dal prodotto di due serie non assolutamente convergenti, e la sua somma è il prodotto delle somme di queste.

Più generalmente Borel propone di chiamare *somma* d'una serie divergente $\sum_{t=0}^{\infty} u_t$ l'espressione:

$$s = \lim_{a=\infty} \frac{c_0 s_0 + c_1 a s_1 + c_2 a^2 s_2 + \ldots}{c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \ldots},$$

dove $s_r = \sum_{t=0}^{r} u_t$, e:

$$c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \ldots = \varphi(a) \tag{6}$$

è una funzione intera prefissata, ogni qualvolta tale espressione abbia un significato. Se si prende $\varphi(a) = e^a$, s si dice *somma esponenziale*, e le serie per cui s ha valore determinato chiamansi *sommabili*. La quantità s può anche mettersi sotto la forma:

$$s = \int_0^{\infty} e^{-a} u(a)\, da,$$

dove:

$$u(a) = u_0 + \frac{u_1 a}{1!} + \frac{u_2 a^2}{2!} + \ldots$$

è una funzione intera, che dicesi *associata* alla serie considerata.

Se, oltre all'integrale s, esistono anche gli integrali:

$$\int_0^{\infty} e^{-a} \left| u(a) \right| da, \int_0^{\infty} e^{-a} \left| u'(a) \right| da, \int_0^{\infty} e^{-a} \left| u''(a) \right| da, \ldots,$$

la serie dicesi *assolutamente sommabile*.

La somma o il prodotto di più serie assolutamente sommabili è una serie assolutamente sommabile, la cui somma è rispettivamente la somma o il prodotto delle somme delle serie date.

Se una serie di potenze è assolutamente sommabile per $x = x_0$, essa lo è pure in tutti i punti del segmento che unisce l'origine al punto x_0, ed anche le sue derivate lo sono in tutti i punti di questo segmento, escluso al più il punto x_0; la somma della serie è una funzione analitica non avente alcun punto singolare nel cerchio descritto sul segmento $0\,x_0$ come diametro.

Segue di qui che: Se $P(u, v, \ldots, u', v', \ldots, u^{(\lambda)}, v^{(\lambda)}, \ldots, x)$ è un polinomio nelle $u, v, \ldots$ e nelle loro derivate, i cui coefficienti sono serie di potenze di x convergenti per $x = x_0$, e se in luogo di $u, v, \ldots$ si pongono delle serie assolutamente sommabili per $x = x_0$ e si opera su queste come se fossero serie convergenti, si ottiene una serie assolutamente sommabile in tutti i punti del segmento $0\,x_0$, escluso al più l'estremo x_0; la funzione analitica che ne è la somma, la quale è regolare entro il cerchio avente per diametro $0x_0$, è quella stessa che si otterrebbe ponendo nel polinomio P in luogo delle $u, v, \ldots$ le somme delle serie considerate.

L'applicazione alle equazioni differenziali è ovvia: se una serie assolutamente sommabile soddisfa formalmente ad un'equazione algebrico-differenziale, la sua somma è un integrale dell'equazione.

*
* *

Sia:

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots\ldots \tag{7}$$

l'elemento d'una funzione analitica $f(x)$ corrispondente all'origine; e il campo d'esistenza C della $f(x)$ si estenda oltre il cerchio di convergenza della serie (7). Se x_0 è un punto del campo C esterno a questo cerchio, perchè la serie sia assolutamente sommabile in x_0 è necessario che $f(x)$ non abbia alcun punto singolare entro il cerchio di diametro $0x_0$, ed è sufficiente che non ne abbia alcuno nè all'interno nè sul contorno di questo cerchio. In base a questo teorema si può determinare un certo campo, detto *poligono di sommabilità*, tale che in ogni punto interno di esso la serie è assolutamente sommabile ed in ogni punto esterno non lo è, restando dubbioso soltanto il modo di comportarsi della serie sul contorno. Questo campo si estende al di là della circonferenza di convergenza su ogni raggio che congiunge l'origine con un punto non singolare di tale circonferenza; ma in molti casi esso la oltrepassa di poco. Però, se nella espressione (6) si pone come funzione $\varphi(a)$, invece della e^a, la e^{a^k}, dove k è un numero intero maggiore di 1, si può estendere ulteriormente il campo di sommabilità; ed anzi, se l'insieme dei punti singolari di $f(x)$ è finito od ha per solo punto limite il punto all'infinito, dato un punto x_0 tale che il segmento $0x_0$ non contenga alcun punto singolare di $f(x)$ nè faccia con alcuna retta congiungente l'origine con un punto singolare un angolo commensurabile con π, si può determinare il numero k in modo che la serie sia assolutamente sommabile in x_0.

I metodi di Borel permettono di trattare, almeno teoricamente, il problema di determinare i punti singolari d'una funzione analitica, e conducono ad una nuova dimostrazione del teorema noto, che una serie di Taylor non è, *in generale,* continuabile fuori del suo cerchio di convergenza.

*
* *

Data una funzione analitica $f(x)$, se si congiunge l'origine con tutti i suoi punti singolari e si tolgono dal piano i prolungamenti all'infinito di questi raggi, la parte rimanente del piano costituisce la *stella* appartenente alla funzione $f(x)$. Mittag-Leffler ha dato recentemente l'espressione d'una funzione in serie di polinomi valida entro tutta la stella. Borel, ponendo nella formola di Cauchy:

$$f(x) - \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(u)\,du}{u-x} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(u)\,du}{u\left(1-\frac{x}{u}\right)}$$

in luogo di $\left(1 = \frac{x}{u}\right)$ gli sviluppi in serie di polinomi studiati da Runge e da Painlevé, ottiene infiniti sviluppi di $f(x)$ in serie di polinomi analoghi a quello di Mittag-Leffler. Tali sviluppi sono sempre convergenti entro la stella appartenente alla funzione, ma, per certe funzioni $f(x)$, lo sono anche fuori della stella, quindi ci danno una rappresentazione analitica d'una serie di potenze, non solo fuori del suo cerchio di convergenza, ma anche fuori del campo di esistenza della funzione analitica da essa generata; e di più possono costruirsi anche per certe serie di potenze a raggio di convergenza nullo, come avviene per un esempio sviluppato dal Borel, in cui una serie di questa natura dà luogo ad una rappresentazione analitica valida per tutti i valori reali e positivi o complessi della variabile.

Resterebbe a dimostrare che alle operazioni analitiche eseguite sulle serie corrispondono le stesse operazioni eseguite sulle loro rappresentazioni mediante serie di polinomi; e l'autore finisce coll'osservare che, quando questo risultato sarà raggiunto, tutte le varie teorie delle serie divergenti rientreranno come casi particolari in quella di tali sviluppi.

G. VIVANTI.

Elementi di geometria ad uso dei Ginnasi e Licei e Istituti tecnici (1.º biennio) di GIUSEPPE VERONESE professore nella R.ª Università di Padova, trattati con la collaborazione di PAOLO GAZZANIGA professore nel R.º Liceo di Padova. Ediz. II.ª. Verona, Padova, Fratelli Drucker, 1901, 8.º; parte I.ª pag. XX + 111 (prezzo L. 1,25), parte II.ª pag. IV. + 212 (prezzo L. 2,25).

È certamente con grande compiacenza che gli insegnanti, i quali prendono interesse alle pubblicazioni scolastiche del Prof. Veronese, possono constatare come nelle edizioni che man mano vanno succedendosi degli « Elementi di geometria » di questo illustre Autore la materia venga esposta in modo sempre più adatto alle menti dei nostri giovani, cosicchè senza mai perdere del suo incontestabile valore scientifico vada acquistando pregi sempre maggiori dal lato didattico questo libro, che è frutto delle profonde indagini di cui fanno fede molte e poderose pubblicazioni dell'A intorno ai fondamenti della geometria (1). Ed è pure con soddisfazione e nello stesso tempo con orgoglio che possiamo constatare come l'opera del Veronese venga studiata e favorevolmente giudicata anche all'estero (2).

Il presente scritto non ha che il modesto scopo di porgere a chi non avesse letto questi « Elementi di geometria » un breve resoconto dell'ultima edizione dei medesimi, mettendo specialmente in rilievo quei punti nei quali la materia è presentata con una fisonomia diversa da quella degli altri libri di testo e tralasciando tutte quelle minute osservazioni che non si addicono alla genialità di quest'opera.

Anzitutto mi piace registrare tutti insieme i postulati che servono di fondamento all'edificio. Tre di questi postulati (I, IV, IX) domandano rispettivamente l'esistenza di punti distinti, di punti fuori della retta, di punti fuori del piano; i postulati II e III chiedono per la retta le proprietà caratteristiche del sistema lineare omogeneo (quelle proprietà cioè che la retta ha in comune con la circonferenza, col fascio di raggi ecc.), mentre il V pone l'unicità della retta passante per due punti ed il VI domanda quanto è necessario per poter venire a stabilire l'eguaglianza delle rette fra loro. Il postulato VII serve di base alla teoria dell'eguaglianza delle figure non appartenenti ad una retta e l'VIII a quella delle parallele. Il X è il postulato d'Archimede e l'XI quello della continuità della retta. — Mi pare che questa enumerazione sia più eloquente di qualsiasi dissertazione per convincere della semplicità del sistema di postulati scelto dall'A.

Siccome poi i postulati della geometria devono esprimere le nozioni primitive che relativamente alle forme geometriche vengono in noi suscitate dall'osservazione degli oggetti che rappresentano quelle forme nel campo dei sensi, così ogni postulato è preceduto da alcune considerazioni (osservazioni empiriche) fatte sugli oggetti suddetti, considerazioni che non hanno nessun legame necessario con lo sviluppo teorico della materia, ma che presentano soltanto interesse didattico perchè destinate ad agevolare all'alunno l'intelligenza dei postulati che le seguono, cosicchè esse possono venir modificate a

(1) Un lavoro recente del Veronese che gl'insegnanti possono leggere con diletto e profitto è la comunicazione al Congresso di Parigi del 1900 « *Les postulats de la Géometrie dans l'enseignement* ».

(2) Per limitarmi a qualcuno dei giudizi più recenti ricorderò quello del Dott. H. Thieme della Scuola superiore reale di Posen, il quale nel suo lavoro « Die Umgestaltung der elementaren Geometrie » (1900) così chiude l'esame degli Elementi del Veronese (ed. 1897); *Als Ganzes wie im einzelnen stellt jedenfalls die Arbeit Veronese's seinen Vorgängern gegenüber einen wesentlichen Fortschritt dar*, come pure quello del Prof. Schur del politecnico di Karlsruhe, noto autore di pregievoli scritti sui principî della geometria, il quale nella sua Memoria « Ueber die Grundlagen der Geometrie » (Math. Ann. vol. 55) dice: *Ich erwähne hier auch die vortrefflichen Elemente der Geometrie von Veronese (Padova 1897), in denen der Verfasser der Fondamenti zum ersten Male ein Elementarbuch der Geometrie geschaffen hat, das in Beziehung auf Strenge über Euklid hinausgeht.*

piacere dall' insegnante ed anche tralasciate. Ed è molto importante il notare che quelle osservazioni non hanno nessun legame necessario con lo sviluppo teorico della materia, giacchè uno dei pregi più rilevanti di questo libro sta appunto in ciò che « dal sistema di proposizioni geometriche in esso contenute, facendo astrazione dall' intuizione spaziale (vale a dire dal loro significato geometrico) rimane un sistema di verità astratte logicamente ben determinato come nell' aritmetica ».

E già che stiamo parlando dei postulati sarà conveniente fermare un momento l' attenzione su quello delle rette parallele « se due rette sono parallele esse sono figure opposte l' una all' altra rispetto al punto di mezzo di ogni loro segmento trasversale », il quale assieme alla definizione « due rette diconsi parallele se una di esse contiene due punti opposti a due punti dell' altra rispetto al punto di mezzo di una loro trasversale comune » permette di porre le prime proprietà delle parallele indipendentemente dalla nozione di piano e di dare perciò la definizione di questa figura come pure quella del fascio di rette e di raggi, definizione che in seguito viene estesa per ottenere la stella di rette e di raggi e lo spazio geometrico; sicchè nel libro che esaminiamo vi è una forma (la retta) che serve a determinare tutte le altre, laddove nei libri che seguono i metodi antichi lo spazio, la retta, il piano sono altrettante forme per ognuna delle quali devesi chiedere l' esistenza all' esperienza e domandarne per via di postulati quelle proprietà fondamentali che col metodo del Veronese possono prendere il posto che loro spetta fra i teoremi.

Oltre ai postulati che abbiamo citato sono date come tali alcune altre proposizioni, le quali però molto opportunamente non sono numerate, ma contraddistinte semplicemente con un asterisco e scritte in corsivo anzichè in grassetto, affinchè l' alunno abbia a tener presente che esse sono dimostrabili mediante i postulati essenziali, e che ne vien tralasciata la dimostrazione soltanto per appianargli la via ch' egli deve percorrere; perciò nessun danno verrebbe all' essenza del libro se l' insegnante per sue vedute speciali o in causa delle condizioni poco floride della sua scolaresca, aggiungesse come postulato non necessario qualche altra delle proposizioni che nel testo trovansi dimostrate.

Importantissima è la definizione dell' eguaglianza delle figure fondata sul fecondo concetto di corrispondenza e tale da abbracciare anche quelle figure cosidette simmetriche le quali seguendo il metodo del movimento debbono essere strappate dal dominio del concetto generale di eguaglianza al quale incontestabilmente appartengono. Di qui la possibilità di schivar di ricorrere un' altra volta all'esperienza per chiedere al mondo fisico la nozione di un fatto la cui presenza non è punto indispensabile nel campo geometrico. Di qui pure la possibilità di eliminare le poco gradite considerazioni sugli angoloidi opposti dei quali è con vera sorpresa che gli alunni si sentono dire dai seguaci degli antichi metodi che non sono eguali, e la semplificazione di tutti i teoremi sull' uguaglianza dei triedri (e in generale di tutte le figure solide) prodotta dalla eliminazione del concetto di orientazione da un campo nel quale esso è affatto estraneo. Di qui ancora la possibilità di rendere più completa la corrispondenza fra la geometria del piano e quella della stella e della sfera in quelle parti che non dipendono dalla teoria delle parallele.

Ed a questo punto torna a proposito l' osservare con quanta evidenza siano nel libro, che abbiamo dinanzi, messe in luce le analogie che anche nel campo della geometria elementare hanno luogo tra le diverse forme fondamentali della medesima specie, e precisamente, stando alle forme di prima specie, tra retta, fascio di raggi, fascio di rette parallele, circonferenza, fascio di semipiani, fascio di piani paralleli, fascio di circoli massimi sulla sfera, per tutte le quali forme (e volendo anche per le superficie conica e cilindrica) si può notare che soddisfano alle condizioni contenute nei postulati che caratterizzano la retta come sistema lineare omogeneo di punti, dopo di che per ognuna di esse è lecito concludere senz' altro che rispetto ai loro elementi hanno luogo quelle proprietà che per la retta discendono da codesti postulati. Ma dove a proposito di paralleli maggiormente si distingue il presente testo è nel § 7 del libro III. dove il confronto tra la geometria della stella e quella del piano è di una sorprendente limpidezza, mettendo bene in rilievo le analogie e le differenze, e facendo vedere come le analogie si presentino non solo nei risultati ma ben anche nel procedimento dimostrativo per cui l'A. può enunciare un discreto numero di proposizioni lasciando la dimostrazione alla cura dell' alunno, il quale non ha che da riprendere le dimostrazioni delle correlative proposizioni di planimetria e farvi quegli scambi di termini che sono indicati al principio del paragrafo. Ed è appunto per prepararsi il terreno a questo parallelo che l'A. ha dovuto nella dimostrazione di alcune proposizioni planimetriche contenute nei §§ 5, 6 del libro II apportare qualche innovazione che a prima vista potrebbe sembrare inutile. Mercè i paralleli ora notati il libro del Veronese viene a rispondere pienamente a quella parte delle istruzioni che accompagnano gli ultimi programmi di matematica per i Ginnasi e Licei, nella quale si raccomanda di mettere in rilievo le analogie che corrono fra enti e teorie diverse.

E ritornando alla definizione di eguaglianza tanto maggiormente apparisce la sua opportunità quando la si confronti con quella di similitudine, cosicchè immediatamente cade sott' occhio il legame che esiste fra la teoria delle figure eguali e quella delle figure simili. Ed è proprio curioso questo fenomeno che mentre da parecchio tempo in altri libri si fa uso del concetto di corrispondenza per trattare della similitudine senza che ciò abbia sollevato mai delle opposizioni, invece ad alcuni faccia quasi orrore il veder applicato lo stesso concetto nello svolgimento della teoria dell' eguaglianza. Noi in cambio di provare simili sgomenti continueremo ad osservare che il modo in cui viene svolta dall'A. la teoria delle figure eguali apporta una benefica influenza anche in quella della similitudine, permettendo di eliminare totalmente l' artificiosa distinzione di figure direttamente e inversamente simili; artificiosa perchè mentre si capisce p. e. la distinzione di figure omotetiche direttamente e inversamente, giacchè l' omotetia considera per natura sua la reciproca posizione di due figure, distinzioni di tal sorta non si comprendono nella teoria delle figure simili, essendo il concetto generale di simiglianza al pari di quello di eguaglianza, affatto indipendente dal concetto di orientazione.

Per quanto riguarda la teoria dei segmenti proporzionali e quella dell' equivalenza, la quale come la teoria della similitudine viene svolta contemporaneamente per le figure piane e per le solide, non si riscontrano nel presente libro sostanziali innovazioni. La teoria delle grandezze proporzionali (§ 2 del libro V) è svolta con sufficiente semplicità e brevità, cosicchè riesce accessibile alla scolaresca una volta che si siano ben chiariti i concetti e dati senza dimostrazione i teoremi del § 1 (grandezze omogenee). Ed a proposito di questo § 1 osserverò che secondo la def. I della pag. 108 risulta che per poter decidere se un dato sistema di grandezze sia lineare omogeneo occorre aver definito che cosa debbasi intendere per somma di due e perciò di più grandezze del sistema, non resta quindi giustificata la successiva def. II. Di più da quanto si trova esposto nel testo anteriormente al libro V risulta la possibilità di porre la corrispondenza di cui si parla nell' anzidetta def. I per il caso delle figure poligonali e poliedriche (pag. 88 e 102), ma non per gli archi, gli angoli ecc., i quali costituiscono parimenti sistemi lineari omogenei di cui pur si parla p. e. nel teor. III della pag. 118. Però, come già osserva l' A. nella nota XXIX dell' « Appendice agli elementi di geometria » (1898), si può dare la definizione del sistema lineare omogeneo indipendentemente dalla retta, e con ciò resta subito eliminato l'accennato inconveniente, giacchè allora le dimostrazioni che nel libro son fatte rappresentando i sistemi lineari di grandezze col sistema dei segmenti (cfr. p. e. teor. IV pag. 111, teor. VI pag. 114) sono senz' altro estensibili a tutte le classi di grandezze geometriche.

Osserviamo ancora che ben a proposito è stata intercalata nel § 4 del libro III una nota in virtù della quale è lasciata libera scelta all'insegnante nel trattare delle rette e piani paralleli nello spazio di seguire il metodo comune contenuto nel testo o quello degli elementi all'infinito contenuto nella nota. E degna d'attenzione è pure la nota che chiude il libro III nella quale è svolto con chiarezza e indipendentemente da qualsiasi empirismo l'argomento dei versi delle figure, e vien fatto scaturire il concetto di movimento geometrico da nozioni geometriche.

. È pure da notarsi che il libro del Veronese anche per la distribuzione della materia risponde pienamente agli ultimi programmi per i Ginnasi e Licei, come pure si presta meglio che altri a dar corso a quella parte delle istruzioni nella quale si raccomanda che il professore della terza classe liceale richiami brevemente l'attenzione degli alunni sulla natura e sull'ufficio di alcune proposizioni fondamentali e sul nesso delle proposizioni che appartengono ad una medesima teoria.

Nel chiudere questo resoconto mi compiaccio di dichiarare che l'esperienza fatta per parecchi anni mi rende sicuro di poter affermare che il metodo seguito dall'A. non incontra ad esser appreso dai nostri alunni difficoltà maggiori di quelle incontrate dai metodi comuni, e che esso di gran lunga meglio di questi si presta ad educar la mente dei giovani a quell'ampiezza di vedute il cui conseguimento ha da costituire una delle principali mete alle quali deve aspirare l'insegnamento della geometria.

Torino, luglio 1902.

FRANCESCO PALATINI.

Etudes de géométrie analytique non-euclidienne — par M. BARBARIN, professeur de Mathématiques supérieures au Lycée de Bordeaux. Bruxelles, Hayez, 1900, p. 167. — Estratto dal LX volume dei « *Mémoires couronnés et autres Mémoires* » pubblicati dalla R. Accademia del Belgio - 1900.

Dato che la geometria proiettiva è indipendente da qualunque concetto metrico e che le metriche proiettive di Cayley interpretano nello spazio proiettivo completo i sistemi di Lobatschefskij e di Riemann, le proprietà grafiche delle linee e superficie del II.° ordine debbono ritenersi conosciute anche negli spazii non-euclidei. Non altrettanto può dirsi delle loro proprietà metriche: esse forniscono la materia per uno speciale capitolo di geometria non euclidea.

Relativamente alle coniche le prime ricerche d'indole metrica risalgono al Battaglini, allo Story, al D'Ovidio; relativamente alle quadriche al Clifford, al Klein, al Darboux, al Bianchi. La letteratura dell' argomento mancava però d' un' opera che, in parte riassumendo e completando le generalità contenute nelle precedenti ricerche ed in parte svolgendo questioni non anche trattate desse un sistematico sviluppo alle proprietà metriche delle linee e superficie di II.° ordine, negli spazii di curvatura costante. L'opera del signor Barbarin, di cui vogliamo dare un rapido cenno, mira appunto a un tale fine.

Essa è divisa in sei capitoli, di cui tre sono ausiliarii.

Il I.° tratta del quadrilatero trirettangolo, che l' A. utilizza per le costruzioni fondamentali sul piano di Lobatschefskij ed in particolar modo per la costruzione approssimata del parametro del piano.

Il secondo cap. è dedicato ai principii di geometrica analitica sul piano. I sistemi di coordinate che l' A. introduce sono il polare, il lineare, il trilineare, ma usa di preferenza le coordinate rettangolari, caso particolare del secondo sistema, le cui variabili x, y, z sono legate dalla relazione

$$\varepsilon (x^2 + y^2) + z^2 \equiv 1,$$

dove $\varepsilon \equiv \pm 1$ a seconda che si tratta del sistema riemanniano o di quello di Lobatschefskij.

Il III.° cap. si riferisce alle linee di second' ordine.

Dopo aver brevemente assegnata l'equazione della tangente, della polare l' A. passa alla determinazione dei centri, degli assi di dette linee ed alla loro classificazione, separatamente considerando i due piani non euclidei.

Sul piano di Riemann si presenta una sola classe di curve, dotate di tre centri, tre assi reali ed appartenenti al genere ellisse.

Sul piano di Lobatschefskij si presentano invece tre classi, caratterizzate la prima da un centro e due assi, la seconda da un asse e dalla mancanza di centro, la terza da un asse ed un centro all' infinito. Le coniche di queste tre classi appartengono poi a varii generi: ai generi ellisse, iperbole, parabola dell' ordinaria metrica ed ai generi *ciclo* ed *oriconica*, che caratterizzano il piano di Lobatschefskij. Al genere ciclo appartengono gli *ipercicli* (linee equidistanti), al genere oriconica gli *oricicli* (curve limiti di Lobatschefkij).

All' accennata classificazione fanno seguito la soluzione di alcuni problemi metrici sulle linee del secondo ordine, un rapido cenno delle loro proprietà grafiche e metriche ed in fine lo studio diretto delle sezioni piane dei coni a mezzo della figura di Dandelin. Nello stesso capitolo troviamo pure considerate le coniche sferiche, orisferiche, ipersferiche e le sezioni piane del canale di rivoluzione (luogo dei punti equidistanti da un asse). Le proprietà delle coniche sferiche, orisferiche, ipersferiche fanno riscontro a quelle delle coniche tracciate rispettivamente sui piani di Riemann, d'Euclide, di Lobatschefskij.

I capitoli IV.°, V.° sono dedicati alla geometria analitica dello spazio e precisamente il IV.° all' introduzione delle coordinate lineari ed alla risoluzione dei problemi fondamentali, il V.° alle quadriche, relativamente alle quali l'A. determina il piano tangente, il piano polare, i centri, i piani principali e considerando separatamente il caso riemanniano ed il caso di Lobatschefskij stabilisce una classificazione delle sup. del secondo ordine.

Nello spazio di Riemann egli trova una sola classe di quadriche e due generi: ellissoide ed iperboloide rigato; in quello di Lobatschefskij invece tre classi ed i generi ellisoide, iperboloide, paraboloide, più il nuovo genere caratteristico: *oriquadrica*, al quale, come caso particolare, appartiene l'*orisfera* o superficie limite. Alla classificazione seguono alcune proprietà dell'ellisoide e la notevole determinazione dei fuochi e sezioni circolari delle quadriche.

Il VI.° ed ultimo capitolo è dedicato allo studio delle superficie tubulari e delle pseudosfere di rotazione.

Le sup. tubulari rientrano nella famiglia delle pseudosfere di rotazione in quanto la loro curva meridiana è una particolare trattrice.

È da questa osservazione che l'A. prende le mosse per lo studio della trattrice non-euclidea, di cui determina i varii tipi e le corrispondenti pseudosfere. In seguito dimostra che le pseudosfere di rotazione sono superficie a curvatura costante e deduce che la geometria sulle superficie canali, in regioni convenientemente limitate, è identica a quella di una regione piana euclidea e che la geometria della psudosfera generica, in regioni limitate di essa, si identifica con quella d'una porzione di piano di Lobatschefskij. Termina poi assegnando la misura del solido limitato dalla pseudosfera di rotazione e da due piani perpendicolari all'asse di rotazione.

Per chi segue i progressi della Geometria non-euclidea il rapido cenno che porgiamo dell'opera del Sig. Barbarin mostra come alcuni risultati fossero noti (ad es. le proprietà grafiche, le focali delle coniche, la geometria sulle superficie tubulari); non di meno, per la loro sistematica trattazione e coordinamento ai risultati originali essi trovano, e con vantaggio, posto negli *Etudes de géométrie analytique non-euclidienne*.

Pavia, Febbraio 1902.

ROBERTO BONOLA.

H. G. ZEUTHEN. *Histoire des mathématiques dans l'Antiquité et le Moyen-Age. Édition française, revue et corrigée par l'auteur, traduite par* JEAN MASCART. Paris, Gauthier-Villars, 1902, 8.°, p. XV+266 [Prezzo 9 fr.].

In due modi differenti si possono intendere le ricerche sulla scienza delle età che furono. Si può, infatti, proporsi di seguire accuratamente, colle opere esistenti alla mano, l'apparire e lo svolgersi delle varie idee direttrici, tenendo conto delle vicende che attraversarono i più eminenti pensatori, nell'intento di scoprire dove essi possono avere trovato lo stimolo o l'ispirazione alle loro indagini, od eventualmente incontrati i germi delle scoperte che ad essi attribuisconsi; è questo il còmpito preciso dello storico nello stretto senso della parola, il quale, nell'adempierlo, arriva a distinguere nettamente le questioni storiche esaurite da quelle che attendono dall'avvenire una soluzione definitiva. Ma si può anche prescindere in gran parte dagli uomini e tessere la storia delle idee, notandone le scaturigini e seguendone il corso, spingendosi poi sino a colmare le lacune esistenti nell'insieme dei materiali esistenti, col ricostruire, quasi divinando, il processo logico che presumibilmente avranno seguito i nostri progenitori scientifici. Il primo di siffatti modi di procedere si accosta (pure restandone a considerevole distanza) a quello seguito dai bibliografi, esige di regola un'erudizione svariata e copiosa, e mena di consueto a conclusioni da nessuno combattute e da molti sfruttate. Il secondo, invece, si può ritenere modellato su quello caratteristico dello scienziato procedente alla ricerca di nuovi veri. Se del primo indirizzo è oggidì maestro insuperato M. Cantor, del secondo il più eminente rappresentante è H. G. Zeuthen, il sommo discepolo di Chasles, del quale i nostri lettori ricorderanno la geniale opera sulle *Sezioni coniche nell'antichità*.

Ed in tale situazione egli si riaffermò nelle *Lezioni* che, pubblicate nel 1893 in danese, ebbero ben tosto (1896) l'onore di una versione tedesca e che ora, tradotte in francese, sembrano destinate a diffondersi nelle biblioteche e nelle scuole italiane; su questa traduzione, che viene ad esaudire un nostro antico desiderio, intendiamo con le presenti linee attirare l'attenzione degli insegnanti e degli studiosi in genere.

Nelle sue *Lezioni sulla storia delle matematiche antiche e medievali* lo Zeuthen si è proposto di esporre quel tanto di storia delle matematiche elementari che, a suo avviso, importa conoscano i professori e gli studenti; cioè, non tanto di far conoscere i più minuti particolari biografici e storici, non già chi per primo abbia scoperto una proposizione od usato un procedimento, ma sibbene le forme primitive sotto cui apparvero le varie verità ed i diversi metodi, nonchè le applicazioni che ne vennero fatte vuoi in origine, vuoi in processo di tempo. Ne risultò un'opera improntata ad indiscutibile originalità e di indole più matematica che storica; infatti essa è, in ultima analisi, uno studio approfondito dei grandi geometri antichi, fatto, meno nell'intento di determinare quello che sapeva un certo scienziato, una certa generazione od un certo popolo, che di porre allo scoperto le intime recondite ragioni per cui i teoremi e le dimostrazioni dovevano, quasi per necessità fatale, presentarsi nella forma in cui li incontriamo. La genialità di tali indagini è di per sè evidente ed il valore dei risultati a cui esse guidarono verrà riconosciuto da tutti, non esclusi coloro che fossero titubanti o recalcitranti ad inserirli nel catalogo dei fatti aquisiti dalla storia delle matematiche. La preponderanza dell'elemento sostanziale sull'elemento storico-cronologico (preponderanza a cui si deve se nelle *Lezioni* dello Zeuthen, ad alcune importantissime questioni non viene accordato tutto lo spazio che meriterebbero) è visibile dalla semplice ispezione dell'*Indice* che qui riferiamo:

Introduzione. — 1. Matematica preistorica - 2. Egiziani e Babilonesi.

Le matematiche greche. — 1. Sguardo storico - 2. Matematica dei Pitagorici - 3. Aritmetica geometrica - 4. Algebra geometrica - 5. Equazioni quadratiche numeriche; estrazione della radice quadrata - 6. L'infinito - 7. La quadratura del circolo - 8. La trisezione dell'angolo; inserzioni - 9. Duplicazione del cubo - 10. Teoremi e problemi; significato e portata della costruzione geometrica - 11. Metodo analitico; forme di esposizione analitica e sintetica - 12. Gli *Elementi*; metodi analitici ausiliari - 13. Sguardo agli *Elementi* di Euclide; sistema sintetico - 14. Ipotesi geometriche di Euclide - 15. Nota sopra le ipotesi della Geometria - 16. La teoria generale delle proporzioni, i libri V e VI di Euclide - 17. Grandezze commensurabili e loro trattamento numerico; i libri VII e IX di Euclide - 18. Grandezze incommensurabili; il libro X di Euclide - 19. Elementi della stereometria; poliedri regolari; i libri XI e XIII di Euclide - 20. Dimostrazioni per esaustione; il libro XII di Euclide - 21. Determinazioni infinitesimali in Archimede - 22. Teoria dell'equilibrio, secondo Archimede - 23. La teoria delle sezioni coniche prima di Apollonio - 24. Le sezioni coniche di Apollonio - 25. Luoghi e problemi solidi - 26. Geometria calcolatrice - 27. Geometria sferica - 28. Decadenza della geometria greca. - 29. Aritmetica greca più recente: Diofanto.

Le matematiche indiane. — 1. Sguardo rapido - 2. Nomi e segni pei numeri; numerazione prima degli Indiani e presso di essi - 3. Usi del calcolo numerico - 4. Algebra e teoria dei numeri; geometria.

Il Medio Evo. — 1. Introduzione generale - 2. L'aritmetica e l'algebra degli Arabi - 3. La trigonometria degli Arabi - 4. Primo risveglio delle matematiche in Europa.

Il lettore dell'opera che annunziamo scorgerà facilmente la singolare abilità posseduta dallo Zeuthen nello scoprire i legami che uniscono ricerche che a prima vista sembrano disgiunte ed apprenderà con vivo soddisfacimento intellettuale le osservazioni ingegnose e brillanti che costituiscono un vero commento storico-critico all'antica geometria, ed in ispecie a gli *Elementi* di Euclide e le *Coniche* di Apollonio. Se non sempre egli sarà messo in grado di misurare l'elemento ipotetico esistente nelle argomentazioni dello Zeuthen, sarà per compenso condotto a penetrare nell'intimo pensiero degli antichi geometri: e le sobrie, ma importanti, note, di cui P. Tannery corredò la traduzione francese, gli forniranno un vital nutrimento bastante a compensarlo dell'ignoranza di certi documenti recentissimi, di cui lo Zeuthen non tenne sufficiente conto.

Malgrado alcune piccole mende, l'opera dello Zeuthen è destinata a ottenere, grazie a questa nuova traduzione, una maggior copia di estimatori e una influenzà più vasta; e sarà accolta con vivo piacere da tutti i lettori di essa la notizia, che siamo in grado di dare, che ben presto un nuovo volume verrà a completarla, narrandoci il periodo scientifico che guidò alla scoperta del calcolo infinitesimale. A tessere la storia di questo fortunoso periodo storico lo Zeuthen si è mostrato già mirabilmente preparato mediante alcuni saggi sopra Fermat, Barrow ed i loro contemporanei; onde è certo che il volume venturo non sarà inferiore a quello di cui oggi ci siamo occupati.

G. L.

KARL FRIEDRICH GAUSS. *General Investigations of Curved Surfaces of* 1827 *and* 1825. Translated with notes and a bibliography by James Caddall Morehead and Adam Miller Hiltebeitel. The Princeton University Library, 1902, 4.º, p. VIII + 127. [Prezzo $ 1.75].

In una splendida edizione, di soli 500 esemplari, appare la prima traduzione inglese delle classiche memorie di Gauss sulla teoria delle superficie. La cura ed il lusso dell'edizione fanno sì che la vendita del libro non compenserà che in parte le spese, sopportate dalla Princeton Library Publishing Association e dagli alunni dell'Università, fondatori del *Seminario matematico*.

È un altro fatto che va ad aggiungersi a quelli ogni giorno più numerosi che mostrano come nell'America del Nord la scienza pura sta per essere accolta con tutta quella liberalità che le è condizione necessaria per germogliare e fiorire.

Non è oramai difficile profezia il prevedere che nel secolo XX è destinato agli Stati Uniti un posto per lo meno eguale, se non superiore a quello che nella storia della matematica hanno occupato finora le nazioni d'Europa. E tanto più facile è questa previsione quando si pensi alla cura con cui gli americani stanno ponendo le solide basi su cui si sviluppa la loro produzione scientifica, colla creazione cioè di meravigliose biblioteche, di Università grandiose, e sopratutto col continuo lavorio per risalire alle fonti del progresso scientifico odierno.

È un volgare pregiudizio, pur troppo ancora diffuso, che la matematica, a differenza delle altre scienze, non abbia classici. Si dice spesso che gli ultimi trattati usciti completano e collegano tutte le verità contenute negli autori antichi; se ne trascura quindi dai più lo studio, giudicandolo una oziosa curiosità di bibliofili o di bibliomani.

Eppure se vi è una scienza in cui gli autori antichi *non invecchiano,* questa è proprio la matematica. Le opere dei classici, da Euclide, Archimede fino a Newton, Eulero, Gauss sono monumenti artistici di così compiuta bellezza che ogni rimaneggiamento, ogni perfezionamento è spesso una profanazione ed un peggioramento.

Il continuo, assiduo contatto coi classici è condizione necessaria alla creazione di nuovi capolavori non solo, ma anche l'unica guida sicura di chi voglia addentrarsi con qualche frutto nelle più elevate regioni della scienza. Ed il giudizio di G. Darboux, riportato nell'introduzione, scritta dal signor H. D. Thompson, che cioè lo studio di questa memoria di Gauss è la più completa ed utile introduzione allo studio della geometria infinitesimale, può generalmente ripetersi per le altre parti delle scienze matematiche.

Ecco ora alcune notizie relative all'edizione. I traduttori hanno cercato nella forma e nella punteggiatura delle formole di staccarsi dalle edizioni originali. Hanno però adottato la notazione $\cos^2\varphi$ invece di quella di Gauss $\cos\varphi^2$. È utile notare che le due notazioni sono egualmente diffuse al giorno d'oggi e che di più la prima è stata con ragione criticata da molti, e dallo stesso Gauss. Egli (Werke, t. 4, p. 361) approvando la stessa opinione sostenuta da Herschel (Phil. Trans. 1813) dice che ciò che egli « *über die Bezeichnung* $\cos^2 A$ *sagt,* « *welches einige neuere mathematische Schriftsteller für das Quadrat* « *von* $\cos A$, *ganz gegen alle Analogien gebrauchen, da es dieser* « *zufolge den Cosinus eines Bogens* $= \cos A$ *bedeuten sollte, hat* « *ganz unsern Beifall* ».

Un'analoga osservazione si può fare per la sostituzione del simbolo ∂ al simbolo d di Gauss, per indicare le derivate parziali.

Anche questa notazione, come la precedente, sebbene recente, non ha ancora ricevuto l'unanime consenso degli studiosi. Anzi è stata oggetto di recentissime e fondate critiche. (Si veda per es. Form. de

Math. publ. par G. Peano, Turin 1902, pag. 169; Poincaré, La notat. differ. Enseignement Mathématique, 1899, t. 1, p. 108).

Sembra quindi conveniente nel pubblicare le opere dei classici rispettare rigorosamente le loro notazioni. Di un difetto dello stesso genere pecca l'edizione francese delle opere di Lagrange: i suoi editori hanno scritto $f(x)$ dovunque Lagrange scriveva fx. La notazione di Lagrange, di Eulero è molto più razionale della *moderna* (perchè per essere coerenti, se si vuol scrivere $f(x)$ converrebbe poi scrivere anche $f((x+h))\ldots.)$: e la nuova notazione non è neppure sempre osservata. Così nessuno scrive $\sin(x)$, $\cos(x)$, ma tutti, $\sin x$, $\cos x$, e secondo le opportune osservazioni di Weierstrass, si indica un valore della sua funzione con px, e non con $p(x)$.

Le note di cui l'edizione è corredata sono diligentissime: gli editori oltre ad aver profittato di tutte quelle dell'edizione tedesca del Wangerin ne hanno aggiunte molte originali, corredandole con figure che facilitano l'interpretazione delle formole.

La bibliografia che chiude il volume contiene 343 titoli. Gli autori hanno inteso limitarla alle opere ed alle memorie in cui si adoperano i metodi di Gauss e che trattano in generale od in particolare i soggètti seguenti: coordinate curvilinee, linee geodetiche ed isometriche, curvatura delle superficie, deformazione delle superficie, sistemi ortogonali, e la teoria generale delle superficie. Molti lavori che escono da questi limiti sono stati aggiunti a causa della loro importanza e del loro interesse storico.

L'elenco è accurato: noto soltanto un « Briochi » per « Brioschi » a pag. 118.

Mi sembra però che vi siano lacune notevoli. Cito ad esempio:

Cesàro. *Lezioni di geometria intrinseca*, Napoli 1896.

Hamilton. *Elements of Quaternions*, di cui è uscita recentemente la seconda edizione inglese.

Burali-Forti. *L'introduction à la géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann*, Paris 1897.

Cito questi autori a preferenza di altri perchè mi sembra che i loro metodi siano proprio un naturale proseguimento di quelli di Gauss, tanto che si è potuto recentemente dubitare che forse a Gauss stesso si debbano le prime idee del calcolo geometrico.

Termino rilevando come la ricchezza della bibliografia qui data, finisca per essere di poco giovamento agli studiosi, sopratutto ai giovani: sarebbe forse desiderabile con opportune indicazioni richiamare l'attenzione sui lavori più importanti, e con qualche nota dare un'idea del contenuto dei rimanenti.

Torino, 4 Luglio 1902.

G. Vacca.

W. B. Frankland. *The story of Euclid. With Illustrations.* London, Newnes 1902, 16.°, p. 176 [Prezzo del Vol. legato 1 scellino].

In un paese, come l'Inghilterra, in cui l'insegnamento geometrico, malgrado accaniti oppositori, ha sempre un'impronta spiccatamente euclidea è a credersi che un libro che porti il titolo di « storia di Euclide » racchiuda in realtà una « storia della geometria elementare ». E tale è infatti il contenuto del nuovo volume che annunciamo della collezione intitolato *The Librairy of useful Stories.* Per dare una idea del piano di esso, nulla di meglio che il riferirne qui i titoli dei singoli suoi capitoli, accompagnati da brevi spiegazioni.

I. *Introduzione.*
II. *La geometria dalla nascita alla sua giovinezza* (cioè sguardo alla geometria pre-euclidea).
III. *Il padre della geometria* (Talete).
IV. *Il maestro e la confraternita* (Pitagora e la sua Scuola).
V. *Geometri illustri* (Ippocrate, Archita, Platone, Eudosso).
VI. *Euclide l'immortale.*
VII. *La forma degli « Elementi ».*
VIII. *La sostanza degli « Elementi ».*
IX. *Il sommo geometra* (Archimede).
X. *I tre eterni problemi* (Quadratura del cerchio, Problema di Delo, Trisezione dell'angolo).
XI. *L'ultimo dei Greci* (Proclo).
XII. *Le età oscure* (Medio Evo).
XIII. *Le più antiche edizioni di Euclide.*
XIV. *La novella aurora* (1600-1800).
XV-XVI. *Un secolo di luce* (Gauss, Lobatschewsky, Bolyai, Riemann).

L'A. ha attinto alle migliori fonti; perciò le informazioni che egli porge sono in generale degnissime di fede; egli poi si è sforzato di presentarle sotto la forma più attraente e vi è riuscito; e l'editore lo ha secondato col dare al volumetto in discorso l'aspetto più seducente. Onde il modesto lavoro da lui compiuto congiunge l'utile al dilettevole, e sarebbe da augurarsi che in Italia, ove pure Euclide domina sempre come sovrano, ne possedesse uno analogo; è questo il migliore elogio che se ne possa fare. G. L.

Pietro Rigobon. *Studi antichi e moderni intorno alla tecnica dei commerci.* Bari, tip. Avellino, 1902, 8.°, p. 38.

È il discorso inaugurale dell'anno accademico 1901-1902 della Scuola Superiore di Commercio di Bari. Credo utile richiamare l'attenzione degli studiosi della storia delle matematiche su questo opuscolo, trattando esso un argomento generalmente poco curato, l'applicazione della matematica al commercio.

L'aritmetica mercantile è una scienza in gran parte italiana. Nel *Liber abaci* di Leonardo Pisano si trovano già trattate interessanti questioni di cambi: ma è sopratutto ai due grandi italiani Luca Paciolo e Nicolò Tartaglia che si deve l'applicazione sistematica dell'aritmetica al commercio.

Ed attorno a questi grandi il prof. Rigobon ci fa conoscere una folla di umili lavoratori sconosciuti o quasi nella storia delle matematiche (alcuni forse a torto), ma benemeriti per l'influenza da essi esercitata sui loro contemporanei.

Lo scritto del prof. Rigobon appare quindi una nuova fonte da cui sarà forse possibile attingere notizie che oggi possono interessarci maggiormente quando si ponga mente alle moderne tendenze della matematica pura, poichè essa, dopo un periodo di allontanamento, sembra senta il vivo desiderio di avvicinarsi alle applicazioni alla industria ed al commercio, per poter poi assurgere a nuove e più elevate speculazioni.

E che questo nuovo contatto debba essere fecondo non potrà dubitare chi pensi quanti incoraggiamenti i mercanti fiorentini e veneti abbiano dato ai nostri matematici del secolo XV, e a chi osservi che i primi inizi della matematica inglese sono segnati degnamente dai libri di Recorde, il quale per molti secoli ebbe fama e fu studiato e diffuso dai negozianti inglesi.

G. Vacca.

J. Molk et J. Tannery. *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques.* T. IV. *Calcul intégral* (II *Partie*). *Applications.* Paris, Gauthier-Villars, 1902, 8.º, p. IX + 303 [Prezzo 9 fr.].

Riferendoci per quanto concerne la disposizione della materia ed il metodo seguito in quest'opera a quanto scrivemmo quando ne apparve il III vol. (v. *Bollettino*, II, 1899, p. 100-101), indicheremo che cosa contenga l'ultima parte di essa.

Nella prima metà di essa gli autori esauriscono lo studio dell'« inversione », trattando a fondo e con molti particolari degli integrali della forma $\int \frac{dz}{f(z)}$, f essendo una funzione biquadratica di z; come epilogo di questa parte, anzi di tutta la sezione che si riferisce al calcolo integrale, si trova l'elenco completo delle formole stabilite, elenco che, assieme a quello concernente il calcolo differenziale posto in fine del II vol., costituisce un ottimo *vade-mecum* per chiunque intenda servirsi delle trascendenti ellittiche. (Sarebbe forse stato miglior consiglio il riunirne le due sezioni per costituirne un volumetto a parte, di più facile consultazione).

Nell' altra metà sono segnalate le più semplici applicazioni geometriche e meccaniche, aritmetiche ed algebriche che sinora trovarono le funzioni di cui si tratta: rettificazione dell'ellisse e della lemniscata, area dell' ellissoide, pendolo semplice e sferico, movimento d' un solido attorno ad un punto fisso, divisione dei periodi, trasformazione delle funzioni ellittiche, moltiplicazione complessa.

Seguono alcune note su certi punti speciali e finalmente un' importantissima lettera scritta dall' Hermite a J. Tannery il 24 Settembre 1900, ove è esposta l'unica dimostrazione che abbia data l' illustre geometra di alcune formole da lui enunciate nel 1858 nella sua memoria *Sur l'équation du cinquième degré*. Gli egregi autori non potevano trovare chiusa più degna all' eccellente opera di cui hanno arricchito la letteratura matematica contemporanea.

G. L.

M. DE MONTCHEUIL. *Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Toulouse pour obtenir le degré de Docteur-ès-Sciences mathématiques.* 1re Thèse: Sur une classe de surfaces. - 2.e Thèse: Propositions données par la Faculté. -- Paris, Gauthier-Villars, 1902. 4.º, p. 79.

Le superficie studiate in questo lavoro sono definite analiticamente dall' essere integrali dell' equazione a derivate parziali

$$\frac{d^4 \xi}{du^2 \,.\, du_1^2} = 0,$$

ove ξ, u_1 u_1 sono le note coordinate di Bonnet (cfr. Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, T. I, p. 243). Fra tali superficie se ne trovano di note; ad es.: le superficie d' area minima, le superficie a sviluppata media piana, le superficie rigate immaginarie di Monge e in particolare le rigate di Serret. Appunto questa circostanza ha condotto l' autore a scoprire una generazione comune e delle proprietà, che negli indicati casi speciali rientra in proposizioni conosciute. L' alternarsi continuo nel presente scritto di considerazioni geometriche e di applicazioni della teoria delle equazioni a derivate parziali rivela l' autore per un tardo discepolo di Monge e fornisce una nuova prova del continuarsi in Francia, grazie specialmente alla grande opera del Darboux, delle tradizioni scientifiche che hanno le loro scaturigini nell'*Application de l'analyse à la Géométrie*.

G. L.

A. Capelli. *Elementi di aritmetica ragionata e di algebra ad uso dell' istruzione secondaria.* Napoli, B. Pellerano, 1902, 8.º, p. XI + 112 [Prezzo L. 1,80].

L' illustre Professore dell' Università di Napoli dà egli stesso con poche parole di prefazione le ragioni della pubblicazione, nella quale ha esposti ed ordinati per uso didattico i risultati degli studi fatti sui fondamenti dell'aritmetica e comunicati alla R. Accademia delle Scienze di Napoli (16 giugno 1900). Egli scrive: « Le ragioni che mi hanno indotto a presentare al pubblico questo primo saggio di un trattato di aritmetica razionale e di algebra elementare ad uso dell' istruzione secondaria, possono facilmente rintracciarsi nelle mie recentissime pubblicazioni: *Sull'ordine di precedenza fra le operazioni fondamentali dell'aritmetica* e *Sulla genesi combinatoria dell'aritmetica* » (Giornale di Matematiche, Vol. XXXIX, 1901). Perciò più che al libro di testo darò un rapido sguardo alle due note ricordate.

In questi ultimi anni molto si è fatto per stabilire in modo rigoroso e generale i fondamenti della matematica: ma l' opera dei più dotti scienziati (e dico *dei più dotti*, perchè gli studi necessari a così alto compito richiedono cognizioni assai vaste nel campo matematico e forte ingegno) fu necessariamente rivolta all' analisi infinitesimale, alla geometria proiettiva ed elementare; ben di rado all' aritmetica, ove si eccettui quella parte che è intimamente legata ai concetti di limite e di infinitesimo. E poichè ben poco, bisogna pur dirlo, si è fatto nel campo dell' aritmetica primitiva, dirò così, cioè delle operazioni fondamentali, ha fatto bene, molto bene l' illustre Professore a darci uno studio accurato e nuovo sui fondamenti di essa ed a mostrarne le applicazioni allo svolgimento dei programmi di aritmetica razionale, perchè era ed è vivamente sentito il bisogno di fondamenti rigorosi anche nell' aritmetica pratica, tanto importante, benchè elementare, maltrattata in molte scuole e da molti insegnanti e purtroppo dimenticata fino ad ora, così che per sola consuetudine, quasi passivamente e senza discussione, si sono accettati quei principi direttivi che la tradizione ha imposto.

Dall' esame di numerosi trattati di aritmetica pratica e razionale, per non dire di tutti, l' ordine seguito nel trattare le operazioni fondamentali è: *addizione, sottrazione, moltiplicazione, e divisione*, che viene spesso sostituito dall'altro: *addizione, moltiplicazione, divisione e sottrazione*, quando si tratti di aritmetica razionale e di algebra, od anche, un po' più raramente, *addizione, moltiplicazione, sottrazione e divisione*, quando alla introduzione dei numeri frazionari si faccia precedere quella dei numeri negativi. Il Prof. Capelli si è posto perciò la questione: è necessario che il primo posto sia dato all' addizione?

È possibile che esso venga assegnato alla moltiplicazione, benchè nessun trattatista abbia finora adottato l'ordine che ne deriva? Tale questione è risolta appunto nel 2.º paragrafo della prima memoria.

Scegliendo quale criterio direttivo nello studio della questione l'ampliamento apportato nel campo dei numeri da ogni operazione, come conseguenza necessaria della sua stessa introduzione, ed esaminando unicamente dal lato scientifico gli ordinamenti possibili, i tre *vecchi* ed i tre *nuovi:*

moltiplicazione	moltiplicazione	moltiplicazione
divisione	addizione	addizione
addizione	divisione	sottrazione
sottrazione	sottrazione	divisione

l'A. viene ad escludere in via assoluta i tre primi, dando la preferenza al 3.º dei tre nuovi, che chiama *ordinamento algebrico* ed esponendo quali vantaggi, dal punto di vista didattico, l'ordinamento preferito abbia sugli altri fino ad ora usati nell'aritmetica.

Lo studio del chiaro Professore può dirsi il trionfo della matematica combinatoria che, quasi dimenticata per tanto tempo, risorge ora e sempre più a vita rigogliosa, specialmente nell'alta algebra e in molte parti dell'analisi più elevata. Infatti il nuovo indirizzo che ne deriva per lo studio dell'aritmetica, sia sistematico, sia didattico, ha per fondamento la precedenza della moltiplicazione sull'addizione, dovuta principalmente alla definizione puramente combinatoria della moltiplicazione, per cui essa è affatto indipendente da quella di addizione; con ciò si evitano l'inconveniente di quella specie di discontinuità di metodo che si ha tra l'esposizione dell'aritmetica e quella dell'algebra e la maggior difficoltà che gli allievi incontrano nei vari problemi combinatori, non avendo avuto la necessaria preparazione iniziale e graduale.

Perciò il Capelli ha dimostrato nella seconda memoria, e molto meglio negli *Elementi*, nei quali ha potuto dare ai suoi concetti maggiore estensione di esposizione e di applicazione, che non s'incontrano difficoltà a trattare le teorie fondamentali dell'aritmetica secondo la genesi combinatoria e dando la preferenza alla moltiplicazione.

Mentre consento coll'egregio A. che ciò possa convenire, con sensibile vantaggio, per l'aritmetica razionale, mi permetta di affermare che giudico questo metodo nè opportuno, nè consigliabile nell'insegnamento dell'aritmetica pratica, sul che egli stesso in buona parte conviene.

Da quanto precede si comprende come gli *Elementi* pubblicati siano densi di novità e di rigore, così che ne risulta gradito lo studio; ben pochi appunti vi si potrebbero fare ed anche di importanza minima.

Molto opportuni e veramente geniali sono gli esercizi di applicazione alla geometria; buone le innovazioni nella terminologia (numero naturale, enumerare, dividente, ecc.); eleganti le risoluzioni delle equazioni: $ax=by+c$ e $ax=by+c$ (pag. 91-96) col metodo del massimo divisore comune, e della equazione pitagorica: $x^2+y^2=z^2$, per la quale l'A. dà i tipi dei sistemi di numeri x, y e z, primi tra loro, che la soddisfanno (pag. 109-111).

U. CERETTI

Höhere Analysis für Ingenieure von J. PERRY, *autorisirte deutsche Bearbeitung von* R. FRICKE *und* F. SÜCHTING. — Leipzig und Berlin, Teubner, 1902. X-423, p. 8.º [legato M. 12].

Che cosa sia questo libro, è difficilissimo dirlo. Non è un'esposizione teorica del Calcolo infinitesimale, perchè vi mancano l'ordine ed il rigore, — non una raccolta di esercizi, perchè vi è trattata anche la teoria, — meno ancora un corso di applicazioni del Calcolo alla scienza dell'ingegnere. Altrettanto difficile è dire a quale classe di lettori il libro sia destinato: non ai principianti, perchè alcuni punti fondamentali del Calcolo vi sono appena adombrati, — non ai provetti, perchè teoremi tra i più semplici vi si trovano dimostrati esattamente. Malgrado questa indecisione di contorni e di scopo, il libro presenta una lettura delle più attraenti, e chi specialmente non è nuovo allo studio del Calcolo prova un vero e grande diletto nello scorrerne le pagine. Forse ciò è dovuto, oltre che alla disposizione originale della materia, al tono che assume l'autore, pur troppo raro nei libri di scienza, tutto confidenziale e discorsivo. Non è un maestro grave e solenne che abbiamo dinanzi a noi, il quale ci si imponga colla sua autorità; è un amico che, mentre, conversando con noi, ci istruisce sui più vari soggetti, ci dà tratto tratto consigli pratici ed utili suggerimenti, e non crede di abbassarsi entrando in particolari che taluno giudicherebbe - a torto - futili, come quando ci raccomanda di esercitarci nei calcoli approssimati e nell'uso delle tavole logaritmiche, o quando insiste sull'importanza di abituarci a vedere le stesse formole scritte con lettere differenti. Un insegnamento fatto a questo modo non può mancare di riuscire proficuo; e noi vorremmo che tutti quei tecnici, i quali, pure avendo forzatamente abbandonato gli studi teorici, non professano per essi un olimpico disprezzo, leggessero e studiassero questo libro, dove sono trattate tutte le principali applicazioni dell'analisi all'ingegneria.

Un'opera così ricca di materiale non può evidentemente riassumersi in poche linee: e noi ci limiteremo, a questo riguardo, a dire che l'autore ha preso come criterio ordinatore non già la *materia* ma l'*istrumento*, sicchè il primo capitolo contiene tutti i problemi che si riducono alla derivazione od alla integrazione di x^n, il secondo tutti quelli che dipendono da e^x o da sen x, il terzo ed ultimo quelli di natura meno semplice. I teoremi fondamentali del Calcolo compaiono qua e là, a seconda dell'occasione.

Ora — e questo ci riconduce all'osservazione fatta in principio — perchè insistere su tali teoremi? E sopra tutto, perchè darne le dimostrazioni? Chi non conosce il Calcolo non può apprenderlo in questo libro, su ciò sono d'accordo l'autore ed i traduttori; per chi lo conosce è più che sufficiente un semplice accenno agli enunciati. Ma v'ha di più; tutte le dimostrazioni sono fatte *all'antica*, cioè prive completamente di rigore. A giustificazione di ciò i traduttori dicono che nelle scuole politecniche l'insegnante può usare dimostrazioni non rigorose, purchè egli sappia che sono tali e sia in grado di dimostrare rigorosamente, per conto proprio, le sue asserzioni. Noi crediamo — e l'abbiamo ripetuto a sazietà in queste pagine (1) — che nulla sia più antiscientifico ed antididattico del presentare per generalmente vero ciò che lo è soltanto sotto certe condizioni, e che nessuna ragione di opportunità possa giustificare un tale peccato di lesa logica (2). Si limiti, se si vuole, per i tecnici lo svolgimento del Calcolo a quelle sole funzioni che presentano un interesse pratico, ciò che permetterà di adottare le dimostrazioni semplici dei vecchi trattati; ma sappiano gli allievi che quanto loro s'insegna cessa di valere quando non siano soddisfatte determinate condizioni. Nel libro di cui parliamo non solo ciò non è detto, ma par quasi l'autore si sforzi di sradicare dalla mente di chi legge anche il più lontano dubbio sulla validità incondizionata delle cose esposte. Così a p. 45 è scritto che *sempre* (in corsivo) l'ordine delle derivazioni è invertibile; a p. 166 ritorna il *sempre*, e questa volta in carattere grassetto, a proposito

(1) V. per es. *Boll.* 1898, pag. 99; 1902, p. 25.

(2) Vogliamo qui riferire alcune parole di J. Tannery (*Bull. des Sc. Math.* 1899, p. 8), che parebbero scritte pel caso attuale: « Il n'y a pas d'inconvénient à « donner à ces derniers » (agli studenti) « un enseignement incomplet, à leur « exposer une démonstration qui n'est pas rigoureuse, du moment qu'ils sont « avertis. C'est souvent le seul moyen de leur donner un instrument dont ils ont « besoin et dont ils peuvent se servir sans le connaitre parfaitement. Si l'on « excite ainsi leur curiosité et leur désir d'en savoir davantage, c'est tout béné- « fice. Le meilleur enseignement est, à coup sûr, celui qui éclaircit tout, mais « le pire est pour certes celui qui masque les difficultés et les imperfections des « démonstrations, puisqu'il risque de fausser, non seulement l'intelligence de « l'étudiant, mais le jugement même que ce dernier porte sur sa propre intelli- « gence; s'il croit avoir parfaitement compris une démonstration incomplète, « l'etudiant aura de sa valeur intellectuelle une opinion exagérée: pour celui « qui est vraiment intelligent et qui éprouvera, devant cette même démonstra- « tion, un trouble qu'il ne parvient à dissiper ni à s'expliquer, il en résulte « une dépression tout aussi fâcheuse ».

dell' esistenza dell' integrale d' un' equazione differenziale del primo ordine; a p. 164 il paragrafo in cui è stabilita l' espressione del differenziale totale porta il titolo di *dimostrazione generale*. E gli esempi potrebbero moltiplicarsi. Ora un errore è tanto più pericoloso, quanto più autorevole è la voce che lo bandisce; e appunto per la grande fiducia che ispira il nostro autore, anzi per la seduzione che egli esercita, chi legge è portato naturalmente ad accettare senza discussione per vere cose che non lo sono, e — ciò che è più grave — a prendere per sillogismi considerazioni mancanti di rigore logico.

Sarebbe pertanto a desiderarsi che un libro come questo, il quale insegna tante cose buone ed utili, non le intercalasse con nozioni false od inesatte. Questo potrebbe ottenersi con lievi mutamenti; basterebbe cioè sopprimere tutte le dimostrazioni dei teoremi di Calcolo, mantenendo soltanto un semplice accenno degli enunciati. Con ciò si raggiungerebbe anche un altro vantaggio: il libro acquisterebbe un carattere più uniforme e deciso, e resterebbe esclusivamente destinato — come non può non esserlo, di fatto, anche ora — a coloro che, avendo appreso il Calcolo infinitesimale, desiderano famigliarizzarsi colle sue applicazioni tecniche.

Se i traduttori, i quali si mostrano sinceramente convinti della necessità di una buona cultura teorica per l' ingegnere, adottassero una tale modificazione in un' edizione prossima, noi ci riterremo abbastanza compensati dell' ingrato ufficio assunto, di criticare un libro di valore riconosciuto, quale è quello che ci sta dinanzi.

G. VIVANTI.

E. BARDEY. *Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. Fünfte Auflage, bearbeitet von* F. PIETZKER. Leipzig, Teubner 1902. 8.°, p. XIII + 420 [Prezzo del Vol. legato Mk. 8].

Questa quinta edizione, che segue la prima a trentaquattr' anni di distanza, dimostra che nemmeno la morte dell' autore fece cessare il successo ben meritato che essa trovò in Germania tra professori e studenti. Chi scrive queste linee, che conosce il libro del Bardey sin da quando era studente delle scuole secondarie e che ricorda per quanto tempo esso (nella seconda edizione) rimase quale consigliere ed aiuto sul suo tavolo di lavoro, non può non lamentare che in Italia ben pochi la conoscano e l' apprezzino. Eppure nessun' altra opera può al pari di questa addestrare nella difficile arte (in cui è sommo maestro Diofanto) di trasformare e combinare le equazioni algebriche per risolverle colle sole nozioni offerte dall' analisi determinata di 1.° e 2.° grado. Una collezione di problemi sfugge ad un' analisi minuta e non ammette un riassunto; onde a noi è forza limitarci ad indicarne schematicamente il contenuto e l'ordinamento:

I. *Equazioni ad un' incognita.* — A. Equazioni quadratiche pure - B. Equazioni quadratiche miste di forma semplice - C. Equazioni di grado superiore (specialmente del 3.º), aventi ciascuna una radice agevolmente percepibile - D. Equazioni quadratiche più complicate, in particolare della forma $Ax^{2n} + Bx^n + C = 0$: equazioni di significato geometrico, ecc. - E. Equazioni del 4.º grado, che si possono risolvere mediante equazioni del 2º.

II. *Equazioni a due incognite.* — A. Equazioni omogenee semplici - B. Equazioni omogenee più complicate - C. Equazioni di forma speciale.

III. *Equazioni a tre e quattro incognite.* — A. Equazioni a tre incognite - B. Equazioni a quattro incognite.

Noteremo, finendo, che il sig. Pietzker, nel preparare, per incarico dell'editore, questa nuova edizione, lasciò intatto il piano generale dell'opera del Bardey, limitandosi a farvi qualche ritocco.

G. L.

P. Pizzetti. — *Lezioni sulla teoria meccanica della figura dei pianeti.* R. Università di Pisa. Anno 1901-1902, litogr. 8.º, p. 326 + 23 (Pisa, Spoerri).

Cap. I. Brevi preliminari sulla attrazione e sulla funzione potenziale di spazio.

Cap. II. Funzione potenziale di una sfera omogenea - Discontinuità delle derivate 2.ᵉ - Funzione potenziale di uno strato ellisoidico omotetico e di un solido ellisoidico omogeneo.

Cap. III. Definizione e proprietà delle superficie di equilibrio per un pianeta - La gravità.

Cap. IV. L'ellisoide come superficie di equilibrio di una massa fluida omogenea rotante.

Cap. V. Relazioni fra la forma di una superficie di equilibrio e il modo di variare della gravità; ricerche indipendenti da qualsiasi ipotesi sul modo di distribuzione della massa nell'interno - Ipotesi ellisoidica.

Cap. VI. Digressione intorno alle funzioni sferiche.

Cap. VII. Altre ricerche indipendenti da speciali ipotesi sul modo di distribuzione della massa nell'interno del pianeta - Formula di Stokes per le deviazioni del Geoide dall'Ellisoide.

Cap. VIII. Pianeti fluidi eterogenei - Caso in cui le superficie di egual densità sono ellisoidi poco differenti dalla sfera.

Cap. IX. Anello di Saturno.

Appendice. Cenni sulla determinazione di alcune costanti astronomiche.

NECROLOGIO

Emanuele Lazzaro Fuchs

Un nuovo lutto colpì di recente la scienza matematica in generale ed in ispecie l'Università di Berlino con la improvvisa e deplorata scomparsa di E. L. Fuchs.

Nato a Moschin, in Posnania, il 5 Maggio 1833, quattordicenne abbandonò la casa paterna per frequentare il Ginnasio-Liceo Federico-Guglielmo di Posen; e, mentre si dedicava con ardore ed ottimo successo agli studi, attendeva all'insegnamento privato, onde soccorrere i propri genitori: questa circostanza merita di essere rilevata perchè debbonsi ad essa le relazioni tra il Fuchs e la famiglia di Leo Königsberger, che è forse il più illustre dei discepoli diretti del compianto estinto.

In casa Königsberger il Fuchs rimase, in qualità di insegnante anche durante l'anno seguente il termine de' suoi studi secondari; e soltanto nell'anno 1854 si trasportò a Berlino per ascoltare le lezioni del Dirichlet, del Borchardt e poi del Weierstrass. Nel 1858 conseguì ivi il grado di dottore, in seguito alla presentazione di un lavoro sopra un tema posto a concorso da quella Facoltà filosofica.

Tacendo di alcuni posti secondari che egli occupò nell'insegnamento, ricorderemo avere egli insegnato nella « Friedrich-Werderschen Gewerbeschule »; ed è appunto nel « Programm » pubblicato nel 1865 da questo istituto che vide la luce la memoria *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten*, che prima valse a fissare sul Fuchs gli sguardi del mondo scientifico.

Nello stesso anno 1865 l'Università di Berlino gli conferì la libera docenza; quattro anni appresso fu chiamato a Greifswald in qualità di professore ordinario di quella Università, di dove passò poi successivamente nel 1874 a Gottinga, nel 1875 a Heidelberg e finalmente nel 1884 a Berlino, ove rimase sino al termine dell'operosa sua vita (26 Aprile 1902). Il Fuchs fu anche decano della Facoltà filosofica di Berlino e, dalla morte del Kronecker, dirigeva il giornale fondato da Crelle. Delle sue eminenti qualità didattiche sono testimoni viventi i molti egregi matematici che lo ebbero a maestro. Quanto alla sua attività scientifica, essa non si spense e nemmeno illanguidì con gli anni; basta a provarlo il fatto che di una sua importante memoria (*Über Grenzen, innerhalb deren gewisse bestimmte Integrale vorgeschriebene Vorzeichen behalten*) egli correggeva le bozze alla vigilia della sua morte (1).

Nella storia delle matematiche E. L. Fuchs occupa una posizione eminente per la teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti variabili della quale egli può dirsi il fondatore; per tal modo egli *arricchì di una nuova provincia il regno delle matematiche* (2); prerogativa questa che egli divide con pochi spiriti eletti.

G. L.

NOTIZIE

Alcune ricerche inedite di G. Bolyai, concernenti la geometria non-euclidea e recanti nuova luce sulla storia di questa disciplina, vennero di recente scoperte da P. Stäckel, continuando (cfr. *Bollettino*, T. II, 1899, p. 143) le sue investigazioni sui manoscritti del celebre geometra ungherese.

Ne danno notizia due importanti lavori inseriti dallo Stäckel medesimo nel Vol. XVIII dei *Mathem. und Naturwiss. Berichte aus Ungarn*. Nell'uno sono adunate le osservazioni fatte dal Bolyai sopra le *Geom. Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* del Lobatschewsky; è inutile spendere parole per rilevarne l'alto interesse storico. L'altro invece (di valore scientifico maggiore) contiene una lucida esposizione degli studi del Bolyai sulla risoluzione del tetraedro in uno spazio non-euclideo.

*
* *

Il IV vol. del « Poggendorff ». — Il Prof. A. J. von Oettingen, che con tanta cura ha collaborato al III vol. del celebre *Biographisch-litterarisches Handwörterbuch der exacten Wissenschaften* del Poggendorff (3) e che aveva promesso di occuparsi della redazione di un ultimo volume di quest'opera (dedicato agli anni che corrono dal 1883 al giorno d'oggi), ha già cominciato a mantenere l'impegno preso. L'editore A. Barth di Lipsia ha, infatti, già pubblicaii tre fascicoli di quel volume, comprendenti le lettere A-B e qualche nome relativo

(1) Essa venne poi pubblicata per cura del figlio dell'estinto e di L. Schlesinger nel T. CXXIV del *Journal für die reine und angew. Mathematik*.

(2) Ciò venne altamente proclamato in occasione dell'accoglimento del Fuchs nell'Accademia di Berlino.

(3) Cfr. *Bollettino*, T. II, 1899, p. 22-23.

al C, redatti con i criterì ed i metodi costantemente tenuti nei volumi precedenti. Raccomandiamo ai nostri lettori di esaminarli attentamente, non solo in vista degli insegnamenti che ne riceveranno, ma anche per potere eventualmente collaborare all'*appendice*, che chiuderà tutta l'opera, ed in cui troveranno posto i dati che non vennero utilizzati nel testo e le correzioni alle inevitabili inesattezze commesse.

*
* *

Documenti per la storia della matematica nel Medio Evo e nel Rinascimento. — Il XII Fascicolo delle *Abhandlungen zur Geschichte der math. Wissenschaften* contiene la prima metà di un lungo lavoro di M. Curtze, intitolato: *Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance.* Essa consta di due parti. Una è riempita dalla versione latina del *Liber embadorum* del Savasorda, colla pubblicazione della quale il Curtze a ragione spera di assicurare al Savasorda (anteriore di un secolo a Leonardo Pisano e Giordano Nemorario) il posto onorifico che gli spetta nella storia delle matematiche. L'altra parte è formata dal carteggio del Regiomontano con Giovanni Bianchini, Jacopo da Spira e Cristiano Roder, carteggio che sembra essere interessante per lo storico della trigonometria; notiamo che dei due primi corrispondenti del Regiomontino (vissuti entrambi in Italia, uno alla corte di Ferrara e l'altro a quella di Urbino) non sono note le date estreme dell'esistenza; sarebbe utile che qualche erudito ne facesse ricerca. — La nuova importante pubblicazione del Curtze è dedicata a M. Cantor in occasione del 50.° anniversario della sua laurea dottorale.

*
* *

Errori di un grande. — Poichè la *Théorie des nombres* di Legendre è tuttora considerata per classica ed assai diffusa, crediamo bene segnalare il recente articolo di D. N. Lehmer *Errors in Legendre's Tables of linear divisors* (Bull. of the American math. Society, 2.ª Serie, T. VIII), ove sono additate e corrette alcune inesattezze che ivi si trovano.

*
* *

Periodici scientifici italiani. — Il lavoro preparatorio pel Catalogo internazionale della letteratura scientifica ha provato che in Italia esistono non meno di 238 pubblicazioni periodiche (riviste ed atti accademici) concernenti le scienze matematiche, fisiche, naturali e mediche; fra esse non meno di 63 ammettono, in base al loro programma, lavori concernenti le scienze esatte.

Marco Bertolone, Direttore-Gerente

Genova - Tipografia R. Istituto Sordo-muti - 1902.

INDICE DEI NOMI

BOLLETTINO

DI

BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA

DI

GINO LORIA

ANNO VI.

1903

TORINO

CARLO CLAUSEN

HANS RINCK SUCC.

1903

Genova. – Tipografia Sordomuti

INDICE

RECENSIONI ED ANNUNZI.

H. Grassmann. Ges. Werke. II. Bd., II. Th. [G. L.], p. 89-90. — **Fouët.** Leçons sur la théorie des fonctions analytiques. I Partie [G. Vivanti], p. 90-92. — **F. Klein.** Anwendung der Diff.- und Integralrechnung auf die Geometrie [G. Vivanti], p. 102-109. — **E. Wölffing.** Mathematischer Bücherschatz I. [G. L.], p. 109-110. — **Hensel und Landsberg.** Theorie der alg. Functionen [B. Levi], p. 110-116. — **Mellor.** Higher mathematics [G. L], p. 116-117. — **Study.** Geometrie der Dynamen. I. [E. Daniele], p. 118-122. — **Holzmüller.** Meth. Lehrbuch der Elementar-mathematik. III. [G. L.], p. 123-124.

NECROLOGIO.

P. G. Tait, p. 28-29.

NOTIZIE.

Biblioteca scolastica. — Documenti per la storia della matematica nel Medio Evo e nel Rinascimento. — Un' importante memoria di Abel. — Carteggio di Leibniz. — Congresso internazionale di scienze storiche. — Il III Congresso internazionale dei matematici. — Le benemerenze di J. P. de Gua de Malves. — Amici e corrispondenti di G. Galileo. — I documenti del processo di Galileo. — Nuovi modelli di geometria. — Programma di concorso, p. 29-32.

I premi dell' Istituto di Francia. — Ferdinando Caspary. — Un rapporto sui progressi recentemente fatti dall' analisi vettoriale. — Nuovi premi periodici. — Pubblicazioni in occasione del primo centenario della nascita di G. Bolyai (15 Dicembre 1902). — Pubblicazioni recenti sulla storia delle matematiche, p. 62-64.

Congresso internazionale di scienze storiche. — Due temi di concorso. — Concorso al Premio Tenore. — Tema di matematica proposto dalla R. Accademia di Scienze e lettere della Danimarca. — Matematici napoletani. — Nicola Chuquet, p. 92-96.

Antonio Arnaud, il grande Arnaud, come matematico. — Tema proposto pel 1906 dall'Accademia delle Scienze di Berlino. — Un progetto bibliografico. — Progetto d' un' edizione internazionale delle opere di Leibniz. — Accademia Reale del Belgio. — F. Schweins e O. Hesse. — Influenza della tecnica sopra lo sviluppo della meccanica teorica. — Temi di concorso. — Pubblicazioni recenti sulla storia delle matematiche. — Nomografia, p. 124-128.

ANNO VI. GENNAIO, FEBBRAIO E MARZO 1903.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA

E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. 6, per l'estero Fr. 7.50. Numeri separati L. 2 caduno. — Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

SOPRA UN PROBABILE ERRORE DI GABRIO PIOLA

(Sulla rettificazione della parabola e della spirale d'Archimede)

Nota di G. VACCA

Nell' *Elogio* di BONAVENTURA CAVALIERI pubblicato da Gabrio Piola, a Milano nel 1844, è detto:

(P. 36).... « Credo meglio impiegato lo spazio di questa nota nel » far conoscere un insigne teorema del Cavalieri, da lui posto nel » VI libro della sua geometria. E ciò non tanto per rivendicarlo da » certuno che volle attribuirlo al geometra fiammingo Gregorio da

» S. Vincenzo (bastando a tal fine il dire che il libro di Cavalieri » comparve nel 1635 e quello di Gregorio da S. Vincenzo nel 1647) » quanto per rettificare il relativo passo di Montucla che a pag. 41 » nel tomo II della sua Storia, ne parla inesattamente....... ».

La prima parte del teorema che il Piola attribuisce a Cavalieri consiste nel far vedere che due convenienti archi di spirale d'Archimede e di Parabola « rettificati, si trovano della stessa lunghezza ».

Il Piola dice che nell'enunciato ha introdotto qualche cambiamento a fine di renderlo più evidente ed aggiunge che:

(P. 38).... « di rettificazioni di curve vi è qualche traccia nella » geometria degli indivisibili, in prova di che può valere la prima » parte dell'addotto teorema. Del resto che il Cavalieri studiasse nei » problemi di rettificazioni di curve e li trovasse difficili, appare anche » dalle lettere 23 settembre e 2 ottobre 1640 scritte al Rocca ».

Malgrado una attenta lettura del VI libro della geometria del Cavalieri, non ho potuto trovarvi nè il teorema, nè gli accenni che il Piola gli attribuisce relativi a rettificazioni di curve. Mi pare poco credibile che nè il Cavalieri, malgrado la sua modestia, nè i suoi contemporanei non abbiano rilevata, se fosse stata enunciata in quel libro, una scoperta tanto interessante. Ritengo probabile che il Piola non abbia fatto che correggere, senza verificare attentamente il testo di Cavalieri, l'inesatto enunciato di Montucla.

Parimenti inesatta mi sembra l'asserzione del Montucla laddove dice: (l. c.).... « un auteur moderne (le P. Castel) fait hommage de cette découverte à Grégoire de St. Vincent dont un livre entier roule sur ce sujet ».

L'*Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni* pubblicato da questo scrittore in Anversa nèl 1647, contiene infatti un libro dedicato alle spirali. Però non aggiunge nulla a quanto fino dal 1635 aveva scritto Cavalieri, perchè sebbene egli dica:

(P. 668).... « spiralem esse ... evolutam sive expansam parabolam » e sebbene dica che una delle due curve *simbolizza* e *rappresenta* l'altra, o che ha la stessa *natura* dell'altra, non enuncia affatto la proposizione relativa all'eguaglianza delle lunghezze di due archi corrispondenti delle due curve.

La prima opera stampata in cui compare il primo enunciato preciso e la prima dimostrazione a noi nota relativa alla lunghezza dell'arco della spirale e della parabola, è l'*aritmetica infinitorum* di Wallis, pubblicata nel 1655 (opera t. 1), Wallis se ne attribuisce il merito:

(t. 1, p. 373) .... « Tota haec de longitudine lineae spiralis doctrina, » continuis quatuordecim propositionibus iam tradita, est, apud Archi- » medem in libro de lineis spiralibus, penitus omissa: nescio an ab » aliquo quopiam ex recentioribus tradita fuerit ».

E Wallis non si ferma qui, ma arriva, salvo la notazione, alla concezione ed ai metodi del calcolo infinitesimale. Ecco le sue parole: « (p. 379) *Methodus Rectam Parabolicae (vel etiam Paraboloeidicae)* » *aequalem, quam proxime, invenire.*

« .... semiparabolam rectam in vertice contigat recta AT in » quotlibet aequales particulas divisa; (quarum quaelibet dicatur a, » atque numerus omnium n); et in singularum particularum terminis » ad tangentem illam totidem applicentur rectae, Parabolae dia- » metro propterea parallelae, et facientes ad Tangentem angulos » rectos TO, TO, etc., quarum minima dicatur 1 .... erunt illa ut » numeri quadratici 1, 4, 9, 16 &c. et earum differentiae ut 1, 3, 5, 7 &c. » numeri impares deinceps ab unitate (quarum differentiarum maxima » erit $2n - 1$).

» Rectae parallelarum illarum terminos (in linea Parabolica consti- » tutos connectentes, quae erunt propterea ipsi Parabolae deinceps in- » scriptae) erunt ut $\sqrt{:a^2+1}$, $\sqrt{:a^2+9}$, $\sqrt{:a^2+25}$, $\sqrt{:a^2+49}$, &c. » Quae quidem rectae (Parabolae inscriptae) quo plures fuerint, eo » propius ad parabolicae mensuram accedet earum omnium aggre- » gatum, ita tamen ut ex omnibus sic aggregata recta sit ipsa para- » bolica minor.

» Sin velit aliquis rectam juxta majorem (ut constet intra quos » cancellos determinare possit Parabolicae longitudinem); neque diffi- » cilis erit haec investigatio, tangentium ope perficienda.

» Si vero curva AOO, non supponatur parabola, sed paraboloeides » cubicale, biquadraticale, etc. idem processus erit, mutatis mutandis, » atque in Parabola ».

Non è difficile riconoscere in questo passo di Wallis che egli aveva capito benissimo che per rettificare la parabola occorreva eseguire l'integrale $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$, di cui egli ha una concezione nitida.

Pascal nella sua lettera del 10 Dicembre 1658 sopra l'*Égalité des lignes spirale et parabolique* (Oeuvres, Paris, 1889, t. 3, p. 450), dice:

« Il y a environ quinze ans que M. Hobbes crut que la ligne courbe » d'une parabole donnée était égale à une ligne droite donnée. M. de » Roberval ensuite dit qu'elle étoit égale à la ligne courbe d'une spi- » rale donnée; mais sans en donner de demonstration autrement que » par les mouvements, dont on voit quelque chose dans le livre des » hydrauliques du R. P. Mersenne, et comme cette manière de démon- » trer n'est pas absolument convaincante, d'autres géomètres crurent » qu'il s'étoit trompé... ».

«.... Cette diversité d'avis m'ayant étonné je voulus reconnaître » lequel étoit le veritable .... Je l'ai donc fait, et j'ai trouvé que » M. de Roberval avoit eu raison, et que la ligne parabolique et la

» spirale sont égales l'une à l'autre.... La démonstration est entière
» et exactement accomplie, et pourra vous plaire d'autant plus qu'elle
» est la seule de son espèce, aucune autre n'ayant encore paru, à
» la manière des anciens, de la comparaison de deux lignes de dif-
» férente nature.... ».

La dimostrazione che Pascal fa seguire alla sua lettera è limpidissima. Tuttavia essa è molto inferiore a quella di Wallis, nella quale ritroviamo l'origine dei metodi moderni del calcolo infinitesimale. Pascal e Fermat, malgrado il loro genio non erano allora in grado di apprezzarne l'enorme importanza.

Infine nel Dicembre 1657 Huygens scopriva che la rettificazione dell'arco di parabola si riduceva alla quadratura dell'iperbole. Egli tenne segreta la sua scoperta, che pubblicò per mezzo di lettere soltanto un anno dopo, come risulta dalla sua lettera a Carcavy del 16 Genn. 1659 (Oeuvres t. 2, p. 316). Questa lettera non ci è pervenuta integralmente. Il 31 Genneio 1659 (id. p. 334), Huygens seppe da Cl. Mylon che Auzout aveva scoperto la stessa trasformazione. L'enunciato di Huygens ci è conservato nella sua lettera del 7 Febbr. 1659 a Fr. Schooten (id. p. 344). Esso è una elegantissima interpretazione geometrica della formola:

$$\int_0^x \sqrt{(1+x^2)}\, dx = (x/2)\sqrt{(1+x^2)} + (1/2)\log[x+\sqrt{(1+x^2)}]$$

Da quanto precede mi sembra di poter concludere:

1.° Che la Geometria del 1635 di Cavalieri non tratta rettificazioni di curve: che però di tali problemi potrebbe darsi che Cavalieri avesse trattato nel suo epistolario purtroppo finora inedito, e forse dalle lettere del Cavalieri al Rocca, del 1640, citate dal Piola.

2.° Che Roberval nel 1643 era a conoscenza dell'eguaglianza dei corrispondenti archi di parabola e di spirale d'Archimede: ma anche la dimostrazione del Roberval non ci è pervenuta, nè ai suoi contemporanei parve soddisfacente.

3.° Che la prima dimostrazione precisa di questa proposizione, come pure la considerazione della rettificazione di un arco di curva parabolica quadratica, cubica, etc., si trova nell' *Arithmetica infinitorum* di Wallis del 1655.

4.° Che il libro di Wallis rimase inaccessibile per molto tempo ai suoi contemporanei, tanto che Pascal credette di averne dato nel 1658 la prima dimostrazione rigorosa.

5.° Che soltanto nel 1657 Huygens, per il primo, ridusse la rettificazione dell'arco di parabola o di spirale d'Archimede alla quadratura di un segmento di iperbole.

Genova, Novembre 1902.

RECENSIONI ED ANNUNZI

GINO LORIA. *Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte.* Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von F. Schüter, Mit 174 Figuren auf 17 lithographirten Tafeln. Leipzig, B. G. Teubner, 1902, gr. 8; XXI + 744 S. [Prezzo del Vol. legato Mk. 28].

Dopo la diffusa e fervida attività del secolo scorso parve, in questi ultimi anni, delinearsi nel campo delle Matematiche una tendenza al raccoglimento e alla elaborazione; e a molti, non soltanto pensatori isolati ma interi e autorevoli istituti scientifici, si affacciò e si impose la opportunità di meditare sul cammino compiuto, di tirare le somme dei risultati conseguiti e di determinare i confini attuali dei domini conquistati. Così, da parecchi anni oramai, la Deutschen Mathematiker-Vereinigung si fa iniziatrice di Rapporti sui più importanti rami delle Scienze matematiche; così, sotto gli auspici delle Accademie di Monaco e di Vienna e della Società scientifica di Gottinga fu concepito il vasto disegno della *Enciclopedia;* e in accordo col piano e cogli scopi di questa fu dal Teubner, esempio insigne di editore sapiente e coraggioso, ideata la sua *Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften*, della quale, come V. Volume, fa parte l'opera, di cui io qui voglio tenere parola.

Già più d'uno aveva espresso l'idea che fosse oramai tempo di raccogliere, dalla immensa e sparpagliata letteratura, la storia e la teoria delle curve speciali conosciute, quando l'Accademia delle Scienze di Madrid mise a premio codesto tema dapprima pel 1894, poi, riuscito vano quell'invito, pel 1897. Appunto dalla memoria, cui fu conferito codesto premio, nacque quest'opera, che, sostanzialmente rifatta ed ampliata, si è, pochi mesi innanzi, presentata al pubblico matematico.

Dalle prime curve speciali, le cui origini si confondono colle origini stesse della Geometria, traverso i secolari tentativi di risolvere problemi classici e pressochè leggendari, nelle ricerche astratte suggerite dal genio geometrico e tra la folla sempre crescente dei problemi, che ai metodi della Geometria andarono sottoponendo le scienze meccaniche, fisiche e, in questi ultimi tempi, biologiche, si venne accumulando, nel campo delle curve particolari, un materiale così ampio, e, sopratutto, così vario per iscopi e per importanza e così complicato di legami molteplici, che non appare nè possibile, nè desiderabile di ordinarlo e classificarlo secondo un criterio unico e rigido. L'A. prescelse la via più naturale e, ricorrendo alternativamente a un duplice punto di vista, geometrico e storico, riuscì a concepire per l'opera sua un piano semplice e chiaro. Escluse le curve sghembe — su cui giova sin d'ora attendere il promesso secondo volume — l'A. distingue anzitutto le curve piane algebriche dalle trascendenti, raggruppando le prime a seconda dell'ordine delle rispettive equazioni cartesiane; e poi, per ciascuna delle grandi divisioni, che così ottiene, distribuisce le curve in tanti gruppi coordinati, ciascuno dei quali è caratterizzato da una curva, da cui diramano tutte le sue generalizzazioni immediate o mediate e tutte le curve che, o per i loro caratteri intrinseci o per le loro proprietà formali, a quella sono affini. Ricostruite così queste discendenze di curve, fra loro storicamente parallele e geneticamente indipendenti, le dispone le une dopo le altre nell'ordine cronologico delle curve, da cui ciascuna di esse rispettivamente ripete la sua origine, e, seguendone il naturale sviluppo, le confronta e le ravvicina, rilevandone i punti di contatto e le eventuali diramazioni comuni. In questa guisa, mentre, per una parte, a chi segua ordinatamente tutto il vasto piano del libro si manifesta, da un punto di vista particolare ma non per questo meno interessante, l'intero svolgimento storico della Geometria, d'altro canto a chi intenda avere soltanto notizie di una speciale teoria è reso possibile ed agevole l'orientarsi e l'indirizzarsi, a seconda dei suoi scopi, nel dedalo delle ricerche sulle curve piane speciali.

La parte I (« *Luoghi piani e Luoghi solidi* ») tratta in forma, come è ben naturale, brevissima della *retta* (cap. 1) del *cerchio* (cap. 2) e delle *coniche* (cap. 3) e vi è notevole lo sguardo rapido, ma concettoso, che l'A. dà alla storia di queste ultime linee da Menecmo ad Apollonio, dal Kepler al Desargues, dal Fagnano allo Steiner.

Nella Parte II, dedicata alle « *Curve del terz'ordine,* », i primi tre capitoli si rivolgono alle generalità. Nel cap. 1, dopo avere accennato alle forme canoniche dell'equazione delle cubiche e alla loro rappresentazione parametrica generale, l'A. espone la classificazione del Newton, aggiungendovi la nomenclatura del Newman, e definisce tre famiglie di curve del terz'ordine, che non rientrano nel quadro dei capitoli successivi. Dopo essersi occupato, nel secondo e terzo fra questi, delle cubiche *razionali* e delle *circolari,* passa allo studio delle curve del terz'ordine speciali, cominciando da una già nota ai Greci, cioè dalla *Cissoide* di Diocle (cap. 4), alla quale riattacca le molteplici sue generalizzazioni: *Cissoide obliqua,* curve *cissoidali* dello Zahradnik, *Cissoidi generali* dello Strassnitzky e del Peano, *Ofiuride* dell'Uhlhorn (cap. 5). — Da un problema ideato dal Descartes a mettere alla prova i suoi metodi nacque la cubica nota sotto il nome di *Parabola cartesiana* od anche *Tridente di Cartesio* (cap. 6), ed origine analoga ebbe il *folium Cartesii*, il quale diede luogo, in tempi vicini a noi, a generalizzazioni in vario senso (cap. 7). — Ideate già prima del 1650 da un matematico francese (forse il Roberval, secondo un' ipotesi dell'A.) le *Strofoidi* (cap. 8), dopo essere state oggetto di uno studio inedito di Guido Grandi e di Evangelista Torricelli, rimasero un secolo nell'oblio; ma poi, specialmente nella prima metà del secolo scorso, furono l'oggetto di molte e varie ricerche, che rivelarono le eleganti proprietà di questa notevole famiglia di curve, da cui trassero origine le *Panstrofoidi* (secondo la denominazione dell'A.), le *Strofoidi generalizzate* del Cesàro e del Piquet, le *Strofoidali* del Barbarin, le *Strofoidi generali* di W. W. Johnson (cap. 9). — Due brevi capitoli (10, 11) assegna l'A. alla *Concoide* del de Sluse (la cui origine risale, come per la Strofoide, alla metà del sec. XVII e che come quella è una curva del terz' ordine circolare) e alle cubiche razionali tangenti alla retta all' infinito, fra cui compare la cosidetta *curva di Rolle*. Del terz'ordine e razionale è pure la *Versiera* (capitolo 12), che si suole a torto attribuire a M. G. Agnesi, mentre ricerche recenti di G. Vacca dimostrano che essa appartiene al Grandi: a codesta curva l'A. ravvicina la *Visiera* del Peano, simile a quella per forma, ed una curva, che fu dal Longchamps erroneamente identificata colla Versiera e che perciò l'A. chiama *Pseudo-versiera*. — Nei due ultimi capitoli di questa Parte (13, 14) sono studiate le curve del terz'ordine, che furono ideate a risolvere i classici problemi della trisezione dell'angolo e della duplicazione del cubo e che già non trovarono posto, come la Cissoide di Diocle, nei capitoli precedenti: noto la cubica trisettrice del Mac Laurin colla generalizzazione del Cramer, le trisettrici del Catalan e del Longchamps, la cubica duplicatrice dell'Uhlhorn e del Longchamps. Qui infine l'A. si occupa della *Foglia parabolica* di codesto ultimo geometra ed annovera alcune cubiche particolari, cui non fu assegnato un nome specifico.

La Parte III comprende le « *Curve del quart'ordine* ». Anche qui nel cap. 1 l'A., dopo avere riassunto le generalità sulle quartiche, tiene parola dei tentativi di classificazione dovuti all'abate Bragelongne, all' Euler e al Cramer, accenna alle classificazioni fondate sulla considerazione del genere o su criteri topologici ed enumera le quartiche del Clebsch, del Lüroth, del Geiser, del Caporali, dell' Halphèn e le omologico-armoniche, le quali tutte, pur essendo prive di punti multipli, sono speciali. I due capitoli seguenti (2, 3), pur essi di carattere generale, trattano delle *quartiche razionali*, fra le quali compare come quartica a punto triplo — il *Trifolio parabolico* del Longchamps — e delle *quartiche ellittiche* e *bicircolari;* e nel seguito sono passate in rassegna le quartiche speciali a partire dalle *Spiriche* di Perseo (cap. 4), sezioni piane del toro circolare parallele all' asse di rotazione. — Trova quindi posto la *Concoide* di Nicomede, che, notoriamente, è al tempo stesso curva trisettrice e duplicatrice (cap. 5); e ad essa ravvicina l'A. le varie sue generalizzazioni (cap. 6): una curva recente dello Jerabek (che comprende come caso limite particolare anche la Strofoide) le Concoidi a base qualsiasi e fra queste, come concoide del cerchio, la *Lumaca* di S. Pascal. Accanto alla *Cardioide* l'A. studia le *Cardioidi stellate* del Cesaro, generalizzazioni intrinseche di quella (cap. 7), e, poichè la Cardioide è una quartica tricuspidale, riattacca qui lo studio della *Ipocicloide tricuspidale,* che è proiettivamente identica ad essa, e accenna alle proprietà generali delle curve del quart'ordine, aventi tre cuspidi. Dopo aver passato in rassegna un gruppetto di quartiche, cui si dà luogo considerando le podarie della Ipocicloide tricuspidale e fra le quali ricordo il *trifolio obliquo* del Longchamps (cap. 8), l'A. riprende l'ordine cronologico e si occupa delle *Ovali* di Cartesio (cap. 9), cui segue una schiera di *quartiche polizomali simmetriche* (cap. 10), fra le quali meritano particolare menzione le *Parabole virtuali* del P. Gregorio da S. Vincenzo (sec. XVII), rimaste come sepolte fra i laboriosi viluppi di un inutile tentativo di quadrare il cerchio, ma che si presentarono poi, in modo spontaneo, in ricerche del Huygens e di altri. — Da un problema proposto da Gerard von Gutschoven, scolaro e collaboratore del Descartes e poi professore di Anatomia, di Chirurgia e di Botanica a Lovanio, nacque quella curva *Kappa,* che è la più antica tra le forme speciali conosciute di *quartiche razionali con un punto di contatto di due rami* (cap. 11), fra le quali ricorderò le *quartiche piriformi* del Longchamps. Dopo un breve capitolo (12) sulle *Concali* e le *Cissoidi di quarto grado,* l'A. passa a trattare diffusamente delle *Curve del Cassini* (cap. 13), che in certo senso sono analoghe alle Concali, e della *Lemmiscata* di Giac. Bernouelli (cap. 14), e, poichè quest'ultima curva è una quartica a tre punti doppi di inflessione, l'A. raccoglie qui alcune proprietà generali delle quartiche di codesta specie, considerando in particolare certe forme speciali note di esse, la Kohlenspitzkurve dello Schoute (così designata per la sua somiglianza col profilo dei due carboni di una lampada elettrica ad arco) e la Kreuzcurve dello stesso o *Trinodale armonica* del De la Gournerie. — Il cap. 15 è dedicato a due quartiche razionali circolari, una delle quali è la *Trisegante* del Delanges, e l'altra è una nuova *concoide,* che fra le curve può vantare il privilegio certamente unico, di essere stata ideata da un celeberrimo pittore, Albrecht Dürer; di essa l'A. dà per primo le figure delle tre sue forme tipiche. — Infine un brevissimo capitolo (16) su alcune quartiche, collegate alla teoria delle coniche, chiude questa ampia, ordinata ed esauriente rassegna delle curve speciali del quart'ordine.

Le « *Curve algebriche speciali di ordine superiore al quarto* » che formano l'oggetto della Parte IV, sono assai poco numerose, e noterò con l'A. che fra esse non ve n'ha nemmeno una di settimo ordine. Dopo avere accennato alle scarse ricerche di indole generale, cui furono sottopposte codeste curve, l'A. enumera le quintiche conosciute (cap. 1), delle quali nessuna ricevette un nome particolare e che tutte si connettono alla teoria delle coniche, e ad esse aggiunge le curve speciali del sesto ordine, che ebbero un'origine analoga. Il gruppo delle sestiche é veramente notevole: l'A. lo studia, cominciando dalle *Astroidi*, generate come *Olistoidi* (Glissettes) di un segmento di data lunghezza mobile cogli estremi su due rette non parallele, e dagli *Scarabei*, podarie delle Astroidi (cap. 2). Alle Olistoidi appartiene (avendo come base due cerchi) anche la *curva di Watt* (cap. 3), accanto alla quale l'A. considera la sestica tricircolare, che il Roberts ottenne come generalizzazione di quella e a cui egli diede il nome di *Threebarcurve.* Al sesto ordine appartengono ancora la *Nefroide* del Freeth, che conduce alla costruzione dell'ettagono regolare, e l'*Atriftaloide,* presentatasi con altre curve allo Haugthon nello studio della superficie dei mari (cap. 4); e qui l'A. raccoglie altre curve del sesto e dell'ottavo ordine nate da problemi astronomici e la *Cranioide,* incontrata dal Poncelet e poi dal Burmester nello studio delle ombre delle elicoidi. Dopo un breve capitolo (5) sul *Trifolio pratense* e sulla *Cornoide,* sestiche entrambi, l'A. chiude questa Parte collo studio della interessantissima famiglia di curve del Krimphoff, cui dà luogo una rappresentazione geometrica delle funzioni lemniscatiche, e in particolare si ferma a considerare le curve di codesta famiglia degli ordini nono e venticinquesimo, le quali sono entrambi razionali.

Estremamente vario e abbondante è il materiale raccolto nella Parte V, dedicata alle « *Curve algebriche speciali di ordine qualsivoglia* », le quali per la massima parte debbono la loro origine, in generale recente, ad una estensione della definizione di curve già incontrate prima d'ora. Dopo una breve introduzione sull'ordinamento adottato e un cenno sulle *Curve modulari* (cap. 1), l'A. considera le curve cui condusse la generalizzazione della *equazione* delle coniche, nelle sue varie forme canoniche: *Parabole e iperbole d'ordine qualsivoglia* (cap. 2, 3), *Perle* (cap. 4), *Curve di Lamè* e *triangolari simmetriche* del *De la Gournerie* (cap. 5), e dopo queste raggruppa, come dovute a generalizzazione di *proprietà geometriche* delle coniche, le *Curve polizomali* del Cayley (cap. 6) e le *Curve del Darboux* e le *equilatere di P. Serret* (cap. 7). — Cercando una definizione geometrica di curve, che rendessero la forma di rose a più petali giunse G. Grandi alle sue *Rodonee* (cap. 8), cui l'A. riattacca, per l'origine analoga, le *Foglie geometriche* dello Habenicht (cap. 9); e allo stesso gruppo delle curve, di cui fu determinata l'equazione in base alla forma per esse prefissata, appartengono ancora le *Ovali* del Münger e le *Curve triangolari* dell' Euler, alla cui determinazione si giunge agevolmente considerando le rispettive evolute o *Curve orbiformi* (cap. 10). — La generalizzazione dei due classici problemi della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo diede origine ad una serie notevolissima di *Curve moltiplicatrici e mediatrici* (cap. 11) e di *Curve settrici* (cap. 12), che qui l'A. studia per ordine di tempo. -- Passa quindi alle curve algebriche, che ammettono trasformazioni in sè stesse: *Curve algebriche che hanno centri o assi di simmetria* (cap. 13), e *Curvé autopolari e anallagmatiche* (cap. 14); e, dopo uno studio diffuso delle *Rhizic curver* del Walton o curve algebriche equipotenziali (Geometria dei polinomi) (cap. 15), espone in un gruppo di capitoli, che sono fra i più notevoli dell'opera, le ricerche sulle curve, la cui rettificazione da funzioni di natura prefissata, passando ordinatamente in rassegna le curve, la cui lunghezza d'arco si esprime per mezzo di archi di parabola, di cerchio e di iperbola (cap. 16), di ellisse (cap. 17) e di lemniscata (cap. 18). — Un ultimo capitolo (19) è dedicato alle curve, che il Lissajous ha incontrato nello studiare il problema dei nodi nelle lamine vibranti.

Nella Parte VI sono raccolte le « *Curve trascendenti speciali* ». Nella introduzione (cap. 1) l'A., dopo aver fatto cenno dei tentativi, riusciti vani sin qui, di raccogliere le curve trascendenti conosciute sotto un unico corpo di dottrina analogo alla teoria delle curve algebriche, stabilisce sulle tracce del Fouret le definizioni fondamentali dei sistemi a due caratteristiche di curve algebriche o trascendenti; e passa quindi alla rassegna delle curve trascendenti speciali, cominciando da quelle due, la cui scoperta risale a Geometri greci, cioè la *Quadratrice di Ippia e Dinostrato* e la *Spirale di Archimede* (cap. 2, 3). Alla prima di queste egli riattacca le altre quadratrici scoperte in tempi più recenti: la *Quadratrice* del Tschirnhausen, la *Cocleoide* e la *Quadratrice dell' iperbola* del Perks; e, così, alla teoria della Spirale di Archimede fa seguire lo studio delle varie sue generalizzazioni: *Spirali di ordine superiore, Spirale del Galilei* e *Spirale parabolica* (cap. 4) e, a completare il quadro delle spirali algebriche, dopo avere esposte alcune generalità su codeste curve, si occupa della *Spirale iperbolica* e del *Lituo* del Côtes. Un gruppo distinto di spirali è costituito dalla *Spirale logaritmica* e da altre spirali trascendenti che da esse derivano (cap. 6); e, poichè il fatto che la spirale logaritmica ha curvatura inversamente proporzionale alla lunghezza dell'arco condusse a ricercare le curve, per cui invece fra curvatura ed arco vi è proporzionalità diretta, l'A. si occupa qui della *Clotoide*, che è definita appunto da codesta ultima proprietà (cap. 7). — Già la Quadratrice di Ippia e Dinostrato e la Spirale di Archimede sono suscettibili di una definizione cinematica; qui l'A. passa a studiare sistematicamente un gruppo notevolissimo di curve, che ammettono una definizione di tal natura e tratta della *Cicloide* (cap. 8), delle *Epicicloidi, Ipocicloidi* ed *Evolventi del cerchio* (cap. 9), delle *Pseudocicloidi* (cap. 10), delle *Trocoidi* in generale (cap. 11) con riguardo speciale alle Trocoidi dell'ellisse (*Curve del Delaunay e di C. Sturm*) e infine delle *Curve sintrepenti* e in particolare *delle isotrepenti* (cap. 12). — Riprendendo quindi l'ordine cronologico, l'A. considera la curva risolutrice di un problema proposto dal Debeaune al Descartes e che ha uno speciale interesse storico, perchè presenta il primo esempio di un problema di « calculus tangentium inversus ». A problemi di natura analoga debbono la loro origine le curve del *Ribaucour* (cap. 14), le *Spirali* del Norwich o dello Sturm e le curve dell'Euler (cap. 15). — Dopo un breve esame delle curve cui dà luogo la rappresentazione delle funzioni trigonometriche e logaritmitiche (cap. 16, 17) e un cenno sulle curve che qui vengono dette *straordinarie* (curve prive di tangente, curve che riempiono un'area, ecc.), l'A. studia le linee di Klein e Lie (cap. 19) e quelle di Mercator e Sumner (cap. 20), e passa quindi in rassegna un ampio gruppo di curve, che egli chiama *fisico-matematiche,* perchè ciascuna di esse risponde a un problema fisico: *Trattrici* (cap. 21), *Catenarie* (cap. 22), *Curva elastica, Isocrona paracentrica* e *Curva meridiana del solido di rivoluzione di minima resistenza* (cap. 23), *Erpoloidi* e, in particolare, *Spirali del Poinsot* (cap. 24) e, da ultimo, altre curve, presentatesi in questioni magnetiche, elettromagnetiche e biologiche (cap. 25).

Nella Parte VII ed ultima sulle « *Curve derivate* » sono esposte alcune trasformazioni e costruzioni geometriche, le quali permettono di dedurre da ogni curva data una nuova curva; così dopo un riassunto generale sui metodi di trasformazione fondati sul cambiamento di coordinate (cap. 1), vi si trovano le *Curve di inseguimento* (cap. 2), le *Evolute ed evolventi* (cap. 3), e le loro generalizzazioni (cap. 4), le *Curve parallele* (cap. 5), le *Radiali* (cap. 6), le *Caustiche* (cap. 7), le *Podarie, Contrapedali* e *Podoidi* (cap. 8), le curve *isottiche* e in particolare *ortottiche* (cap. 9), le curve *differenziali* e *integrali* (cap. 10), le curve *opposte* (cap. 11) e infine alcune curve, che si deducono non da una curva unica, ma da un insieme di curve (cap. 12).

A concludere il libro e quasi a raccogliere le file di una tela così vasta e complessa, l'A. qui da ultimo si volge a dare uno sguardo storico allo sviluppo della teoria delle curve piane, e da questa sintesi veramente limpida ed efficace passa ad abbozzare la sua *Teoria delle* *curve panalgebriche* (1). Egli designa con tale nome le curve integrali di equazioni differenziali del primo ordine, algebriche non solo rispetto alla derivata, ma anche alla funzione incognita e alla variabile; e mostra come per esse, in base a codesta definizione, si possa svolgere tutta una serie di interessanti proprietà, che generalizzano nel modo più semplice le proprietà fondamentali delle curve algebriche. Sono curve panalgebriche, salvo scarsissime eccezioni, tutte le curve trascendenti conosciute; onde a me sembra lecito affermare, che qui, anzichè un primo tentativo di coordinamento del materiale conosciuto, come modestamente si esprime l'A., si abbia già l'inizio di una teoria organica e generale. Anzi si potrebbe forse desiderare che l'A., nel concepire il piano della Parte relativa alle curve trascendenti, avesse desunto dalla sua teoria delle curve panalgebriche i criteri ordinatori. Ad ogni modo giova avvertire esplicitamente che egli non vi ha mai tralasciato di far risaltare per ogni singola specie di curve quelle proprietà, per cui esse hanno o no natura panalgebrica; ed anzi le considerazioni, di cui egli ha in quella Parte largheggiato, relative ai sistemi algebrici a due caratteristiche, ai quali, per la massima parte, quelle curve appartengono, danno alla trattazione caratteri di interesse e, spesso, di novità, veramente degni di nota.

Lo schema secondo cui è svolto lo studio di ciascuna curva o famiglia di curve è sistematicamente uniforme: precedono i cenni storici, e rapida ma persuasiva è la critica sulla origine delle singole curve e sulla priorità nella relativa scoperta: talvolta le inclinazioni del ricercatore di documenti spingono l'A. sulla via di discussioni minute, non per altro soverchiamente prolisse; perchè ben presto egli se ne ritrae e dall'esame comparativo delle varie eventuali definizioni della curva in parola passa a studiarne le proprietà, raggruppandole e condensandole in pochi enunciati salienti, cui fa da ultimo seguire i risultati metrici relativi alle rettificazioni e alle quadrature.

Il materiale addirittura immenso, che è raccolto in quest'opera, è reso facilmente reperibile e, per così dire, maneggevole da due indici, l'uno di nomi propri, l'altro di argomenti, e da un sommario analitico dei paragrafi diffuso e completo; nè va passata sotto silenzio la ricca serie di tavole, in cui con cura e precisione veramente mirabili sono delineate in centosettantaquattro figure le curve più notevoli, di cui è tenuto parola nel libro.

La redazione è sobria ed efficace, salvo qualche rara disuguaglianza, che farebbe desiderare in alcuni punti una maggiore concisione, e in altri, dato il pubblico ampio di lettori presso cui il libro troverà favore, una minor parsimonia di indicazioni e di schiarimenti.

1) Cfr. G. Loria. *Le curve panalgebriche*. « Mem. della R. Soc. delle Sc. di Praga, 1901 » e « Le Matematiche pure ed applicate, t. II, 1902 ».

Ma queste ultime impressioni, di cui non mi nascondo il carattere soggettivo, non possono oscurare il giudizio, che, fuor d'ogni dubbio, è dovuto a quest'opera, nella quale l'A., fondendo in sè, in modo forse più felice che in ogni altra occasione, il duplice ufficio di storiografo e di geometra, ha saputo armonicamente contemperare le doti rigide di ordine sistematico, che sono richieste a un Repertorio, coi caratteri più larghi e più complessi di una Storia comparata di sì vasto dominio scientifico.

Appunto per questa doppia sua natura, l'opera potrà avere un'azione notevole anche nella Scuola. I Corsi di Geometria analitica del piano, alquanto irrigiditi nel tipo tradizionale di teoria delle sezioni coniche, troveranno qui tracciata e facile la via a distendersi in vario senso, accogliendo in sè la teoria di qualche altra famiglia di curve, che uniscano alla eleganza delle proprietà la importanza delle applicazioni. E poichè l'A. volle dedicata la sua opera alla memoria di Eugenio Beltrami, forse non parrà qui fuor di luogo il voto, che i nuovi cultori delle Matematiche, ricercando ad ora ad ora questa antologia geometrica di geniali spedienti e di ravvicinamenti industriosi, di applicazioni feconde e di generalizzazioni fortunate, educhino in sè quel senso sereno di eleganza e quell'attico gusto di euritmia, dei quali, non meno nella questione geometrica particolare che nell'ardua e profonda speculazione di filosofia naturale, sempre quel Grande si compiacque.

Carpaneto (Piacenza), Ottobre 1902.

UGO AMALDI.

Opere matematiche di EUGENIO BELTRAMI. *Pubblicate per cura della Facoltà di Scienze della R. Università di Roma.* T. I. Milano, U. Hoepli, 1902, 4.° p. XXII + 437 [Prezzo L. 25].

La Facoltà di Scienze della R. Università di Roma per onorare nel modo più degno la memoria di Eugenio Beltrami, non appena avvenuta la di lui irreparabile perdita, iniziò una pubblica sottoscrizione e coi ricavati di essa pose le basi alla edizione di cui oggi annunciamo il I volume. Pel formato e pei caratteri tale edizione è identica a quelle delle *Opere* del Brioschi; è così splendida che fa onore tanto all'Hoepli che ne è editore, quanto alla Tipografia matematica di Palermo che la eseguì. Ma essa differenzia da quella pei criterì con cui essa venne condotta. Anzitutto venne fortunatamente abbandonato il criterio di distribuzione adottato dagli editori di Cauchy e Brioschi, e venne invece scelto l'ordine cronologico, per ogni rispetto preferibile a qualunque altro: della qual cosa va dato somma lode ai Prof.ri Cremona, Tonelli e Castelnuovo, che presiedettero alla presente pubblicazione. Approvazioni altrettanto unanimi e cordiali temiamo essi non riscuoteranno per essersi allontanati dal sistema di riproduzione diplomatica, da molti ritenuto preferibile ad ogni altro; e le critiche al sistema di libertà adottato non potranno certo mancare da parte di chi osserva che, in conseguenza di esso, vennero mutilate le *Annotazioni alla teoria delle cubiche gobbe,* di cui non venne riprodotta la parte polemica, che pur lumeggia un episodio di storia moderna, oggi dimenticato, ma che fu un giorno così clamoroso da avere un' eco nella *Commemorazione* che dello Steiner fece il Geiser. Delle traduzioni di cui vennero onorate alcune delle memorie del Beltrami è fatto cenno dagli editori; crediamo però non essere siffatte indicazioni complete; onde consiglieremmo di adottare il procedimento adoperato nell' edizione delle opere di Lejeune-Dirichlet, cioè di inserire al termine dell' ultimo volume un elenco completo delle traduzioni in parola.

Una bella riproduzione fotolitografica del ritratto ad olio, fatto dal Prof. Pittarelli dell' illustre estinto, e la ristampa della bellissima Commemorazione fattane dal Prof. Cremona rendono ancora più prezioso il volume annunziato.

G. L.

R. Fricke. *Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen zusammengestellt.* Dritte umgearbeitete Auflage. Braunschweig, Vieweg, 1902. XV+218 p. 8.° [Prezzo Mk. 5; legato Mk. 5.80].

Questo eccellente libro, compilato in origine per gli studenti del Politecnico di Braunschweig, ricompare ora in forma tale da poter avere un uso assai più esteso; e noi vorremmo che venisse tradotto in italiano, perchè potessero approfittarne gli studenti delle nostre Università. Esso è una specie di riassunto d' un corso di Calcolo infinitesimale, contenente essenzialmente tutte le definizioni, i teoremi, le regole di derivazione, i metodi d' integrazione; le dimostrazioni talvolta sono omesse, tal altra accennate od esposte per esteso.

Il Fricke dice che il suo libro può considerarsi come l' esplicazione del programma per l' insegnamento del Calcolo nei Politecnici da lui esposto nella prefazione alla traduzione tedesca del *Calculus for engineers* di Perry, di cui abbiamo parlato (v. *Bollettino,* T.V, 1902, p. 122-124), e coglie l' occasione per fare una punta contro quei critici i quali vorrebbero una assoluta *aritmetizzazione* anche nei libri di matematica destinati ai Politecnici. Se per aritmetizzazione si vuol intendere il mantenimento del rigore logico, chi scrive si onora di essere, sia pure in ultima linea, nel numero di quei critici. E, del resto, che il

Fricke medesimo riconosca non essere necessario rinunciare — come altri autori fanno — al rigore per ottenere facilità e chiarezza, lo prova questo libro stesso, dove egli, pur limitando la trattazione a quelle che egli chiama *funzioni elementari*, ha cura di enunciare sempre le condizioni restrittive sotto le quali sono validi i vari teoremi. Dopo ciò che abbiamo scritto ripetutamente su questo argomento, è quasi superfluo il dire che, se col Fricke *teorico* non consentiamo in tutti i punti, col Fricke *pratico* ci troviamo in pieno accordo.

Il presente libro è diviso in cinque parti, contenenti rispettivamente i principii del Calcolo differenziale, le sue applicazioni, i principii e le applicazioni del Calcolo integrale, la teoria delle funzioni di più variabili e la teoria delle equazioni differenziali ordinarie. Un'appendice tratta delle funzioni di variabile complessa.

G. Vivanti.

G. Holzmüller. *Elemente der Stereometrie.* Leipzig, Göeschen. 8.°, I, 1900, p. XI+383; II, 1900, p. XV+477; III, 1902, p. XII+333; IV, 1902, p. XI+311. [Prezzi dei quattro volumi: *in brochure*, Mk. 6, 10, 9, 9; legati Mk. 6.60, 10.80, 9.80, 9.50].

Il lettore che ricorda che negli *Elementi di Euclide* tre soli e dei più brevi fra i tredici libri che li formano siano consacrati alla geometria dello spazio domanderà stupito come mai si possano scrivere quattro volumi di *Elementi di stereometria*, comprendenti più di millecinquecento pagine. Ma la sua meraviglia non sarà di lunga durata; essa tosto scomparirà quando gli avremo detto che sotto la denominazione di « stereometria » l'A. raccolse tutte le proprietà delle figure a tre dimensioni e tutti i metodi per studiarle: così, non solo i soliti poliedri noti negli elementi, ma tutte le figure limitate da piani; non solo il cono, il cilindro e la sfera, ma anche molte superficie algebriche e trascendenti; e, per indagare le prerogative di siffatte figure, egli ricorse, non solo ai metodi classici che l'antica Grecia ci ha trasmessi, ma anche a considerazioni infinitesimali e alle rappresentazioni nel metodo di Monge od in prospettiva (*disegno stereometrico*, secondo la nomenclatura dell'autore). Ebbe così vita un'opera, fondata sopra ripetute e svariate esperienze fatte in differenti scuole, e di apparenza diversa da tutte quelle di più antica data e che certo non può surrogare alcuno dei trattati ben noti a tutti; un'opera accessibile soltanto ad alcuni pochi eletti fra gli studenti, ma che tutti indistintamente i professori delle nostre scuole medie dovrebbero tenere costantemente sul loro tavolo di lavoro, non foss'altro perchè rappresenta una miniera inesauribile di applicazioni e di esercizî sulle più importanti teorie e perchè, con opportune ricchissime citazioni, dà notizia di fiorenti dominî oltre quelli descritti o percorsi.

Il sostanzioso nutrimento che l'opera dell' Holzmüller assicura a chi la legge disarmerà i critici propensi a muovere qualche appunto all'ordinamento della materia, appunto che l'A. stesso sembra prevedere (quando dichiara nella prefazione al suo I vol. la sua opera piuttosto un saggio metodico che una esposizione sistematica completa) e che verrà probabilmente evitato nelle edizioni seguenti, che indubbiamente attendono quest' opera poderosa. La stessa considerazione indulgente varrà a far perdonare certe argomentazioni usate dall' autore (ad es. quelle connesse al così detto *principio di Cavalieri* e alle *regole di Guldino*), le quali non possono venire riguardate per legittime da coloro che ritengono non doversi per alcun conto discostarsi dalla retta via che tracciarono Euclide ed Archimede.

Anzi a questo proposito è indispensabile ricordare due cose. Una si è che in Germania, mentre nell' analisi il rigore, portato sino agli estremi limiti, sembra essere regola di procedere costante, per quanto concerne la geometria invece si sembra essere più disinvolti e corrivi. L'altra è che, coll'ausilio di metodi un po' disinvolti, l'A. è riuscito a porgere dimostrazioni elementari di certe formole che, non potendosi stabilire rigorosamente se non servendosi del calcolo infinitesimale, venivano prima di lui semplicemente enunciate in alcune scuole professionali, ove è necessario insegnarle a cagione delle loro applicazioni: ora, sia pure che certi ragionamenti dell' Holzmüller non equivalgano a complete dimostrazioni, essi vanno però lodati da chiunque preferisca mezza prova a nessuna prova.

I fautori della geometria infinitesimale sintetica troveranno nell' opera dell' Holzmüller argomenti a favore delle loro idee predilette, mentre gli oppositori saranno costretti a ravvisare in essa una testimonianza della sua potenza e duttilità; è quindi probabile che essa darà luogo a polemiche interessanti ed utili. Il *Bollettino,* per indole sua pacifico, non può prendervi parte: esso si limita ad adempiere il proprio compito segnalando ai propri lettori un' opera coscienziosa ed utilissima, e tracciandone i lineamenti. Al che valga l' indice seguente:

6. Recente geometria della sfera. Applicazioni alle ciclidi di Dupin ed alla curvatura delle superficie.
7. Sezioni coniche e cilindriche; applicazioni alla prospettiva di una sfera ed alle ombre della stessa.
8. Superficie di rivoluzione; in particolare quella avente per meridiano una conica.
9. Quadriche in generale.

VOLUME II. *Calcolo di aree e volumi.*

1. Prismi e cilindri.
2. Coni circolari retti, piramidi triangolari e poliedri regolari.
3. Poliedri irregolari ed alcuni corpi ad essi collegati e limitati da superficie curve.
4. La sfera.

VOLUME III. *Studio e misura di alcune figure più complicate.*

1. Le regole di Guldino per solidi di rivoluzione, superficie di rivoluzione e in generale per figure a tre dimensioni (1).
2. Le superficie elicoidi, la loro applicabilità sopra superficie rotonde, la loro connessione con le regole di Guldino per le superficie e la loro rappresentazione conforme sul piano e su altre superficie.
3. L'inversione applicata alle eliche ed alle superficie elicoidi. Osservazioni sulle trasformazioni e sui gruppi di trasformazioni.
4. Superficie tubulari generalizzate; loro inverse.

VOLUME IV. *Continuazione delle ricerche più elevate.*

1. Regola di Simpson e rappresentazioni conformi; applicazioni di esse al calcolo di lunghezze, superficie e volumi. Momenti di varî ordini.
2. Applicazioni dei precedenti metodi di calcolo a le quadriche ed altre figure ad esse collegate.
3. Ulteriori sviluppi concernenti il catenoide, la pseudo-sfera e l'elicoide d'area minima.

Un particolareggiato indice per materia ed un indice dei nomi sono preziosi complementi dell' opera dell' Holzmüller.

G. L.

---

(1) All'A. sembrano essere sfuggite le note di G. Koenigs *Sur la distribution des volumes engendrés par un contour fermé dans un mouvement quelconque* (Comptes rendus, T. CVI, 1888) il cui tema ed i cui risultati coincidono con quelli della I. Parte del III Vol.

N. Grassi. *Elementi di geometria descrittiva per uso della R. Accademia Navale e dei RR. Istituti Tecnici,* con 58 tavole contenenti 337 figure. Livorno, S. Belforte 1901, p. VI+264 [Prezzo L. 8].

Nella Iª Parte di questo manuale] sono esposti i fondamenti del metodo di Monge con applicazione allo studio ed alla rappresentazione delle principali figure geometriche limitate sia da linee rette e superficie piane, che da curve e superficie qualunque. Nella II invece sono gettate le basi del metodo dei piani quotati, dell'assonometria e della projezione centrale: quest'ultimo metodo si suole di consueto premettere a quello della doppia projezione, ma senza ragioni di serietà imperativa; chè se la *projezione centrale*, nel senso della Geometria projettiva, è, in ultima analisi, la base del metodo di Monge, questo razionalmente e storicamente è indipendente dalla *projezione centrale* nel senso della Geometria descrittiva ordinaria. La III Parte fa conoscere le varie specie di prospettiva e gli elementi della teoria delle ombre.

Le illustrazioni delle teorie esposte, attinte dall'architettura navale, renderanno ben accetti questi *Elementi* ai futuri ufficiali dell'armata; ma esse non sono così numerose da renderli inservibili ad altre categorie di studiosi. Ai quali poi gli *Elementi* stessi riusciranno simpatici per la forma piana in cui sono redatti e per le numerose belle figure di cui vanno adorni.

G. L.

F. Rudio. *Die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium.* Mit zahlreichen Uebungsbeispielen. II Teil. *Die analytische Geometrie des Raumes.* Mit 12 Figuren im Texte. III verbesserte Auflage. Leipzig, B. G. Teubner, 1901, 8.° p. X+186 [Prezzo del vol. legato Mk. 3].

Le doti di semplicità, chiarezza e rigore, che assicurarono un ottimo successo alla *prima parte* di questo trattatello (v. *Bollettino* T. III, 1900, p. 50), si trovano in eguale misura nella *seconda parte*, di cui due edizioni vennero esaurite in meno di dodici anni. Essa va senza esitazione raccomandata per un primo studio della geometria analitica dello spazio, anche perchè corredata di una bella collezione di quasi 500 esercizi. — Per indicare qualche particolare del metodo di esposizione adottato segnaleremo la considerazione costante della « direzione di una retta », quella delle due distinte regioni in cui qualunque piano divide lo spazio circostante e l'uso della « rappresentazione sferica » di una superficie (la quale, fra l'altro, mena rapidamente alle formole fondamentali della trigonometria sferica). — Ottimamente inspirato fu l'A. nell' insegnare la rappresentazione analitica delle curve gobbe o delle superficie mediante uno o due parametri. Altri giudichi se quanto egli dice sulla rappresentazione delle curve nello spazio mediante due equazioni non possa far nascere qualche legittimo dubbio in chi ritiene dovere le equazioni di qualsia luogo geometrico essere soddisfatte dalle coordinate *di tutti e soli i punti* del luogo stesso.

Riguardo ai limiti posti alla materia trattata diremo che, oltre la retta ed il piano, sono studiate la sfera, l'elica cilindrica e le quadriche definite mediante le loro equazioni ridotte.

G. L.

Opere matematiche di Francesco Brioschi. Pubblicate per cura del Comitato per le onoranze a Francesco Brioschi (G. Ascoli, V. Cerruti, G. Colombo, L. Cremona, G. Negri, G. Schiaparelli). Tomo Secondo. Milano, U. Hoepli, 1902. 4.° p. VIII+456 [Prezzo L. 25].

Ricordando ai nostri lettori quanto dicemmo (*Bollettino*, T. IV, 1901, p. 85) riguardo ai criteri che vennero scelti nell' organizzare la presente edizione, nell'annunciarne il secondo volume basterà che diciamo essere in esso contenute quarantacinque memorie, tratte tutte dagli *Annali di Matematica.*

G. L.

G. Gallucci. *Saggio d'introduzione alla filosofia delle matematiche.* Caltanissetta 1902, 8.° p. 125.

È la prima parte di un' opera sistematica, che l'A., ha in animo di scrivere e colla quale egli si propone di fornire una guida, o un mezzo d' orientamento, a quei matematici che intendessero prendere cognizione di ciò che, nel campo della filosofia, si è pensato o scritto sui principî e sui metodi della loro scienza.

Dell' opportunità di un lavoro di questo genere, e del vantaggio che da esso potrebbe derivare, qualora esso fosse ben eseguito, pochi saranno certamente i matematici che non siano convinti.

L'A. tuttavia non sembra essersi reso completamente conto delle difficoltà che l' esecuzione d'un tale lavoro presenta e delle condizioni a cui esso dovrebbe soddisfare per servire veramente allo scopo suddetto.

Ciò che a lui nuoce sopratutto è la persuasione, altrettanto ferma quanto ingenua, che le ricerche sulla « filosofia delle scienze » in generale, e sulla « filosofia delle matematiche » in particolare, abbiano avuto il loro inizio col Kant, e che lo studio delle opere di questo filosofo sia più atto di quello delle opere di alcun altro, antico o moderno, per fornire ai matematici le cognizioni filosofiche che loro occorrono e le idee più chiare e più generali sulla natura dei processi logici di cui essi si servono, e dei principî da cui essi prendono le mosse.

Da tale persuasione egli è indotto a trascurare affatto di occuparsi non solo dei grandi pensatori greci (ai quali spetta incontestabilmente il merito di avere per i primi tentato un analisi delle operazioni fondamentali di definizione e di deduzione che concorrono a costituire il procedimento caratteristico delle scienze matematiche), ma anche di quelli tra i grandi filosofi moderni che, essendo stati nello stesso tempo anche grandi matematici, come Descàrtes, Pascal, Leibniz, hanno, in certo modo, un maggior diritto a essere interpellati sulle questioni che si riferiscono alle relazioni tra matematica e filosofia, o al carattere e alla portata di quei metodi matematici che essi stessi hanno contribuito a creare e di quelle verità che essi stessi hanno scoperto, o, per i primi, dimostrate e riconosciute come conseguenze di altre più evidenti o più semplici.

A fermare di preferenza la sua attenzione sulla filosofia Kantiana e sull'insieme delle speculazioni filosofiche posteriori che ad essa si riconnettono, l'A. sembra inoltre essere stato indotto da un concetto, non solo esagerato, ma anche, a mio parere, radicalmente erroneo, dell'influenza da quella esercitata sullo sviluppo dei recenti indirizzi di analisi critica dei principî della geometria.

È forse in questo punto, più che in qualunque altro, che all'esposizione dell'A. si applica la qualifica che egli stesso non dubita di attribuirle, di essere cioè « fatta alla buona e quindi ben lungi dall'avere il carattere di serietà richiesto dall'argomento » (pag. 30).

Io vorrei domandare all'A. con quali fatti egli potrebbe giustificare la sua asserzione che « la teoria Kantiana dello spazio si connette intimamente colle ricerche di geometria non-euclidea » mentre, come è noto, e come era del resto già stato osservato anche da Gauss in una sua lettera frequentemente citata, il risultato di tali ricerche, ponendo in luce la possibilità di altre « geometrie » egualmente compatibili coll'esperienza, e indipendenti dall'ammissione di alcuni dei postulati tradizionalmente accettati, e fondate anzi sulla negazione di alcuno fra essi, si presenta in diretta contraddizione coll'idea che Kant si faceva della « *apodiktische Gewissheit, das ist, absolute Nothwendigkeit* » di tali postulati (V. *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik* §§. 6) e col carattere che egli ad essi attribuiva di condizioni indispensabili per rendere l'esperienza « possibile » o per metterci in grado di « costruirla ».

Per ciò che riguarda poi le più recenti ricerche sui fondamenti del calcolo infinitesimale e sulla generalizzazione dei concetti elementari dell'algebra e della teoria delle operazioni, io vorrei che l'A. mi indicasse quale influenza esercitò il pensiero di Kant su quello del Bolzano, al riconoscimento dei cui meriti tanto nocque, e per tanto tempo, l'essersi egli trovato in contrasto colle prevalenti tendenze della speculazione filosofica rappresentata dagli epigoni del Kant, e quale traccia d'influenza Kantiana si riscontra nelle opere del Grassmann, il quale, direttamente ed esplicitamente, si riattacca al Leibniz e alle sue geniali intuizioni sulla possibilità di estendere alla geometria i vantaggi di una notazione simbolica analoga a quella che, per le varietà a una dimensione, è rappresentata dall'algebra ordinaria.

Gli appunti che si potrebbero ulteriormente muovere al presente volume per ciò che riguarda la forma estremamente sconnessa e disordinata, le troppo frequenti ripetizioni e le digressioni, che non sempre sembrano a proposito, sono prevenuti dall'A. colla dichiarazione (a pag. 120) che tale disordine fu da lui « appositamente voluto » come atto a condurre gradatamente il lettore dalle idee più semplici alle teorie filosofiche più difficili.

È da augurarsi che a raggiungere questo intento egli si serva, nella prosecuzione del suo lavoro, di mezzi alquanto più adeguati, per quanto possano essere meno facili e possano richiedere maggior sforzo di elaborazione della materia trattata.

Una piccola modificazione, d'indole filologica, che mi permetto d'indicargli, è quella di non trascrivere il termine tecnico Kantiano « *Noumenon* » con « *numeno* » ma bensì con « *noumeno* » conformandosi alle regole ordinariamente seguite nella trascrizione italiana dei nomi greci.

G. Vailati.

Compte Rendu du deuxième Congrès international des Mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 Août 1900. Procès-Verbaux et Communications publiés par E. Duporcq. Paris, Gauthier-Villars, 1902. 8.° gr., p. 455 [Prezzo fr. 16).

Nell'annunziare la comparsa del bel volume contenente gli atti del secondo congresso matematico internazionale, non possiamo a meno di deplorare che esso siasi fatto attendere per due anni. Tale lamento non è soltanto il riflesso della legittima curiosità, che per sì lungo tempo ha tormentato coloro a cui non fu concesso di prendere parte ai lavori di quella solenne adunanza di dotti, ma della osservazione che molte delle cose che quel volume contiene giunsero già per altra via nel dominio dei matematici. Ciò era d'altronde agevolmente prevedibile; chè l'umanità procede oggi alla ricerca del vero a passo di corsa e chi attende due anni a documentare mediante la stampa i propri diritti di proprietà rischia con tutta probabilità di vederli misconosciuti o negati. Possa questa osservazione, non dettata che dal desiderio di riuscire utile, servire di monito amichevole agli organizzatori dei futuri congressi!

La parte sostanziale del volume in esame risulta dalle *comunicazioni* fatte da coloro che parteciparono alla riunione. Parecchie di esse, come potevasi prevedere, hanno lo scopo di dare notizia preventiva di lavori venturi o di compendiare e divulgare risultanze già stabilite. Tali sono gli scritti dell'Amodeo *Sopra le curve algebriche dal punto di vista delle loro gonalità*, dell'Autonne *Sui gruppi d'ordine finito contenuti nel gruppo lineare quaternario regolare*, del Capelli intorno a *Le iper-aritmetiche e l'indirizzo combinatorio dell'aritmetica ordinaria*, del Galdeano *Sulla critica in matematica*, di H. von Koch *Sulla distribuzione dei numeri primi*, di M. d'Ocagne *Sulla nomografia*, del Padé *Sui recenti sviluppi della teoria delle frazioni continue*, di F. J. Vaes *Sopra i solidi regolari e semi-regolari* e del Veronese intorno *I postulati della geometria nell'insegnamento.* Semplici voti vennero manifestati dal Maillet e dal Méray: quello a favore della pubblicazione di certe informazioni bibliografiche, questi in pro dell'*Esperanto.* La *Nota* del Fujisawa *Sulla matematica degli antichi Giapponesi*, fa desiderare più estese informazioni sull'argomento, dalle quali risulti, non solo quanto lavoro matematico siasi compiuto dai popoli dell'estremo Oriente, ma anche se e quali influenze occidentali questi possono avere subite; invece la comunicazione del Gallardo sopra *Le matematiche e la biologia*, dà notizia delle applicazioni sino ad oggi fatte alla zoologia ed alla botanica, non di veri e propri procedimenti matematici, ma piuttosto di metodi statistici.

Fra le comunicazioni più elaborate ed estese sopra argomenti speciali segnaleremo quelle di A. Padoa sopra *Un nuovo sistema irriducibile di postulati per l'algebra* e sopra *Un nuovo sistema di definizioni per la geometria non euclidea*, le quali rappresentano l'indirizzo italiano degli studi sopra i fondamenti logici delle scienze esatte; delle altre ci è forza limitarci a trascrivere qui il semplice titolo: Hancock, *Osservazioni sopra i sistemi modulari del Kronecker;* Perrier, *Sul covariante risolvente della forma binaria del* 5.° *ordine;* Dickson, *I sistemi noti di gruppi semplici ed il loro interisomorfismo;* Artemas Martin, *Metodo per calcolare il logaritmo di un numero* e *Metodo rigoroso per trovare dei biquadrati la cui somma sia un biquadrato;* Tikhomandritzky, *Sull'annullarsi delle funzioni* θ *a più variabili;* Mittag-Leffler, *Sopra un'estensione della formola di Taylor;* Jahnke, *Nuovi sistemi ortogonali per le derivate delle funzioni* θ *a due variabili;* Drach, *Sopra gl'integrali completi delle* *equazioni a derivate parziali con due variabili;* Lovett, *Sulle trasformazioni di contatto fra rette e sfere;* Macfarlane, *Applicazione dell' analisi spaziale alle coordinate curvilinee;* Stringham, *Trasformazioni ortogonali nello spazio ellittico od iperbolico;* Jamet, *Sul teorema di Salmon relativo alle cubiche piane;* Boccardi, *Osservazioni sul calcolo delle perturbazioni proprie dei piccoli pianeti;* Hadamard, *Sulle equazioni a derivate parziali a caratteristiche reali;* Volterra, *Sopra le equazioni a derivate parziali.*

Mentre queste *comunicazioni* per la specialità e varietà dei temi che trattano interesseranno questa l'uno e quella l'altro de' nostri lettori, le *conferenze* attrarranno l'attenzione di tutti. Infatti a tutti riuscirà dilettevole ed utile il seguire M. Cantor quando espone le proprie idee *Sulla storiografia delle matematiche* e V. Volterra quando, esaminata l'opera scientifica di Brioschi e Betti e Casorati, assurge a considerazioni generali sui tre modi principali sotto cui possono considerarsi le questioni d'analisi; l'apprendere da un matematico di primo ordine (il Poincaré) quale sia *L' ufficio dell' intuizione e della logica nella investigazione matematica* e dal Mittag-Leffler alcune idee ed opinioni del Weierstrass, consegnate nel carteggio che questi tenne con Sofia Kowalewski. A nessuno poi sfuggirà la capitale importanza della splendida conferenza dell' Hilbert *Sui problemi matematici futuri;* essa è così profonda e suggestiva che basterebbe da sola ad assicurare al volume che esaminiamo un posto eminente nella letteratura scientifica. Tale scritto, che ivi si presenta sotto veste francese, venne già prima due volte pubblicato nell'originale tedesco ed è poi stato tradotto in inglese, onde tutto fa sperare che la sua benefica influenza si eserciterà su tutto l'universo matematico. Lo studio di esso va raccomandato ai giovani delle nostre Università; la versione francese che ne possediamo, rende superflua una italiana; ma sarebbe desiderabile che la prima venisse riprodotta in qualche nostro periodico, affinchè riuscisse più probabile che anche l'Italia partecipasse alle battaglie incruenti di cui l'Hilbert, da grande capitano, ha delineati gli scopi e tracciati i piani.

G. L.

G. Scheffers. *Einführung in die Theorie der Flächen.* Mit vielen Figuren im Text. Leipzig, Veit und Co. 1902, 8.° p. X + 518 [Prezzo Mk. 14].

Questo nuovo volume dell' egregio professore del Politecnico di Darmstadt rappresenta la seconda parte dell'opera di cui or fa un anno (v. *Bollettino,* T. III, 1901, p. 44-46) annunziammo gl' inizî. Mentre la *prima* sezione di essa ha per tema le proprietà infinitesimali delle serie semplicemente infinite di punti, appartenenti o non ad un piano, la *seconda* concerne la geometria sopra una superficie qualunque; se in avvenire l'A. vorrà aggiungervene una *terza* avente per soggetto i sistemi di superficie e le coordinate curvilinee nello spazio, la letteratura matematica sarà in possesso di un nuovo pregevole trattato completo di geometria infinitesimale.

I criterì in base ai quali venne architettato il volume che oggi annunziamo sono sostanzialmente i medesimi che presiedettero alla redazione di quello che lo precedette, e lo stile di quello non differisce da quello che procurarono a questo accoglienze così generalmente festose: onde non è necessario di avere doti di profeta per predire al secondogenito la sorte bella che ebbe il primo.

Paragonata con le trattazioni più antiche dello stesso soggetto, l'opera dello Scheffers si ravvisa per più elementare, non solo pel programma più modesto che svolge e pei mezzi analitici che sfrutta, ma anche per lo stile meno conciso in cui è scritta, pei numerosi esempî addotti e per le molte accurate ed espressive figure di cui va adorna; fra queste vanno particolarmente notate quelle che illustrano la soluzione del problema (dallo Scheffers trattato con amore speciale) della rappresentazione di una superficie su di un piano.

L'opera stessa si distingue poi anche per l'applicazione vastissima ivi fatta di concetti, di metodi, di proposizioni dovute a S. Lie, in particolare per l'incessante considerazione delle superficie singolari generate da rette o curve di lunghezza nulla; anzi elaborando siffatte idee l'A. è giunto (v. pag. 229 e 243) a conseguenze interessanti su cui va fissata l'attenzione dei lettori.

Abbondanti e generalmente degne di fede sono le notizie storiche sparse per tutto il volume. Ci sia lecito però di ricordare come il Beltrami abbia scritto un magistrale riassunto storico della teoria delle superficie d'area minima, al quale attinse poi a larga mano il Darboux appunto nel passo che l'A. ricorda a pag. 257; non ripeteremo qui le ragioni (v. *Bibliotheca mathematica*, 3.ª Serie, T. II, p. 401-402) per cui a nostro avviso il nome del Beltrami abbia diritto di essere annesso a quel teorema sulla torsione delle asintotiche che reca di consueto il nome di Enneper, e piuttosto osserveremo che la rappresentazione sferica di una superficie era stata concepita da O. Rodrigues, prima che Gauss ne ponesse in luce tutta la fecondità.

Vanno ancora notate due piccole sviste *che l'autore stesso ha rilevate e corrette* dopo la pubblicazione del suo libro; e cioè: 1.º a pag. 226 devono sopprimersi i periodi che occupano le linee 11-7 dal basso (« Man findet.... zusammen »); 2.º a pag. 393, dopo la linea 9.ª va aggiunto « die bei Einführung neuer Parameter ungeändert bleiben ».

La ricca e ben ordinata collezione di formole, con cui chiudesi il volume, rende questo ancora più atto a fungere da *vade-mecum* per chi voglia proseguire gli studî sulla disciplina che lo Scheffers insegna ad ammirare ed amare (1).

G. L.

E. D' OVIDIO. *Geometria analitica. Terza edizione riveduta e corretta.* Torino, Bocca, 1903, 8.º pag. XVI+529. [Prezzo L. 12].

Quest' opera rappresenta, nella sua forma definitiva, l' insegnamento che l' illustre autore impartisce da circa un trentennio in una delle più affollate università d' Italia; onde non si commette esagerazione valutando a quattro migliaia il numero di coloro che furono da essa resi edotti dell' essenza del potente metodo cartesiano. E un' opera, quindi, così favorevolmente nota in Italia che ci sembra superfluo il dar notizia del suo piano e della sua fisonomia; possa il nostro cenno attirare su di essa l' attenzione degli stranieri che, spesso, trattando *come nuove* questioni ivi completamente risolute, mostrarono di ignorarne persino la esistenza!

La nuova edizione differisce dalla precedente per molti ritocchi nei particolari e per un giudizioso spostamento; cioè, l' antico capitolo, intitolato *Teorie ausiliarie* e contenente gli elementi della teoria delle forme lineari e quadratiche, è passato in appendice, e così non turba, con considerazioni algebriche, lo svolgimento della teoria dei luoghi di 1.º e 2.º grado nel piano e nello spazio.

Una cosa avremmo desiderato; ed è che l' autore avesse modificata la sua esposizione della teoria delle coordinate polari nel senso da noi indicato in alcune *Osservazioni* pubblicate nel T. XV (1899) del *Periodico di matematiche per l' insegnamento secondario* e di cui facemmo molte applicazioni nell' opera *Specielle algebraische und transscendente Kurven*. Questo desiderio appare tanto più giustificato ed esente da qualsia personalità notando che il medesimo procedimento di esposizione da noi caldeggiato sembra adombrato nella *Analytische Geometrie* (Leipzig, 1882, p. 52) del Baltzer, fatto questo che solo recentemente avvertimmo.

G. L.

---

(1) Siaci lecito aggiungere un' osservazione sopra un passo del Vol. I. A pag. 282 l' A. prova che *le sole superficie sviluppabili su un piano sono i coni, i cilindri e le superficie costituite dalle tangenti di una curva sghemba*. Ora conviene avvertire che questo teorema vale *purchè* si ammetta di considerare soltanto le superficie che in ogni loro punto hanno di regola un determinato piano tangente; avendo il Wiener (*Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, T. II, Leipzig, 1887, p. 29-35) offerto l' esempio di una superficie che è sviluppabile su un piano, quantunque non sia rigata.

M. Godefroy. *Théorie élementaire des séries. Limites. Séries à termes constants. Séries à termes variables. Fonction exponentielle. Fonctions circulaires. Fonction gamma. Avec une préface de* L. Sauvage. Paris, Gauthier-Villars, 1903, 8.º pag. VIII+266. [Prezzo fr. 9].

L'A., già favorevolmente noto per una monografia sulla funzione Γ pubblicata due anni or sono, si è proposto con questo suo libro di fornire agli studiosi un trattato sopra la teoria delle serie corrispondente alle esigenze di rigore che ha la scienza moderna. E si può, senz' esitare, asserire che egli seppe completamente raggiungere il suo scopo. Le cure che egli pose nel raccogliere il materiale, nell'elaborarlo e nell'esporre le varie teorie sotto la forma più facile e corretta rendono accessibile ed utilissimo il suo libro a chiunque possiede gli elementi del calcolo infinitesimale; le esatte citazioni delle fonti e le numerose applicazioni indicate come esercizî serviranno di incentivo pel lettore ad ulteriori studî e gli somministreranno i mezzi per proseguirli. Qualcuno forse lamenterà che l'A. abbia escluso dal suo discorso le quantità immaginarie, rendendo così impossibile di stabilire certe relazioni fondamentali, quali sarebbero quelle esistenti fra la funzione esponenziale e le funzioni circolari, relazioni che hanno una profonda analogia con quelle fra le funzioni esponenziali e le iperboliche, di cui egli fa cenno. Altri lamenterà invece di non trovare nel libro che annunziamo le proposizioni fondamentali sopra i prodotti infiniti, le quali sembrano indispensabili per giustificare l'intervento (v. p. es. pp. 164, 198 es. 1ª, 204) di siffatte espressioni analitiche. Ma sono queste lacune che forse l'A. rimedierà in occasioni, che è da augurarsi il favore del pubblico gli fornisca in un prossimo avvenire.

Percorrendo le pagine del libro del Godefroy, in cui tante belle formole sono stabilite con calcoli d'una perfetta eleganza, il nostro pensiero ricorreva quasi involontariamente alla Iª Parte dell'*Introductio in analysin infinitorum* di Eulero; e ci veniva fatto di felicitarci che alcuno fosse ritornato ai procedimenti di questo sommo, mostrando che essi, se hanno bisogno di essere resi più rigorosi, vanno tenuti in grande onore, anche in un'epoca, come la nostra, ove di regola si tende di sostituire ragionamenti a calcoli; essi infatti possono rendere inapprezzabili servigi a tutti coloro che li adoperanno con l'abilità dei grandi, dei quali il sig. Godefroy ha tanto opportunamente rievocato il ricordo.

G. L.

Annuaire pour l'an 1903 publié par le Bureau des longitudes. Paris, Gauthier-Villars 16.° p. VIII + 668 + 53 + 10 + 4 + 34 + 38 [Prezzo fr. 1,50; franco 1,85].

Non ripeteremo per questo volume della celebre collezione pubblicato dall' Ufficio delle Longitudini le lodi che vennero tributate ai precedenti e che esso merita non meno di questi. Ma ci limiteremo a segnalare le « Notices scientifiques » di cui va adorno:

RADAU, *Étoiles filantes et Comètes.*
JANSSEN, *Science et poésie.*
» , *Sur les travaux exécutés à l'Observatoire du sommet du Mont Blanc.*
Discours prononcés aux funérailles de A. Cornu et H. Faye.

G. L.

Elementi di geometria projettiva. Appunti delle lezioni dettate nella R. Università di Napoli dal Prof. FEDERICO AMODEO. *2.ª edizione accresciuta e migliorata.* Napoli, L. Alvano, 1902, p. VII + 488 [Prezzo L. 10].

Introduzione.

Parte Prima. Forme di 1.° ordine. I. Forme semplici. II. Elementi immaginari nelle forme semplici. III. Forme di 2.ª e di 3.ª specie.

Parte Seconda. Forme di 2.° ordine. I. Proprietà projettive delle forme di 2.° ordine ad una dimensione. II. Proprietà polari delle forme di 2.° ordine.

M. HAMBURGER. *Gedächtnissrede auf Immanuel Lazarus Fuchs (geb. am 5. Mai 1833, gest. am 26. April 1902). Gehalten im mathematischen Verein der Universität Berlin am 5. Mai 1902.* Mit dem Bildniss des Verstorbenen sowie einem Verzeichnis seiner Schriften. Leipzig und Berlin. B. G. Teubner, 1902, 8.° p. 16 [Prezzo Mk. 1].

Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft. Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft. I. *Jahrgang.* Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1902, 8.° p. IV + 66 [Prezzo Mk. 2,40].

Contiene articoli di Hauck, Hensel, Kneser, Knoblauch, Lampe, Weingarten ed altri.

Lezioni sulla teoria della risoluzione delle equazioni di V grado, tenute nella R. Università di Messina dal Prof. GIULIO VIVANTI *e raccolte dagli studenti. Corso di Matematiche superiori dell'anno 1901-02.* Litogr. 4.° p. 156.

Introduzione. Teoria generale delle operazioni. Le sostituzioni lineari. Rappresentazione geometrica delle sostituzioni lineari sul piano e sulla sfera. Costruzione analitica dei gruppi di rotazioni. Rappresentazione sul piano dei gruppi finiti di rotazioni. Gruppi omogenei e forme invarianti. Teorie algebriche. Rappresentazione geometrica dell' equazione di 5.° grado; riduzione dell' equazioni principali all' equazione dell' icosaedro. Risoluzione dell' equazione del 5.° grado, e di quelle di 3.° e 4.° grado. Risoluzione dell' equazione dell' icosaedro.

NECROLOGIO

P. G. TAIT

Pietro Guthrie Tait nacque a Dalkeith vicino ad Edinburgo il 28 Aprile 1831. Esauriti gli studî elementari e secondarî, entrò, assieme a Clerk Maxwell, nell'Università di Edinburgo, donde uscì *senior wrangler* nel 1852. Due anni dopo ottenne il posto di professore di matematiche nel Collegio reale di Belfast, ove trovò nell'Andrew un collega che lo associò alle proprie ricerche fisico-chimiche sulla compressione dei gas. Ma, sin dall' anno prima, l' apparizione delle *Lectures of Quaternions* dell' Hamilton aveva segnato un marchio indelebile nella sua vita scientifica: chè da quell' istante egli ammirò il nuovo metodo e si propose di svolgerlo ed illustrarlo: i lettori che ricordano avere egli dedicato ad esso molte importanti memorie e due trattati (uno in collaborazione col Kelland) vedranno come egli abbia fedelmente mantenuto il preso impegno.

Quando nel 1860 il Forbes lasciò la cattedra di filosofia naturale, che occupava nell' Università di Edinburgo, il Tait fu chiamato a succedergli, quantunque fra i concorrenti si trovasse il Maxwell: tale carica egli tenne quasi fino alla morte, e così istruì nel sano geometrizzare un numero di discepoli che viene valutato a dieci migliaja.

Ricorderemo ancora che il Tait collaborò con William Thomson a quel *Treatise on natural Philosophy,* che fu detto « il libro dei *Principia* del Sec. XIX » e che gli studenti delle Università inglesi chiamano famigliarmente « T e T′ »; inoltre egli, con alcune belle ricerche sopra le proprietà delle curve chiuse, arrecò notevoli progressi alla topologia delle linee piane.

Di altre investigazioni di fisica da lui compiute, come delle sue ammirabili qualità di popolarizzatore, non è il caso di fare qui più di un cenno fugace.

Nell'Aprile 1901 il Tait per ragioni di salute chiese ed ottenne il collocamento a riposo. Morì il 4 Luglio dello stesso anno: il giorno precedente la sua morte aveva eseguito dei calcoli sui quaternioni, argomento al quale aveva divisato di dedicarsi completamente, dopo di avere abbandonato l'insegnamento (1).

NOTIZIE

Biblioteca scolastica. — C. Alasia. *I complementi di geometria elementare.* Manuale Hoepli, p. XV+244, 1903. [I. Vettori. II. Generalità sui poliedri. III. Misura dei poligoni e dei poliedri. IV. Simmetria. V. Spostamento delle figure. VI. Omotetia. VII. Similitudine. VIII. Massimo e minimo in geometria. IX. Trasversali. X. Potenza d'un punto rispetto ad un cerchio, asse radicale, centro radicale. XI. Involuzione. XII. Polo e polare. XIII. Inversione. XIV. Le sezioni del cono].

H. Vollprecht. *Das Rechnen, eine Vorbereitung zur allgemeinen Arithmetik. Regeln und Formen des Rechnens. Vergleiche mit der allgemeinen Arithmetik und Hinweise auf Geometrie und Physik.* Leipzig und Berlin. Teubner, 1902, 8.° p. 44.

*
* *

Documenti per la storia della matematica nel Medio Evo e nel Rinascimento. — Il testè uscito XIII Fascicolo delle *Abhandlungen zur Geschichte der math. Wissenschaften* contiene la seconda parte

(1) Per più minuti particolari si ricorra agli articoli necrologici di G. Chrystal pubblicato in *Nature,* 25 Luglio 1901, e di di A. Macfarlane, inserito nel Vol. XV (Juli 1902) della *Physical Review.*

del lavoro di M. Curtze di cui già tenemmo parola (v. *Bollettino*, T. V, 1902, p. 128). Essa comprende: I. La riproduzione (accompagnata da una fedele traduzione tedesca) della *Practica geometriae* di Leonardo Mainardi, dotto cremonese vissuto nella seconda metà del XV Sec.; di quell'opera si conoscono tre mss., uno attualmente in possesso della Biblioteca universitaria di Gottinga, gli altri che facevano parte della collezione Boncompagni; tutti vennero utilizzati dal Curtze. II. Un'opera anonima, scritta nel 1545, recante lo strano titolo: *Algebrae Arabis Arithmetici viri Clarissimi Liber ad Ylem Geometram praeceptorum suum*, e conservata nella Biblioteca di Gottinga; secondo le fondate congetture del Curtze, Yleo non sarebbe che Euclide; comunque, se può in alcuno sussistere dubbio riguardo alla personalità del maestro, non se ne può nutrire riguardo all'importanza dell'opera del discepolo per la storia dell'algebra (1).

*
* *

Un' importante memoria di Abel venne di recente scoperta dal Prof. Mittag-Leffler e pubblicata, in occasione del centenario, nel T. XXVI degli *Acta mathematica*. È la seconda parte delle celebri « Recherches sur les fonctions elliptiques »; essa era, al pari della prima, destinata al *Giornale di Crelle*, ma per ragioni ignote, non venne accolta, nè in questo periodico, nè in alcuna delle edizioni delle opere complete del celebre norvegese. Essa forma con la prima un'opera di tale importanza che la sua pubblicazione immediata avrebbe subito assicurato ad Abel il posto di fondatore della teoria delle funzioni ellittiche.

*
* *

Carteggio di Leibniz. — Il Vol. XIII (1902) del periodico polacco *Prace matematyczno-fyziczne* contiene la seconda ed ultima parte dell'epistolario di Leibniz col Kochanski, che segnalammo ai nostri lettori (v. *Bollettino*, T. IV, 1901, p. 127).

*
* *

Congresso internazionale di scienze storiche. — Questa solenne adunanza di dotti (cfr. questo *Bollettino*, T. IV, 1901, p. 126), che non potè avere luogo nell'epoca prefissata, avrà luogo, sotto l'Augusto patrocinio di S. M. il Re d'Italia, nei giorni 2-9 del prossimo Aprile. Il Comitato organizzatore della Sezione VIII (Storia delle scienze ma-

---

(1) Le precedenti linee erano già scritte quando ci giunse il triste annunzio della morte del Curtze, avvenuta a Thorn il 3 Gennaio in seguito a un attacco di malattia di cuore; il dotto estinto era nato il 4 Agosto 1837.

tematiche, fisiche, naturali e mediche) è costituito dai Professori P. Blaserna, V. Cerruti, P. Giacosa, G. Loria e V. Volterra; le numerose adesioni ricevute e le importanti comunicazioni annunziate danno sin d'ora affidamento di un completo successo.

*
* *

Il III Congresso internazionale dei matematici verrà tenuto a Heidelberg in principio di Agosto del 1904; il lavoro preparatorio venne già iniziato e procederà sotto la direzione del Prof. H. Weber.

*
* *

Le benemerenze di J. P. de Gua de Malves vennero per molto tempo disconosciute; il grave errore da lui commesso col negare, nella sua opera principale (*Usage de l'Analyse de Descartes*, Paris 1740), l'esistenza delle cuspide di 2.ª specie, fece sì che persino Chasles non ne apprezzasse il valore. È merito di Brill e Nöther prima e del Cantor poi di avere rilevate le singolari qualità che essa possiede, in particolare di avere notato come al De Gua, non al Maclaurin, appartenga la scoperta del teorema « Ogni retta congiungente due flessi di una cubica piana taglia la curva in un terzo flesso ». A completare la riabilitazione del citato geometra francese P. Sauerbeck ha dedicato un prolisso lavoro (*Einleitung in die analytische Geometrie der höheren algebraischen Kurven nach den Methoden von Jean Paul de Gua de Malves. Ein Beitrag zur Kurven-Dis kussion*) che riempie il XV fascicolo delle *Abhandlungen zur Gesch. der Math.* (Leipzig, Teubner, 1902). Esso varrà a soddisfare i desiderî di coloro che non possiedono l'opera originale (che è ormai una rarità bibliografica), ad aiutare chi la possiede nell'intenderne lo stile antiquato in cui questo è scritto, finalmente a porgere particolareggiate applicazioni del metodo cartesiano, utili specialmente a coloro che ne hanno da poco intrapreso lo studio.

*
* *

Amici e corrispondenti di G. Galileo furono Alessandra Bocchineri « che fece palpitare di senile affetto il cuore sempre giovane di Galileo », ed i suoi due mariti Francesco Rasi e Giovanfrancesco Buonamici. Il Prof. Favaro ad essi ha dedicata una dotta comunicazione fatta al R. Istituto Veneto (*Atti*, T. XLI, Parte II, 1902), piena di nuovi particolari concernenti il celebre astronomo, i suoi amici, ed i suoi tempi.

*
* *

I DOCUMENTI DEL PROCESSO DI GALILEO vennero di recente esaminati dal Prof. Favaro, il quale, in un eruditissimo lavoro presentato all'Istituto Veneto (v. *Atti*, T. XLI, Parte II, 1902), ne ha narrato le fortunose vicende, ha ricordati coloro che prima di lui, più o meno completamente, li pubblicarono e ha dato ragione del metodo con cui verranno riprodotti nella edizione nazionale delle opere del celebre Pisano.

*
* *

NUOVI MODELLI DI GEOMETRIA. — La collezione Brill-Schilling di modelli di geometria da tempo ne conteneva (Serie IV. N. *a*, *b*, *c*, *d*) alcuni relativi alle cubiche gobbe, costruiti dal Lange. Ora essa si è arricchita di altri (Serie XXVIII, N. 6) confezionati dal Dr. Walther Ludwig e riferentisi, non solo alle curve del terz'ordine in genere, ma anche a quella speciale ellisse cubica (*Horoptercurve*, secondo la denominazione di Helmholtz) che s'incontra nell'ottica fisiologica. Va notata una radicale innovazione adottata dal Ludwig dietro consiglio del Prof. Schilling. Mentre finora si usava tracciare le curve mediante fili stesi sopra superficie di gesso, di legno o di altra materia opaca, ora vennero costruiti in celluloide i cilindri contenenti le curve considerate, il che permette di seguire l'andamento di queste comunque venga disposto il relativo modello. Per più minuti particolari rimandiamo alla monografia del Ludwig, *Die Horoptercurve, mit einer Einleitung in die Theorie der kubischen Raumkurve* (Mathem. Abh. aus dem Verlage mathem. Modelle von M. Schilling in Halle a. S., Neue Folge, N. 3, 1902).

*
* *

PROGRAMMA DI CONCORSO. — L'Accademia di Scienze fisiche e matematiche della Società Reale di Napoli conferirà un premio di *lire mille* all'autore della migliore memoria che porterà qualche contributo notevole alla teoria invariantiva della forma ternaria biquadratica, preferibilmente per quanto riguarda le varie condizioni di spezzamento in forme inferiori.

Le memorie dovranno essere scritte in italiano, latino o francese ed essere inviate, anonime, al Segretario dell'Accademia non più tardi del 30 Giugno 1904.

Marco Bertolone, Gerente

Genova - Tipografia R. Istituto Sordo-muti - 1903.

ANNO VI. APRILE, MAGGIO E GIUGNO 1903.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. 6, per l'estero Fr. 7.50. Numeri separati L. 2 caduno. — Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

GIAMBATTISTA CARACCIOLI

SCHIZZO BIOGRAFICO

DI

GINO LORIA

Nel mio libro sopra le curve piane speciali (¹) ed in altre occasioni (²) io ho fatto cenno d'una operetta di geometria, pubblicata nel 1740, non meritevole dell'oblio che da tempo la ricopre. Chi ne fu l'autore? quale fu la professione di questo? quali gli scritti? A tali questioni indarno si chiedono adeguate risposte al Poggendorff ed al Riccardi: al loro silenzio valgano a porre riparo le linee seguenti.

(¹) *Specielle algebraische und transscendente ebene Kurven*, (Leipzig, 1902), p. 250, 266, 271, 318, 416, 427.

(²) V. questo *Bollettino*, T. V, 1902, p. 18.

Giambattista Caraccioli nacque a Napoli addì 29 Decembre 1695 (1) e, destinato alla carriera ecclesiastica, venne ascritto all' ordine de' Teatini. Dopo di avere insegnato filosofia nell' Istituto teatino della patria sua, nel 1723 passò Lettore di Teologia a Firenze e nel 1731 fu chiamato a Pisa per dettare logica e filosofia nell' Università già illustrata da Galileo, e tale ufficio egli tenne durante un decennio. Appunto verso il termine di tale periodo egli compose il lavoro di geometria a cui nell' esordio abbiamo fatto allusione (2), lavoro che compendia alcune lezioni da lui tenute nella Università di Pisa.

Per giudicare equamente tale scritto fa mestieri ricordare che dalla comparsa della *Géométrie* di Descartes (1687), oltre ai commenti di coloro che la ripubblicarono o tradussero, sulla geometria analitica era stato pubblicato un solo manuale, cioè il *Traité analytique des sections coniques* del marchese de l' Hòspital, a cui l' eleganza della forma, più che l' originalità dei concetti, assicurò uno straordinario successo. L' *Usage de l'analyse de Descartes* del de Gua — a cui un recente lavoro sembra promettere una nuova giovinezza (3) — apparve l'anno istesso in cui il Caraccioli diede fuori la sua opera. Ora mentre le fatiche del ben noto abate francese concernono esclusivamente le curve algebriche, quelle del teatino italiano abbracciano eziandio le trascendenti; mentre il primo, per iscopi geometrici, affinò lo strumento che ancora rozzo uscì dalle mani di Cartesio, il secondo ricorse all' algebra soltanto nelle circostanze e nella misura in cui ciò gli era indispensabile. Inoltre questi ampiamente e metodicamente applicò un concetto che ai suoi tempi era importante, quello cioè di aumentare il numero delle curve speciali generalizzando le equazioni rappresentatrici di quelle già note.

Premesso un breve esordio inteso a dimostrare quale e quanta utilità provenga a chi voglia indagare le leggi governatrici dei moti e delle forze dal conoscere le qualità delle curve, il Caraccioli espone (Cap. I) come queste traggano origine dai problemi locali (semplicemente indeterminati) e (Cap. II) quale ne sia la ripartizione [in *geometriche* (algebriche) e *meccaniche* (trascendenti)] proposta da Cartesio. Nel successivo egli entra veramente in materia: riassunte (Cap. III e IV) le proprietà essenziali delle coniche, il Caraccioli mostra come parabola, iperbola, ellisse e circolo siano ciascuna punto di partenza

---

(1) A. F. VEZZOSI, *I scrittori de' Cherici regolari detti Teatini*, Parte Prima, Roma, 1780, p. 200-208.

FABRONI, *Historia Academiæ Pisanæ*, T. III, (Pisis, 1795, p. 220-222).

(2) JOANNIS BAPTISTÆ CARACCIOLI, clerici regularis in Pisana Academia Publici Philosophiæ Professoris, *De lineis curvis liber* (Pisis, MCCXL), 8.°, 8 pag. non numerate + XII + 210, con 13 tav. lit.

(3) V. *Bollettino*, T. 1903, p. 31.

di una serie illimitata di curve aventi ordinatamente le equazioni seguenti:

$$y^{m+n} = a^m x^n, \quad x^m y^n = a^{m+n}, \quad y^{m+n} = \frac{a^m}{b^m}\left(b \pm x\right)^m x^n;$$
$$y^{m+n} = \left(a \pm x\right)^m x^n,$$

e di cui egli espone diffusamente molteplici proprietà. Similmente (Cap. V) partendo dalla cissoide di Diocle

$$y^3 = a\,x^2 - y\,x^2$$

si giunge alle curve d'ordine $m+1$

$$y^{m+1} = a\,x^m - y\,x^m$$

e dalla concoide di Nicomede

$$\rho - \frac{a}{\cos\omega} = l$$

alle curve algebriche

$$\rho^m - \left(\frac{a}{\cos\omega}\right)^m = l^m$$

Sorvoliamo sul Cap. VI — semplice illustrazione di un passo della *Géométrie* cartesiana — e notiamo che nel seguente il Caraccioli considera la nota *quadratrice geometrica* dell'Ozanam (1) come la curva che nasce applicando al circolo $z = \sqrt{2\,a\,x - x^2}$ la trasformazione $a\,x = y\,z$; applicandola invece all'iperbola equilatera $z = \sqrt{2\,a\,x + x^2}$ si giunge ad una nuova curva, che l'autore propone di chiamare *quadratrice iperbolica*, per distinguerla dalla *quadratrice circolare* dell' Ozanam.

Col Cap. VIII — relativo alla spirale archimedea ed a tutte quelle rappresentabili in coordinate polari mediante equazioni del tipo $\rho^{m+n} = a^m\,\omega^n$ — si penetra nel dominio trascendente; nel quale si rimane percorrendo il seguente, ove l'A. propone di considerare le infinite curve

$$\rho\,\frac{\cos\omega}{a} = 1 - \left(\frac{2\,\omega}{\pi}\right)^{\frac{m}{n}},$$

come generalizzazioni della quadratrice di Dinostrato (corrispondente all' ipotesi $m = n$): pure nel campo trascendente si aggira l' ultimo Cap., ove sono compendiate le proprietà delle altre curve: cicloidi ed epicicloidi, logistica e spirale logaritmica, e sinusoide (« cycloide dimidiata », secondo la nomenclatura dell' autore).

(1) Cfr. una mia nota in *Bibliotheca mathematica*, 3.a Serie, T. III, 1902, p. 127.

Se si riflette che codesta opera del Caraccioli è anteriore di otto anni a l'*Introductio in analysin infinitorum* dell'Eulero (il cui II Vol. fu per molti anni il testo generale per lo studio della geometria analitica) non recherà meraviglia se esso valse ad accrescere l'estimazione in cui era tenuto l'autore presso i Reggitori dello Studio di Pisa ed a consigliarli a trasferirlo nel 1741 alla cattedra di Aritmetica ed Algebra e ad affidargli poco dopo gl'insegnamenti di Ottica, Catottrica e Diottrica. Con questi ultimi è probabilmente collegata l'opera *Gnomonice*, dal Caraccioli pubblicata a Pisa nel 1756 (in 4.°, pag. 104) e su cui non giova qui arrestarsi; mentre si connettono alle sue lezioni di matematica pura altre due pubblicazioni scientifiche che recano il suo nome e di cui ora diremo qualchecosa.

Quella di esse che è di più antica data (1) consta di dieci problemi varii per natura, importanza, interesse e difficoltà, risoluti con i metodi classici ed esposti con lo stile euclideo.

Il primo consiste nella costruzione di un *quadrilatero inscrittibile* determinato dai suoi lati; è noto che Carlo Emanuele di Savoja lo aveva proposto verso la fine del Sec. XVI al suo matematico e che questi riuscì a risolverlo (2); è pur noto che il Legendre l'ha popolarizzato esponendone ne' suoi *Éléments de géométrie* (3) una soluzione che può dirsi definitiva e perfetta; e che M. Chasles diede ad esso una certa celebrità dimostrando, nella Nota XII dell'*Aperçu historique*, che gl' Indiani se ne erano occupati e non invano.

Il Caraccioli — che sembra ignorare i suoi predecessori — lo risolve in modo diverso dal consueto; cioè, invece di calcolare direttamente una delle diagonali della figura cercata od il raggio del cerchio in cui essa è inscrittibile, egli calcola la lunghezza della perpendicolare calata da uno dei vertici sopra uno dei lati non passanti per esso.

Apparentemente analogo al precedente è il problema, di cui l'autor nostro fa cenno in seguito, di costruire un *quadrilatero circoscrittibile* di lati conosciuti; ma in realtà questo differisce sostanzialmente da quello per essere in generale impossibile, ma, se solubile, indeterminato.

Il secondo problema concerne l'ellisse; è biquadratico e viene risoluto con i procedimenti classici escogitati durante il periodo cartesiano.

Più umile è lo scopo del terzo; consiste cioè nel risolvere il sistema di equazioni seguente:

$$x^2 + y^2 - \left(x + y\right) = 78, \quad xy + \left(x + y\right) = 39.$$

(1) J. B. CARACCIOLI, clerici regularis in Publica Pisana Academia arithmeticæ, et algebræ universæ, atque opticæ dioptricæ catoptricæ Professoris *Problemata varia mathematica. Accedit Examen machinæ motus perpetui* (Florentiæ, MDCCLV) 4.°, p. XVI + 136, con 10 tav. lit.

(2) J. B. BENEDICTIS, *Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber* (Aug. Taurin. 1585).

(3) Nota V.

Due facilissimi problemi locali portano i numeri quarto e quinto; sono risoluti uno da una parabola e da un' iperbola l' altro, curve di cui il Caraccioli trova e discute le equazioni. Più elevato ed interessante è il tema del Problema VI ove il Caraccioli vuole spiegare come mai due circoli di un piano, benchè siano rappresentati da due equazioni di secondo grado fra le coordinate cartesiane di un punto, non si taglino che in due soli punti. Il conseguente paradosso è degno di stuzzicare la curiosità dei geometri, onde il fine propostosi dal Caraccioli è indubbiamente notevole ed alto; ma per raggiungerlo erano necessarie ali ben più robuste di quelle di cui natura avevalo fornito. Onde egli si limita a notare come, cercando le ascisse dei punti comuni a due circoli, sempre si giunga ad un'equazione quadratica: in tal modo veniva stabilito il pieno accordo fra l'algebra e la geometria, ma il vero nodo della questione veniva rimosso, ma non sciolto; ed in tale stato doveva rimanere fino alla comparsa di Poncelet.

La costruzione delle normali condotte ad una parabola da un punto del suo piano forma oggetto della questione settima; mentre le due ultime sono problemi di inserzione che si possono enunciare come segue: « Per un punto di $\left\{\begin{array}{l}\text{una parabola}\\ \text{un cerchio}\end{array}\right\}$ condurre una retta tale che il segmento di essa limitato dai punti d' intersezione di essa con la curva e $\left\{\begin{array}{l}\text{l'asse}\\ \text{un diametro}\end{array}\right\}$ abbia una lunghezza data ». Il Caraccioli le risolve algebricamente, costruendo poi graficamente le radici delle corrispondenti equazioni.

Nell' ultimo problema trattato il Caraccioli abbandona l'analisi finita per considerazioni infinitesimali; e — sotto il titolo *De solido cochleari* — porge un esauriente commento alle troppo laconiche pagine di chiusa dell' *Opera geometrica Evangelistæ Torricelli* (Florentiæ, 1644): se non c' inganniamo è questa la parte più interessante di tutto il verboso volume del Caraccioli testè analizzato.

Sopra tale argomento il Caraccioli è poi ritornato nell' ultima e più voluminosa delle sue opere (¹): e cioè, nella prefazione alla seconda parte di essa, per replicare ad un' erronea interpretazione di alcune sue parole riferite nella *Storia letteraria d'Italia* (²), ed in appendice alla stessa, per esporre metodicamente le proprietà essenziali dell'elica cilindrica (cochlea) e delle figure generate dal moto elicoidale di una linea piana.

L' opera di cui testè si fe' cenno è un esteso trattato scolastico.

(¹) *Geometria algebrica universa quantitatum finitarum et infinite minimarum tomi duo*, 8.°, Romæ, MDCCLIX.

(²) *Vol. XII dal Gennaio MDCCLV a tutto Giugno dell'anno medesimo*, (Modena, 1758) p. 78-80.

Il I Vol. (¹) di essa concerne la geometria analitica a due dimensioni e sembra avere avuto come prototipo la *Géométrie* di Cartesio; chè, dopo una lunga introduzione sul calcolo algebrico e la teoria delle equazioni, contiene gli elementi della teoria dei luoghi geometrici con applicazioni alla costruzione grafica delle equazioni dei primi quattro gradi. Il II Vol. (²) tratta invece dell'applicazione del calcolo infinitesimale allo studio delle curve; il Caraccioli sembra esservisi accinto dopo avere studiati con profitto i patriarchi dell'analisi moderna, senza però riuscire ad imprimere alla sua esposizione una impronta moderna e a togliere ai metodi antichi i difetti che li deturpavano. Il suo stile è disadorno e pesante; quale differenza con la forma di cui il marchese de l'Hospital fornì il modello ai suoi conterranei e che questi apprezzarono a dovere e s'industriavano sempre di imitare! (³).

Questa produzione del Caraccioli — apparsa circa un decennio dopo quelle di Gaetana Agnesi (1748), Leonardo Eulero (1748) e Gabriele Cramer (1750) — ne sembra di data assai più remota; al loro paragone essa dovette apparire lavoro di altri tempi; venne quindi posta in disparte e nessuno pensò più a toglierla dagli scaffali delle biblioteche, tombe di tanti altri scritti, ben più meritevoli di considerazione.

Nel frattempo sembra che il Caraccioli abbandonasse l'insegnamento per tutto dedicarsi agli interessi dell'ordine a cui apparteneva ed ove conseguì i sommi gradi della gerarchia ecclesiastica; infatti nel 1756 i Teatini lo elessero loro Procuratore generale e tre anni dopo loro Preposito generale, e Clemente XIII Consultore dei Riti e poi (16 Febbraio 1761) Vescovo d'Aversa. Morì a Napoli sua patria nel 1765.

Vissuto nel secolo in cui il Fagnano ed il Grandi, i Manfredi ed i Riccati tenevano alto il decoro della patria nostra nelle palestre scientifiche, il suo nome non raggiunse la fama che altri più degni conseguirono; ma, per conservare la continuità ininterrotta della storia, va tenuto conto di chi servì di tramite non passivo ad idee dotate di riformatrice fecondità. D'altronde, chi ignora come la celebre dottrina di Carlyle degli « eroi » dello spirito umano sia stata di recente combattuta da una scuola che, esaltando l'opera assidua dei collaboratori modesti, proclamando la gloria degli « anonimi », attribuisce alle masse ogni progresso?

(¹) *Geometria algebrica quantitatum finitarum*, p. 8 + 382, con 7 tav. lit.

(²) *Geometria algebrica quantitatum infinite minimarum; adjectus in fine est Commentarius de curva cochlea*, p. 6 + 287, con 11 tav. lit. — È strano che tanto il Vezzosi quanto il Fabbroni, non solo ignorano, ma negano l'esistenza di questo volume. Per compenso fanno cenno di alcuni scritti letterari o di erudizione del Caraccioli, che a noi non interessano.

(³) Leggendo quest'opera del Caraccioli si comprende la fama di oscurità che egli ebbe e di cui il Vezzosi, da storico imparziale, non mancò di far cenno.

RECENSIONI ED ANNUNZI

P. H. Schoute. *Mehrdimensionale Geometrie.* I. Teil. *Die linearen Räume.* Mit 65 Figuren und 335 Aufgaben. (Sammlung Schubert XXXV). Leipzig, Goeschen, 1902; 8.° p. VIII + 295. [Prezzo del vol. legato Mk. 10].

In ogni nuova teoria matematica si possono in generale distinguere tre principali stadi di sviluppo. Durante il primo si accumulano gli elementi costituitivi, mediante ricerche originali, sparse in pubblicazioni indipendenti. Durante il secondo quegli elementi sembrano abbastanza numerosi per potere essere adunati in un tutto organico. Nel terzo finalmente la nuova disciplina appare per importanza e maturità propria a formare materia d'insegnamento, onde viene scelta a soggetto di opere didattiche. Ora la geometria a più dimensioni che, grazie a numerosi e valenti investigatori, attraversò già il primo stadio; che, grazie alla poderosa opera del Prof. Veronese raggiunse il secondo; per merito del Prof. Schoute (seguente in ciò l'eccitamento del Prof. Schubert) entra ora nel terzo. Abbiamo così implicitamente fatto noto che il lavoro, alla cui I Parte è consacrato l'articolo presente, è di natura didattica. Esso si dirige a quei giovani che, senza conoscere il calcolo infinitesimale, ma possedendo i fondamenti della geometria elementare, proiettiva, descrittiva ed analitica, desiderano apprendere metodicamente la geometria a n dimensioni *euclidea.* Questo carattere essenzialmente didattico riuscirebbe evidente, anche senza le dichiarazioni fatte in tal senso dall'A. nella prefazione, a semplice apertura di libro, osservando i numerosi esercizi sparsi per tutta l'opera e la collezione che la chiude. La conseguente struttura del libro riuscirà certamente poco gradita a chi è già provetto nella materia; ma è, senza dubbio, estremamente indicato per raggiungere il fine che si è proposto l'egregio Professore dell'Università di Groninga, cioè di rendere il suo lettore di muscoli abbastanza robusti per potere percorrere con rapidità e sicurezza tutti gli spazi lineari. Stante la novità del tema che tratta l'opera dello Schoute, crediamo opportuno descriverne il contenuto con larghezza un po' maggiore di quanto è nostro costume per le opere scolastiche.

§ 1. *Concetti fondamentali.* Nell'istessa guisa che dal movimento di un punto hanno origine le linee, così da quello di una linea nascono le superficie e da quello di una superficie il nostro spazio; estendendo questo procedimento vengono generate le varietà a 4, 5, ecc. dimensioni. Fra queste possiedono una importanza tutt'affatto speciale quelle che sono la naturale estensione della retta e del piano; sono gli spazi lineari, i quali sono generabili per via ricorrente con un procedimento projettivo, ottenuto da Riemann generalizzando quello che serve a dedurre per proiezione il piano da la retta ed un punto esterno e lo spazio ordinario da il piano ed un punto esterno. Uno spazio lineare R_d a d dimensioni è definito o da $d+1$ punti o più generalmente da p spazi lineari di dimensioni $d_1, d_2, .., d_p$ tali che sia $d_1 + d_2 + \ldots + d_p = d - p + 1$.

Posto $d+1 = w$ lo Schoute, per ricordare il numero dei punti determinatori di un R_d, propone di indicare questo anche con R_w, sistema che, malgrado le buone ragioni addotte dall'A., troverà oppositori in chi ritiene pericoloso l'usare due simboli ad indicare lo stesso ente. Due spazi lineari R_{d_1}, R_{d_2} si tagliano in uno spazio $R_{d_{12}}$ e determinano uno spazio R_d; sussiste allora la relazione $d = d_1 + d_2 - d_{12}$ (1). Da questo si traggono conseguenze importanti sulle intersezioni di 3, 4,... spazi non tutti indipendenti e sugli spazi da essi determinati.

§ 2. *Parallelismo.* Ammesso che lo spazio R_n in cui si opera sia euclideo, il luogo de' suoi punti all'infinito è un R_{n-1}; le proprietà di rette e piani paralleli si estendono allora immantinente a tutti gli spazi lineari che R_n racchiude; però le mutue posizioni in cui possono trovarsi due spazi lineari sono assai più svariate di quanto accade nello spazio ordinario. Inoltre, prese n rette uscenti da un punto, è possibile stabilire col loro mezzo un sistema di n coordinate per ogni punto di R_n, il quale sistema è la naturale estensione del sistema cartesiano (obliquo).

§ 3. *Ortogonalità.* Similmente si possono estendere allo spazio R_n le nozioni ed i teoremi su cui riposa la teoria ordinaria di rette e piani fra loro perpendicolari; si giunge così a stabilire l'esistenza di molte nuove posizioni scambievoli in cui si possono trovare due spazi lineari e a stabilire un sistema di coordinate cartesiane ortogonali.

§ 4. *Distanze, projezioni ed angoli,* sono concetti che quanto precede abilita ad estendere a spazi lineari qualunque.

§ 5. *Geometria descrittiva.* Date in R_n n rette a due a due ortogonali uscenti dallo stesso punto O, di un punto qualunque P si potranno considerare le n projezioni ortogonali su quelle rette, le $\frac{n(n-1)}{2}$ sue projezioni ortogonali sui piani che quelle rette a

(1) La dimostrazione datane dall'A. (p. 14) non sembra perfetta perchè non stabilisce l'indipendenza dei $d+1$ punti assunti a determinare l'R_d, nè che se due spazi R_{d_1} e R_{d_2} stanno in un R_d si taglieranno in un $R_{d_{12}}$. In conseguenza le osservazioni fatte a pag. 37-38 esigono qualche ritocco.

due a due determinano, le $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ analoghe projezioni sugli spazi che le stesse individuano tre a tre, e così via. In particolare è utile considerare di P le $n-1$ projezioni sulla « catena di piani » $O(X_1, X_2)$, $O(X_2, X_3), \ldots$, $O(X_{n-1}, X_n)$; esse dànno origine ad un sistema di rappresentazione dei punti dello spazio che è la naturale estensione della geometria descrittiva nel senso di Monge. È una generalizzazione a cui senza dubbio molti avranno pensato, ma che, a quanto crediamo, è qui per la prima volta esposta con i necessari sviluppi. Lo Schoute nota anche come possa estendersi a tutti gli spazi il teorema di Pohlke e come in R_n esista un' assonometria e una prospettiva; era forse il caso di far qui cenno del « metodo della projezione centrale », che, da più di vent'anni, il Prof. Veronese ha esteso a spazi superiori, e che, fra l'altro, ha il vantaggio di potere venire esposto sotto forma che mostra essere desso in gran parte indipendente dall' ipotesi fatta sulla struttura dello spazio su cui operasi.

§ 6. *Geometria analitica.* Col mezzo del sistema di coordinate analogo al cartesiano dianzi definito, del concetto di proiezione e delle nozioni di parallelismo ed ortogonalità già stabiliti è agevole dimostrare un sistema di formule che corrispondono in R_n a quelle di cui componesi l'ordinaria geometria analitica del piano e dello spazio ordinario. Non ne descriveremo il contenuto: ma soltanto noteremo come l' identità sostanziale dei due problemi « trovare il punto comune a n R_n » e « risolvere un sistema di n equazioni di 1.° grado con n incognite » guidò l'A., coll'aiuto del metodo di geometria descrittiva antecedentemente esposto, a risolvere graficamente qualunque sistema determinato di equazioni lineari.

§ 7. *Geometria di posizione.* In R_n esiste una legge di dualità analoga a quelle che sussistono per le forme di 1.ª e 2.ª specie; essa è posta in evidenza sia dai postulati fondamentali della geometria in R_n, sia dalle formule di geometria analitica in coordinate omogenee. Similmente in R_n esistono, come in R_2 e R_3, due specie di trasformazioni projettive: la collineazione e la correlazione; esse vengono studiate dall'A. sia supponendo i due spazi considerati distinti, sia ammettendoli coincidenti, non senza escludere i casi particolari più notevoti che le stesse presentano: affinità, congruenza diretta od inversa, sistemi nulli, ecc.; nè sono taciute le più essenziali considerazioni sopra i movimenti in R_n.

§ 8. *Geometria numerativa.* Un R_d reale di R_n dipende da $(n-d)(d+1)$ costanti. Se è immaginario può essere di specie differenti; supposto di designare con R_{w_1, w_2} uno spazio immaginario R_{w_1} situato nello spazio reale R_w ed i cui punti reali costituiscono un R_{w_2}, e con $c^{(w)}_{w_1, w_2}$, il numero delle costanti da cui esso dipende, lo Schoute prova anzitutto essere

$$c^{(w)}_{w_1, w_2} = c^{(w)}_{w_2, w_2} + c^{(w_1 - w_2)}_{w_1 - w_2, o}$$

e ne deduce

$$c^{(w)}_{w_1, w_2} = (2w_1 - w_2)(w - w_1) + w_2(w_1 - w_2).$$

Per risolvere altri problemi di geometria numerativa il nostro A. espone brevemente il principio di corrispondenza di Chasles ed il principio della conservazione del numero. Riguardo a questo, avverte che non è ancora stato dimostrato in generale, che, anzi, un esempio immaginato dallo Study (1) prova che non sussiste, almeno nella forma generale sotto cui viene di consueto esposto.

§ 9. *Poligonometria.* Quest' ultimo capitolo, a differenza dei due precedenti, è essenzialmente metrico. Lo Schoute vi studia anzitutto il « quadrispigolo », figura di R_4 analogo all' angolo triedro di R_3; e poi estende i risultati ottenuti ad R_n, applicandovi, non solo considerazioni geometriche, ma anche le formule già stabilite di geometria analitica. Qui sarebbe il caso d' intraprendere lo studio dei « politopi », cioè delle figure regolari di R_n: ma lo Schoute lo rimanda al prossimo volume, quasi ripetendo col poeta:

Ma chi del canto mio piglia diletto,
Un' altra volta ad ascoltarlo aspetto.

G. L.

Sulla totalità dei numeri primi fino ad un limite assegnato — Monografia di G. Torelli — *Opera premiata dalla R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche il 15 Dicembre 1900.* Napoli, Tipografia dell' Accademia, 1901, 8.º gr., p. VIII + 212 [Prezzo L. 15].

Il problema di determinare il numero $\theta(x)$ dei numeri primi inferiori ad x, diventato ormai celebre, come oggetto di studio dei più illustri matematici del secolo scorso, ha presentato sempre così gravi difficoltà, da far temere che i mezzi a disposizione dell' analisi, fossero insufficienti

(1) Si considerino quattro punti di una retta; il problema di trovare le proiettività che trasformano tale quaterna in sè stessa ammette *in generale* 3 soluzioni; ma ne ha 6 se i quattro punti sono armonici e 7 se sono equianarmonici. — Lo Schoute spiega il perchè della presenza delle nuove soluzioni, senza però riuscire a togliere importanza alla geniale osservazione dello Study. Si vegga a questo proposito un articolo di G. Kohn nell' *Archiv für Math. und Phys.*, 3.ª Ser., T. IV, 1903, p. 312.

per condurre ad una risposta soddisfacente. Il problema esige che la funzione $\theta(x)$ sia posta sotto una forma tale, che le sue determinazioni, per ogni valore di x, si possano calcolare esattamente, od almeno con approssimazione assegnabile: ora la funzione $\theta(x)$ presenta un numero infinito di discontinuità, la cui posizione non è *a priori* conosciuta; l'applicazione quindi, ed il maneggio delle formule riesce estremamente difficile, per quanto si faccia appello a tutte le risorse dell'analisi.

Da Euclide, che pose virtualmente il problema, a Legendre, che primo tentò di risolverlo con una formula, molti furono i matematici che lo fecero oggetto di studio; le loro ricerche però non vanno considerate come veri e propri contributi all'argomento. La formula di Legendre

$$\theta(x) = \frac{x}{\log x - 1{,}08366},$$

desunta dalla frequenza dei numeri primi noti, segna in linea storica il primo tentativo serio per rispondere alla questione. Le ricerche di Gauss, esse pure empiriche, ma degne tuttavia del grande matematico, fanno capo all'altra formula approssimata, destinata poi a diventar classica:

$$\theta(x) = \mathrm{Li}(x).$$

Il problema non fa seri passi, per quanto elaborato dalla feconda mente di Dirichlet; più tardi Tchebischef inaugura un metodo nuovo e razionale per lo studio di $\theta(x)$; e quasi subito sorge il genio di Riemann, che alle ricerche, rimaste prima quasi sempre sterili, schiude una via completamente nuova. Per una di quelle intuizioni ardite, famigliari al suo genio, Riemann applica alla funzione $\Sigma \frac{1}{n^s}$ l'idea nuovissima dell'estensione a tutto il piano di una quantità che esiste soltanto in una parte di esso; ne trae una funzione uniforme che gli permette poi di dedurre la sua celebre formula, la cui validità, dopo gravi dispute, è stata posta recentemente al sicuro da qualunque critica.

Quasi tutti i matematici, che dopo si occuparono del problema, fecero oggetto dei loro studi la funzione che Riemann ha dato all'analisi; e le ricerche di Hadamard, von Mangoldt, La Vallée-Poussin, che danno gli ultimi e più cospicui risultati sull'argomento, seguono pure l'aspra via aperta da Riemann, la quale ora si presenta come la sola, che possa condurre alla scoperta di ciò che ancora resta latente nella grave questione.

Accennato così rapidamente alla storia dell'argomento, veniamo a parlare della monografia del Torelli. In essa l'autore espone tutte le ricerche riguardanti il problema sopradetto, ne fa notare i singoli indirizzi, ne discute i risultati, rilevando opportunamente le questioni insolute o pendenti, e coordinando il lavoro in modo che valga a dare esatta cognizione dell'argomento. Esso consta di 205 pagine di testo, cui seguono: *a*) Una tabella dei simboli adoperati con maggior frequenza e con significato costante. *b*) Un elenco dei nomi degli autori di cui sono ricordate le contribuzioni relative all'argomento del lavoro. *c*) Una tabella contenente i valori della totalità dei numeri primi fino ad un limite assegnato, secondo le formule di Legendre, di Tchebichef-Gauss, di Cesàro, di Riemann-Gram, di Meissel, e secondo la effettiva enumerazione di Glaisher. *d*) Un diagramma rappresentante le deviazioni relative alle varie formule assintotiche, pel calcolo della totalità dei numeri primi fino ad un limite assegnato.

La materia è divisa in 12 capitoli. L'autore comincia col presentare i tre indirizzi differenti, che agli studiosi si sono offerti per le ricerche:

1.° Procedere alla effettiva enumerazione, mediante la conoscenza di tutti i numeri primi fino al limite assegnato.
2.° Escogitare un metodo, che, servendosi della effettiva conoscenza di solo una parte dei numeri primi fino al limite dato, offra la totalità dei numeri primi fino a questo limite.
3.° Costruire la funzione $\theta(x)$ senza bisogno della conoscenza dei numeri primi.

Al primo indirizzo appartengono i lavori sulle tavole dei numeri primi e su quelle dei più piccoli divisori dei numeri: si notano qui i nomi di Lambert, Euler, Vega, Burckhardt, Glaisher, Dase e Davis; allo stesso indirizzo si collegano le ricerche sul riconoscimento di un numero primo, e sui posti della serie naturale, dove più rari sono i numeri primi: qui prendono posto fra le altre le brevi ricerche di Euler, Gauss, Tchebichef. Al secondo indirizzo appartiene il procedimento di Legendre inteso a determinare la totalità dei numeri primi fino ad m, quando sono noti solo i numeri primi fino a $\sqrt{m}$; a questa ricerca si riattaccano le analoghe di Meissel, Rogel, Hargreave. Questa la materia dei due primi capitoli, ciascuno dei quali si riferisce ad uno dei due primi indirizzi. Giungiamo così nel terzo capitolo alle ricerche che seguono l'ultimo: l'autore esibisce ed illustra le celebri formule di Legendre, Encke e quella più fortunata di Gauss, e viene nel quarto capitolo alle due memorie di Tchebichef, che inaugurano le ricerche seriamente razionali. Nell'esposizione della prima memoria si confrontano i risultati che essa offre colle formule di Legendre e Gauss, e vien fatto cenno della modifica che Gram ha portato ad un procedimento di Tchebichef, per giungere ad un più completo risultato, trovato poi da Riemann. Viene poi la seconda memoria di Tchebichef, che vale la dimostrazione del postulato del Bertrand, ed offre per la totalità dei numeri primi non superiori ad x, nuovi limiti utili: a questa memoria si collegano i lavori analoghi di Sylvester e di Gram.

Nel quinto capitolo sono esposte alcune ricerche del Cesàro, le quali fanno capo alla determinazione del valore assintotico, già dato da Tchebichef, per la totalità dei numeri primi non superiori ad x; poi è riferito un secondo valore assintotico dovuto al Glaisher, ed un terzo trovato pure dal Cesàro. A questo punto l'autore, seguendo il metodo del Glaisher, illustra con calcoli numerici le diverse formule di Cesàro, Riemann, Gauss e Legendre, riportando poi i risultati alla fine del libro, nella già accennata tabella, che trova la più completa illustrazione nel diagramma che la segue.

Il capitolo VI è consacrato alle ricerche intese a determinare il valore di un numero primo di determinato posto: qui vanno, per ordine logico, annoverate una recente memoria di Jsenkrahe e quindi una assai anteriore di Smith; seguono la discussione delle quattro formule di Perwouchine, ed il confronto di esse coi risultati ottenuti dal Cesàro. Il capitolo seguente tratta delle valutazioni assai dubbie ottenute da Legendre, Hargreave e Tchebichef, i quali applicarono le loro formule come uguaglianze complete: si notano poi pel confronto le stesse valutazioni fatte col metodo di Cesàro e con quello di Mertens.

I lavori fin qui incontrati giovano a comprendere la funzione $\theta(x)$ fra limiti assai opportuni; ma di essa danno solo espressioni assintotiche, le quali non si possono assumere come formule di approssimazione, per valori finiti della variabile. Ben altra importanza ha il metodo inaugurato da Riemann, come quello che ricerca un complesso di enti analitici, mediante i quali sia possibile dare una espressione esatta di $\theta(x)$. Nel capitolo VIII l'autore riferisce la memoria di Riemann: definisce la funzione $\zeta(s)$, ne dà la continuazione analitica, seguendo Riemann, Hermite, La Vallée-Poussin; accenna utilmente alla relazione funzionale Riemann-Schlömilch, e completa il carattere analitico della funzione $\zeta(s)$, producendo tutti i risultati sulla distribuzione dei suoi zeri, acquisiti alla scienza per opera di Hadamard e La Vallée-Poussin: viene quindi alla funzione $\xi(t)$; fa rilevare i notevoli risultati intuiti, non dimostrati, da Riemann, e compie l'esposizione della memoria, dando la classica formula colla rettificazione del Genocchi, colle trasformazioni di Gram e Mangoldt. E qui viene opportuna l'introduzione della funzione $\mu(n)$ di Möbius, la quale riesce di grande utilità nella valutazione della formula di Riemann. Questa si presenta come la prima che offra un'espressione completa di $\theta(x)$, fornisce un valore approssimato, la cui deviazione è minore di quella di tutte le precedenti formule, e pone in evidenza il predominio che ha in $\theta(x)$ l'espressione di Gauss, destinata a diventar poi il classico valore assintotico di $\theta(x)$. Alla formula di Riemann segue la discussione del Gram sulle radici di $\xi(t)$, una proposizione empirica di Mertens sulla funzione di Möbius, e un accenno ad altre funzioni numeriche analoghe.

Giunto così al capitolo IX, l'autore espone i lavori che sono il complemento naturale della memoria di Riemann; e prima quelli di Hadamard, von Schaper, Borel e Mangoldt, intesi a colmare le lacune lasciate nella detta memoria sulla funzione $\xi(t)$. Segue la questione capitale della realità delle radici di $\xi(t)$: Stieltjes disse di possederne la prova, che non pubblicò mai; Jensen ne promise recentemente un'altra, che non comparve. Ma intanto, stabiliti con rigore gli enunciati preliminari della memoria di Riemann, a meno del teorema ultimo, non necessario per condurre alla formula finale, von Mangoldt dimostra rigorosamente la seconda parte della memoria, e deduce in modo inattaccabile e più accessibile la formula che ne è frutto. L'autore, nel mostrare tutto questo, accenna alle ricerche anteriori allo stesso intento di Piltz, che ebbe il merito di essere per il primo entrato nel pensiero di Riemann.

Nel capitolo X vengono segnalati i lavori che sono naturale conseguenza della memoria di Riemann, la quale ha fornito i mezzi per stabilire con rigore quelle formule assintotiche, che si erano già trovate ammettendo l'esistenza del limite. Si notano la valutazione di una espressione già calcolata da Legendre, ed i metodi usati da diversi matematici, per ottenere il valore completo di una funzione trattata da Tchebichef, e quindi sono riferite le conseguenze assintotiche importanti, che sono frutto delle ricerche di Hargreave, Sylvester, Stieltjes, Halphen, Cahen, La Vallée-Poussin, Hadamard, von Mangoldt, Cesàro e Mertens. A questo punto viene posto in giusta luce il brillante teorema di La Vallée-Poussin, che supera in esattezza il presentimento di Gauss, e compie le ricerche anteriori sull'argomento: *$Li(x)$ è l'espressione assintotica di $\theta(x)$ più esatta di tutte le sue espressioni possibili sotto forma finita.* Il capitolo si chiude cogli studi recenti di von Mangoldt, Landau, La Vallée-Poussin sulla funzione di Möbius.

Il capitolo XI tratta delle questioni che ha suscitato la feconda elaborazione del classico teorema di Dirichlet affermante l'esistenza di infiniti numeri primi in ogni progressione aritmetica, la cui ragione è prima col termine iniziale. Sono notati i teoremi di Tchebichef e Poincaré sulla distribuzione dei numeri primi fra due speciali forme; teoremi, che trovano poi opportuna estensione in un lavoro di La Vallée-Poussin. Poi l'autore espone un suo metodo inteso a semplificare il problema già studiato da Piltz sulla frequenza dei numeri primi in una progressione aritmetica; segue la valutazione assintotica relativa al problema detto; poi il teorema di Poincaré sulla totalità dei numeri complessi di Gauss, ed una estensione di questo ai numeri primi ideali; tali risultati vengono in appresso estesi ad altro caso, e frattanto trova posto lo studio notevole della distribuzione dei numeri primi fra le due classi dei residui e dei non residui quadratici di un numero. In questo capitolo, che in gran parte è originale, e presenta un pregevole contributo dell'autore alla questione, abbondano utili illustrazioni numeriche.

Siamo così giunti all'ultimo capitolo. Le complicazioni e le difficoltà, insite nella struttura della formula di Riemann, e la poca speranza che essa quindi ha sempre lasciato di adattarsi a calcoli numerici esatti, indussero parecchi studiosi a ricercare la risposta del problema, seguendo altra via. Parecchi degli studi, che seguono questo nuovo indirizzo, sono intesi alla ricerca di una equazione caratteristica dei numeri primi, e prendono specialmente le mosse dalla serie di Lambert; vanno notati al riguardo i lavori di Scherk, Schlömilch, Cesàro, Burhenne e Curtze. I due ultimi giungono ad una equazione caratteristica: il Curtze muove dal concetto di determinare la somma della serie; con metodi differenti la stessa somma è trovata da Schlömilch, La Vallée-Poussin, Hansen, Catalan e Cesàro. Le ricerche di quest'ordine si chiudono colla nota di Levi-Civita che giunge ad un'equazione caratteristica, ingegnosa sì, ma troppo complicata date le attuali risorse dell'analisi. Seguono poi le ricerche che prendono le mosse dal teorema di Wilson; prima quelle di Rogel che fanno capo ad una formula, la quale offre il valore di $\theta(x)$; poi le altre analoghe del Laurent, il quale giunge ai suoi risultati per tre vie differenti: pel teorema di Wilson, per la serie di Fourier, e pel calcolo dei residui. Colle soluzioni di von Koch, Wigert, Lorenz terminano gli studi di quest'ordine. I quali per quanto ingegnosi, non possono competere colla risposta che al problema ha dato Riemann: troppo lavoro resta a farsi per decomporre le espressioni, che da quelli risultano, in altre meno complicate; di più alcune presentano altri inconvenienti, quella di Rogel p. es. ha bisogno della effettiva conoscenza dei numeri primi. Il difetto comune a tutte le ricerche sui numeri primi, spicca in quelle che seguono quest'ultimo indirizzo, e l'autore conclude brevemente che la memoria di Riemann, e le altre che ne sono natural complemento, additano l'unica via che possa dare utili frutti.

Tale è la materia trattata nella monografia del Torelli. Fra i lavori che siamo andati enumerando trovan posto tutte, anche le più modeste ricerche sull'argomento, le quali sono coordinate in modo da seguire l'ordine storico, finchè l'esigenza del criterio logico lo permette. Per quanto sia ricca la letteratura dell'argomento, l'autore ha potuto presentarci completa una delle più laboriose ed interessanti pagine d'analisi; egli non è stato pago di esibire i risultati, e d'esporre i metodi che a quelli hanno condotto; ma quasi ad ogni lavoro ha fatto seguire una discussione esauriente.

L'opera è poi distribuita in modo che in essa il lettore può sempre e facilmente orientarsi, acquistare esatta cognizione dei singoli indirizzi e metodi seguiti, senza ricorrere alle fonti, delle quali inoltre ha occasione di trovare un utilissimo commentario. Forse l'autore, che possiede largamente il suo soggetto, poteva dare una diversa distribuzione alla materia, in guisa da imprimere a ciascun capitolo un colore ed un carattere proprio, che emergesse da opportuna intestazione, e fosse illustrato da un breve cenno storico; e ciò anche a scapito della ben dettagliata classificazione; allora il lavoro risponderebbe anche al desiderio di chi, pur non volendo addentrarsi nell'argomento, brama acquistarne una conoscenza sommaria e superficiale. Ma i pregi dell'opera sono così cospicui, che non vengono menomati per tale mancanza, per cui, certi che anche i nuovi ed importanti risultati, cui l'autore è giunto, siano inattaccabili, invitiamo gli studiosi a rendergli plauso.

MARIO VECCHI (1).

CECILIO JIMENEZ RECEDA. *Lecciones de geometria métrica.* Madrid, Suarez, 1903; 8.° p. XVIII + 228 + 248, con un Atlante di 24 tav. lit.

Il senso delle parole con cui s'intitola questa nuova opera dell'egregio professore dell'Università di Madrid non essendo esente da ambiguità crediamo opportuno dichiarare il contenuto di essa riproducendo gli argomenti delle 33 lezioni in cui essa è divisa.

INTRODUZIONE.

PARTE PRIMA: *Nozioni fondamentali di geometria metrica.* I. Nozioni sopra le rette, i piani, le stelle e gli angoli. II. Relazioni di perpendicolarità e parallelismo. III. Angoli a lati paralleli o perpendicolari. IV. Elementi all'infinito e proiezione parallela. V. Poligoni ed angoli poliedri. VI. Angoli dei poligoni e degli angoli poliedrici. VII. Figure simmetriche. VIII. Relazioni fra segmenti di una retta o fra angoli (piani o diedri) di un fascio (di raggi o di piani). IX. Parallelogrammi ed analoghi angoli tetraedri. X. Proprietà del circolo e del cono di rivoluzione. XI. Angoli nelle circonferenze. XII. Nozioni fondamentali sopra le misure. XIII. Teoria della proporzionalità fra segmenti. XIV. Trigonometria. XV. Rettificazione di linee e determinazione di aree di superficie coniche.

(1) Ci scrive il ch.^{mo} Prof. Torelli che attualmente egli lavora attorno a un'aggiunta alla sua monografia, in cui, oltre a render conto di alcune importanti recenti pubblicazioni sull'argomento, nonchè di qualche memoria anteriore sfuggitagli, sostituisce nuovi procedimenti a quegli esposti nei §§. 15, 102, 103 che egli ha riconosciuti non esatti [G. L.].

Parte seconda. *Studio delle varie figure del piano e della stella e delle loro relazioni geometriche.* I. Segmenti ed angoli. II. Rapporti anarmonici ed armonici. III. Costruzione geometrica di formole algebriche segmentarie. IV. Triangoli e triedri. V. Proprietà metrico-projettive di triangoli e tetraedri. VI. Alcune relazioni metriche fra il triangolo ed il circolo. VII. Poli e polari rispetto ad un circolo o ad un cono. VIII. Quadrilateri in generale. IX. Poligoni ed angoli poliedrici in generale. X. Poligoni regolari. XI. Sistemi di circoli. XII. Eguaglianza e similitudine. XIII. Omotetia, omologia, affinità ed involuzione. XIV. Figure inverse. XV. Misura della circonferenza e della superficie conica di rivoluzione. XVI. Aree delle figure piane. XVII. Massimi e minimi. Calcolo per approssimazione di aree. XVIII. Nozioni sulle coniche.

Dalla semplice ispezione di codesto indice risulta che l'autore appartiene alla schiera di coloro che ritengono utile, scientificamente e didatticamente, la fusione della planimetria con la stereometría; essendo egli estremamente parco in citazioni, non ci è dato asserire se l'idea di riavvicinare le proposizioni analoghe nel piano e nello spazio sia sorta in lui spontaneamente o se gli venne ispirata da opere anteriori. Nel primo caso egli meriterebbe di essere posto nel gruppo formato da Bretschneider, Méray e De Paolis, e fornirebbe un argomento per sostenere che la fusione corrisponde ad uno stato naturale di cose; in ogni caso egli va ascritto fra coloro che attuarono felicemente l'intima miscela fra le due parti in cui Euclide divise la geometria. — Questo carattere del lavoro in discorso basterebbe a mostrarlo meritevole dell'attenzione dei nostri lettori; ma non è il solo; però su gli altri, come di minore importanza, ci sia lecito sorvolare.

G. L.

K. Geissler. *Die Grundsätze und das Wesen des Unendlichen in der Mathematik und Philosophie.* Leipzig, Teubner, 1902; VIII-417 p. 8.° [Prezzo del vol. legato Mk. 14].

L'autore di questo libro viene ad accrescere la già numerosa schiera di coloro che si propongono di chiarire *il mistero dell'infinito matematico.*

Egli parte (p. 1) da questo fatto, che una retta può imaginarsi indefinitamente lunga, e quindi che essa ha dei punti a distanza infinita; e si chiede: Una retta ha all'infinito un punto solo o più punti? A questa domanda non può, a suo avviso, darsi risposta adeguata, e neppure all'altra, se due segmenti eguali contengano o no egual numero di punti. Però ogni difficoltà è tolta se, invece di dire che un segmento contiene infiniti punti, si dice che un segmento può dal nostro pensiero essere caricato *(behaftet)* di infiniti punti. In altre parole, per l'autore sulla retta non esistono punti se non in quanto il nostro pensiero ve li concepisce. È così che noi a due segmenti eguali possiamo attribuire un'infinità eguale o diseguale di punti, secondochè, p. es., proiettiamo l'uno dei segmenti sopra l'altro, oppure sopra una parte dell'altro. Questo concetto spiega anche un'altra contraddizione. Una retta ruotando intorno ad un suo punto incontra un'altra retta a distanza variabile da un determinato punto di questa; tale distanza, per quanto imaginiamo continuato il movimento, è sempre finita; come si può passare al caso d'una distanza infinita? Non con continuità, come or ora si è detto; non con un salto, perchè la retta si concepisce continua. L'antinomia cessa quando noi diciamo: La nostra mente può a suo piacere fissare l'attenzione o sui punti a distanza finita o su quelli a distanza infinita; può caricare *(behaften)* la retta dei punti al finito o di quelli all'infinito. Seguiremo l'esempio datoci più volte dall'autore, cercando di far meglio comprendere la cosa mediante un paragone, per quanto grossolano. Supponiamo di essere forniti di due paia di lenti di potenza diversa, atte le une a farci vedere i punti al finito, le altre i punti all'infinito; basterà mutare le lenti per vedere a piacer nostro gli uni o gli altri, e non si potrà dire che il passaggio avvenga nè in modo continuo nè in modo discontinuo. Ammesso questo principio, è chiaro che esso può avere una assai più larga applicazione; così si possono imaginare altre paia di lenti atte a farci discernere le distanze infinitesime di 1.°, di 2.°,... ordine. Una stessa figura geometrica ci appare differente a seconda delle diverse lenti con cui la guardiamo; così p. es. un triangolo che abbia un lato infinitesimo, visto colle lenti del finito, ci si presenta isoscele con due angoli retti; così la tangente, sotto le lenti del finito, ha comune un punto colla curva, sotto le lenti dell'infinitesimo, ha comune con essa un tratto rettilineo (infinitamente piccolo).

Ciò che abbiamo detto è sufficiente per far comprendere il concetto fondamentale adottato dall'autore; e d'altra parte sarebbe impossibile seguirlo nei lunghi sviluppi matematici e filosofici coi quali illustra le sue idee. Nè ci proponiamo di discutere la teoria dell'autore dal punto di vista filosofico; memori della massima: *Ne sutor ultra crepidam*, ci limitiamo ad esaminare quale valore essa abbia per la matematica.

Nella matematica l'idea d'infinito figura sotto varî aspetti, i quali però si possono raggruppare sotto tre principali, che per brevità diremo: *l'infinito della geometria sintetica*, quello *del calcolo infinitesimale* e quello *della teoria generale delle grandezze*.

In geometria sintetica, parlando dei punti all' infinito, non si intende menomamente di attribuire ad essi un' esistenza reale; un punto all' infinito significa, per convenzione, la *direzione* degli elementi di una stella di rette parallele; dire che l' iperbola taglia la retta all' infinito del suo piano in due punti reali è come dire che esistono due fasci di rette parallele ciascuna delle quali taglia la curva in un sol punto; e così via.

Anche nel calcolo infinitesimale, da Cauchy in poi, il concetto d' infinito figura solo in apparenza. La parola *infinitesimo,* malgrado la sua origine, significa una quantità finita, variabile, indefinitamente decrescente, e, quando si dice che una funzione è infinitesima in un punto, si vuol intendere che, presa ed arbitrio una quantità positiva σ, può assegnarsi un intorno di questo punto in tutti i punti del quale la funzione è, in valore assoluto, minore di σ.

Al contrario nella teoria generale delle grandezze si presentano enti che possono effettivamente considerarsi come infiniti od infinitesimi rispetto ad altri; esistono cioè certe classi di grandezze in cui, definiti convenientemente i concetti di eguale, maggiore e minore e di addizione, possono assegnarsi, in infiniti modi, due enti tali che l' uno di essi addizionato a sè stesso un numero qualsiasi di volte non supera mai l' altro. Tale è p. es. la classe degli ordini d' infinito delle funzioni; tale quella dei numeri trasfiniti di Cantor.

Il nostro autore non prende in considerazione alcuna quest' ultima specie d' infinito; anzi non mostra neppure di avvertire la differenza essenziale che passa fra questa e le altre. Egli dice infatti, p. es. (p. 331), che la teoria di Cantor fa vedere come i matematici non sieno punto d' accordo sull' uso dell' infinito nella loro scienza; ora le diverse specie d' infinito sono tanto nettamente distinte, che quello stesso Cantor, il quale ha arricchito la matematica d' una serie indefinita di enti infiniti, si è sforzato di dimostrare — appunto per mezzo della sua nuova teoria — che il segmento infinitesimo non esiste.

Le discussioni dell'autore nostro sono dunque limitate alle due prime specie d' infinito, che trovano il loro rappresentante rispettivamente nei punti all' infinito della retta e nei segmenti infinitesimi. Ed il suo errore fondamentale, dal punto di vista matematico, sta in ciò, che egli prende sul serio (ci sia permessa la frase) queste due specie d' infinito, senza accorgersi che esse d' infinito hanno solo il nome. Infatti sin dalla prima pagina egli parla dei punti all' infinito della retta come di punti realmente esistenti, e il cui concetto non differisca affatto da quello degli altri punti della retta; anzi egli dice (p. 4) che non v' ha distinzione tra un punto al finito ed uno all' infinito, giacchè i punti a distanza finita divengono punti a distanza infinita quando l' osservatore vada all' infinito!

Attribuendo un'esistenza effettiva al punto od ai punti all'infinito della retta, l'autore ne deduce l'esistenza di angoli, e quindi di segmenti, infinitesimi; le congiungenti di un punto qualunque coi punti all'infinito d'una retta formano angoli infinitesimi colla parallela alla retta condotta per quel punto.

Questi concetti, che ci riportano indietro di un secolo e più, all'epoca di Fontenelle e di Eulero, dànno luogo naturalmente a tutte le obiezioni, sulle quali tanto e così inutilmente si discusse nei tempi passati. E avanti tutto si presenta il famoso dilemma, posto già innanzi dagli avversari di Leibniz: Se l'infinitesimo non è zero, come si può trascurare? E se è zero, come si può operare su delle quantità nulle? — Il nostro autore si schiera decisamente dalla parte di coloro che ritengono l'infinitesimo diverso da zero: così per lui due rette che si tagliano ad una distanza infinita di qualunque ordine non sono parallele (p. 258). Però l'infinitesimo, visto — per riprendere un paragone già usato — colle lenti del finito, è nullo, e quindi si può aggiungere ad una quantità finita senza alterarne il valore. Posto questo come principio (p. 26), si dimostra poi *a posteriori* (p. 79-81), coll'esempio della frazione decimale periodica $0,333\ldots. = \frac{1}{3}$, che trascurando un infinitesimo non si commette alcun errore. Ma, chiede un obiettante imaginario, come può avvenire che una grandezza abbia a considerarsi nulla come sommando, ma non come termine d'un rapporto? E l'autore risponde: Ci sono cose che, considerate in rapporto ad altre cose omogenee, non possono trascurarsi, mentre non hanno alcun valore considerate di fronte a cose eterogenee: così p. es. un minuto secondo, confrontato con un altro intervallo di tempo, ha con questo un rapporto determinato, mentre, unito ad un segmento, non aggiunge nulla ad esso. È facile vedere i molti punti deboli che presenta questo ragionamento. Fissata sopra una retta un'origine O e preso su di essa un altro punto F, il segmento OF rappresenta una quantità finita f; ammesso che esistano segmenti infinitesimi, e che il segmento OI rappresenti la quantità infinitesima i, aggiungere i ad f significa prendere sulla retta un segmento $FI' = OI$; la somma $f+i$ è rappresentata dal segmento OI', e si tratterebbe di vedere perchè i punti F, I' possano considerarsi come coincidenti. Ma l'aggiungere un minuto secondo ad un segmento non si può dire nè che abbia nè che non abbia effetto, se prima non si stabilisce il significato di una tale operazione; ciò che l'autore non cura punto di fare. Inoltre perchè il segmento finito e l'infinitesimo non devono considerarsi come grandezze omogenee? A questa domanda l'autore non risponde, od almeno non risponde chiaramente.

Se altre prove occorressero per mostrare che il nostro autore non ha compreso il vero senso delle prime due specie d'infinito, basterebbe citare, per la prima, la sua asserzione già ricordata che due rette che s'incontrano all'infinito non sono parallele, per la seconda, il modo in cui considera le cosidette espressioni indeterminate. Ecco come incomincia lo studio del prodotto $0 \times \infty$ (p. 37): « La divisione « si definisce come l'inversa della moltiplicazione. Quindi $a : b$ denota « il numero che moltiplicato per b .... dà il valore a. Ne segue che « $1 : 0$ indicherebbe il numero che moltiplicato per 0 dà 1 .... ».

È chiaro del resto che l'autore, pure possedendo molte cognizioni nel campo della matematica, non è penetrato nello spirito dei punti più delicati di questa scienza. Ecco p. es. che cosa egli dice incidentalmente degli imaginari (p. 39): « Introducendo l'unità imaginaria « $\sqrt{-1}$, deve dirsi che questa è quel numero il quale, moltiplicato « per sè stesso, dà -1. Ora può dirsi, che un tale numero non esiste, « aggiungendo che nessuno dei sinora chiamati numeri .... moltipli- « cato per sè stesso dà un numero negativo. Con ciò non è detto che « nel nostro pensiero non esista una tale grandezza. Anche nello spi- « rito possono farsi scoperte come nell'elettricità. Qualcosa, prima « non avvertito, può sonnecchiare nella nostra mente o risultare con « necessità dalle cose già scoperte. E la quantità -1, che si deduce « da quantità sinora non conosciute mediante un'operazione nota, è « pure conosciuta .... ». La sola parola *scoperta* basta a far vedere che l'autore nostro considera gl'imaginari, non già come enti *inventati* da noi ed ai quali estendiamo, in modo opportuno, le operazioni aritmetiche, ma come enti la cui esistenza scende necessariamente da quella dei numeri reali. Egli press'a poco ragiona così: Il numero -1 esiste, la moltiplicazione è un'operazione nota, quindi esiste — nella nostra mente — un numero che, moltiplicato per sè stesso, dà -1, e, se noi finora non l'abbiamo conosciuto, è semplicemente perchè non vi abbiamo fatto attenzione; così come esistevano i fenomeni elettrodinamici assai prima che Volta e Galvani li osservassero.

Dopo tutto questo noi crediamo poterci dispensare dall'analizzare punto per punto il libro del Geissler; tanto più che una tale analisi ci condurrebbe soltanto a ripetere più volte, sotto forme diverse, le osservazioni fondamentali già esposte.

E per concludere, diremo che questo libro ci sembra rappresentare, dal punto di vista matematico, un ritorno ad un'epoca scientifica fortunatamente da lungo tempo tramontata.

G. VIVANTI.

F. S. Holzinger. *Aritmetica politica per le Scuole di commercio (Accademie di commercio). Prima versione italiana.* Vienna, A. Holder, 1902, 8.°, p. 4 + 118 [Prezzo Corone 1. 60].

Le matematiche applicate si sono recentemente accresciute di un nuovo importante ramo: la scienza dell' attuario. Prodotto dal meraviglioso sviluppo che ebbero nel Secolo scorso le Società d' assicurazione, nelle svariate loro forme, esso non mancò di attirare l' attenzione di matematici di grido, che lo presero per soggetto di pubblicazioni speciali e di lezioni universitarie: ci basti ricordare L. Kiepert e M. Cantor. Le Università di Vienna e di Göttinga stabilirono anzi dei corsi regolari su quella che vien colà chiamata *Versicherungsmathematik*, ed in Austria, con Decreto del 3 febbraio 1895, il Ministro dell' Interno istituì uno speciale « Diploma per l' attuario » Ora, quasi come ulteriore conferma dell' interesse che nell' Impero austro-ungarico viene tributato a quella nuova parte dello scibile matematico, ci si presenta l' opera che è soggetto del presente articolo, opera che va segnalata ai lettori italiani del *Bollettino*, non foss' altro per essere la prima del genere (se non c' inganniamo) che annoveri la nostra letteratura.

Premesse alcune nozioni sulla progressione e sul calcolo d' interessi semplici l' autore tratta successivamente le questioni seguenti:

I. *Calcolo d' interesse composto e di rendita.* II. *Corso dei prestiti e costruzioni di piani d' ammortizzazione.* III. *Piani d' ammortizzazione pei prestiti con lotteria.* IV. *Calcolo delle probabilità. Rendita vitalizia.* V. *Assicurazione di un capitale in caso di morte.* VI. *Assicurazione fra congiunti.*

Numerosi esempi illustrano i metodi esposti e tavole numeriche ben disposte agevolano il compito di coloro chiamati ad applicarli.

Paragonata quest' opera a quella congenere del Cantor (v. *Bollettino*, T. II, 1899, p. 103-164) si manifesta meno elevata e più pratica; onde sarà meno accetta da alcuni e preferita a quella da altri; il che basta a provare che da nessuno verrà giudicata come superflua e quindi inutile. G. L.

G. Gallucci. *Saggio di una introduzione alla filosofia delle matematiche.* Caltanisetta, 1902, 8.° p. 125.

Risposta ad alcune domande del Prof. Vailati (1).

(V. questo vol. del *Bollettino*, p. 19-21)

I.° Il Prof. Vailati afferma che io mi sono proposto di fornire una guida a quei matematici che intendessero prendere cognizione di *ciò*

(1) Nell'accordare, per dovere d' imparzialità, un posto alla seguente Replica del ch.^{mo} Prof. Gallucci, la Direzione dichiara con ciò « l' incidente esaurito », ritenendo che il *Bollettino* per lo scopo *matematico* che si prefigge e pel modesto spazio di cui dispone non può servire a lunghe discussioni che principalmente interessano i cultori della filosofia [G. L.].

che nel campo della filosofia si è pensato o scritto sui principii e sui metodi della loro scienza. Ciò non è conforme al vero: infatti nella prefazione (pag. 3 e 4) ed a pag. 120 del mio opuscolo è espresso molto chiaramente lo scopo che mi sono proposto, quello cioè di una discussione preliminare delle teorie *moderne* della logica e della psicologia, da servire non solo per potere iniziare un' opera sistematica sulla filosofia matematica, ma anche per porre i matematici al corrente dello *stato attuale* delle teorie filosofiche. Dunque io non mi sono proposto di fare un' esposizione storico-critica della filosofia matematica, impresa della cui difficoltà mi sono reso *completamente conto;* per conseguenza non mi si deve incolpare di aver trascurato i filosofi greci, Leibniz, Cartesio, ecc.

II.ª Il Prof. Vailati mi domanda con quali fatti io potrei giustificare l' asserto che la critica kantiana si connette con le ricerche sui fondamenti della matematica; eccomi a rispondergli. Prima di tutto io non ho inteso dire che Gauss, Bolzano ecc. hanno *direttamente* apprese da Kant le loro idee, ma che queste si inquadrano nel grandioso movimento del pensiero iniziato da E. Kant. Nella storia delle scienze, si è osservato che le grandi idee non scaturiscono dalla mente dei pensatori come Minerva dalla testa di Giove, ma che c'è una preparazione che porta naturalmente ad esse, tanto vero è ciò, che di sovente tali idee sorgono contemporaneamente nella mente di più genii. Premesso questo, passo a spiegare il mio concetto (per ulteriori sviluppi rimando al cap. 1.° della prima parte ed alla 2.ª parte del mio lavoro). Il fondamento della filosofia delle scienze non è il simbolismo universale, ma è la critica e la determinazione del conoscere sperimentale; la scienza deve a Kant il primo tentativo completo di *critica* in tal senso considerata, dunque Kant è il primo che abbia tentato di *sistematizzare* le conoscenze di filosofia delle scienze. Chi ha ben compreso il *criticismo* si convincerà che tutta la *critica attuale* dei fondamenti delle matematiche è implicitamente compresa nei canoni fondamentali della filosofia delle scienze, quale fu ideata da Kant. A questo proposito avrei molti fatti da citare; ma mi limiterò ad alcuni:

Le idee filosofiche di Riemann ed Helmholtz rappresentano dei *momenti* di quello sviluppo del pensiero iniziato dalla *critica* di Kant (leggere i frammenti filosofici di Riemann e le conferenze di Helmholtz).

Nella trattazione della quistione del tempo (*Estetica trascendentale,* parte seconda) trovasi questa frase: *il tempo ha una dimensione;* evidentemente qui la parola dimensione è intesa in senso matematico, come corrispondente alla variazione di un ente semplicemente infinito, cioè in modo non diverso da quello in cui la considerarono Grassmann e Riemann.

Le quistioni delle categorie, della deduzione trascendentale, dei principii *a priori*, son tutte questioni vive, che si connettono con i varii indirizzi della filosofia matematica (cfr. la seconda parte del mio opuscolo).

III.ª Il Prof. Vailati ha creduto non fare cenno di alcune parti del mio lavoro, le quali sono il frutto dello studio delle più importanti fonti della filosofia moderna e delle mie meditazioni personali. Queste parti sono: l'esposizione storico-critica delle moderne teorie della logica e della psicologia; un tentativo di una determinazione scientifica del conoscere sperimentale; la trattazione generale e sintetica dei principii della filosofia delle matematiche; l'esumazione di alcune idee di G. B. Vico e di Pasquale Galluppi, ora pochissimo note, ecc. Che in tutto ciò non vi sia proprio nulla degno di essere menzionato?

Napoli, 15 Febbraio 1903.

G. GALLUCCI.

D.r E. BARDEY's. *Aufgabensammlung, methodisch geordnet, mehr als 8000 Aufgaben enthaltend über alle Teile der Elementarmathematik, vorzugsweise für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen, sowie für Seminare und Präparanden-Anstalten. In alter und neuer Ausgabe. Neue Ausgabe nach der sechsundzwanzigsten Auflage bearbeitet von* F. PIETZKER *und* O. PRESLER. *Zweite Auflage.* Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1902; 8.° p. VIII + 395 [Prezzo del vol. legato Mk. 3. 20].

L'opera di cui annunciamo la 28.ª edizione, malgrado lo straordinario e ben meritato successo che ebbe in Germania, è rimasta, come un'altra che di recente segnalammo (v. *Bollettino,* T. VI, 1902, p. 124) totalmente ignota in Italia. Eppure l'immensa raccolta di problemi scolastici interessanti che essa racchiude, il sapiente ordinamento adottato e le sobrie dilucidazioni annesse ad ogni problema dovevano pel passato e dovrebbero almeno per l'avvenire segnalarla all'attenzione dei nostri insegnanti. Siccome una raccolta di problemi mal si presta ad un'analisi particolareggiata e siccome la sua fisonomia è delineata con sufficiente chiarezza dall'elenco delle teorie che essa illustra, così siamo giustificati limitandoci a dar qui l'indice dei §§ in cui essa è divisa.

I. Preliminari. II. Introduzione al calcolo letterale. III. Addizioni e sottrazioni di monomi. IV. Addizione e sottrazione di polinomi. Parentesi. V. Grandezze relative (positive e negative). Addizione e sottrazione. VI. Moltiplicazione. VII. Divisione. Calcolo con quozienti.

VIII. Decomposizione in fattori. IX. Riduzione delle frazioni ai minimi termini. IX bis. Addizione e sottrazione delle frazioni. Quozienti di frazioni. X. Proporzioni. XI. Potenze ad esponenti interi positivi. XII. Potenze ad esponenti interi negativi. XIII. Radici e quantità irrazionali. XIV. Estrazione della radice quadrata. XV. Estrazione della radice cubica. XVI. Potenze ad esponente fratto. XVII. Quantità immaginarie. XVIII. Logaritmi. XIX. Frazioni continue. XX. Equazioni di 1.° grado ad un' incognita. XXI. Equazioni esponenziali riducibili ad equazioni lineari. XXII. Applicazioni delle equazioni di 1.° grado ad un' incognita. XXIII. Equazioni di 1.° grado a più incognite. XXIV. Applicazioni delle equazioni di 1.° grado a più incognite. XXV. Equazioni quadratiche ad un'incognita. XXVI. Applicazione delle equazioni di 2.° grado ad un' incognita. XXVII. Equazioni di 2.° grado con due incognite. XXVIII. Equazioni di 2.° grado con tre o quattro incognite. XXIX. Applicazione delle equazioni quadratiche a più incognite. XXIX bis. Massimi e minimi. XXX. Problemi inderminati. XXXI. Progressioni aritmetiche. XXXII. Progressioni geometriche. XXXIII. Interessi. XXXIII bis. Combinazione di progressioni aritmetiche e geometriche. XXXIV. Analisi combinatoria. XXXV. Probabilità. XXXVI. Il teorema binomiale. XXXVII. Equazioni di grado superiore in generale. XXXVIII. Equazioni cubiche. XXXIX. Equazioni biquadratiche. XL. Risoluzione delle equazioni per approssimazione.

G. L.

Dr. E. Bardey's *Anleitung zur Auflösung eingekleideter algebraischer Aufgaben. Zweite, völlig umgearbeitete Auflage von* Friedrich Pietzker. Leipzig und Berlin, Teubner 1903, 8.°, p. VIII + 160. [Prezzo del vol. legato Mk. 2, 60].

Uno dei più pericolosi scogli in cui s'imbattono coloro che cominciano lo studio dell'algebra è nel porre in equazione i problemi enunciati a parole. Onde uno dei compiti più delicati ed importanti del maestro consiste nell'insegnar loro ad evitarlo. A facilitare l'adempimento di siffatto ufficio è destinato appunto l'opuscolo che annunziamo. Il quale, benchè si presenti come una seconda edizione e come opera di due, è in realtà un'opera nuova, dovuta al Prof. Pietzker, ben noto agli insegnanti per altri preziosi lavori di indole didattica. Esso si apre con alcune osservazioni generali e contiene poi utili consigli sopra le principali catagorie di questioni che si sogliono proporre ai principianti e molteplici applicazioni. Le categorie suaccennate sono le seguenti: I. *Problemi puramente numerici.* II. *Problemi sul numero di oggetti numerabili.* III. *Problemi sopra misure di vario ge-*

nere. IV. *Calcoli di Miscele.* V. *Problemi di moto.* VI. *Applicazione di formole aritmetiche e trigonometriche.* VII. *Applicazioni di formole geometriche.* VIII. *Applicazioni di formole di meccanica.* IX. *Problemi di fisica e chimica.*

Sul valore dell'opera (come riconosce giustamente l'autore), un giudizio definitivo non potrà venire pronunciato che da chi l'avrà a lungo messa alla prova.

G. L.

E. Pascal. *Lezioni di Calcolo infinitesimale* (Parte I, Calcolo differenziale — Parte II, Calcolo integrale). Manuali Hoepli, Milano, 1903. Seconda edizione.

Nei due volumetti, che formano la seconda edizione delle sue *Lezioni di Calcolo infinitesimale*, l'A. non ha voluto — come dichiara esplicitamente nella prefazione — scostarsi che poco dalla prima. Ed infatti, la nuova non differisce dall'antica che per opportuni ritocchi, fatti in più punti del testo; i quali, senza per nulla alterare la fisonomia del medesimo, hanno spesso giovato assai alla chiarezza ed al rigore delle dimostrazioni. Tali modificazioni, pure essendo numerose, non sono dunque mai molto profonde, ma fanno sì che la presente edizione costituisca un notevole miglioramento della primitiva; ed esse renderanno quindi maggiormente bene accetto questo trattato, il quale, anche per le sue modeste dimensioni e la tenuità del prezzo, venne subito accolto con simpatia da coloro che intendono imparare una parte tanto fondamentale delle Matematiche superiori. Trattandosi di un'opera già conosciuta, non è certo ora il caso d'entrare in una disamina più o meno dettagliata della medesima; e perciò mi limiterò a far notare che le parti del volume dedicato al Calcolo differenziale, che più sensibilmente furono ritoccate, sono: La teoria delle serie di funzioni (ed in particolare, delle serie di potenze), le considerazioni sulla derivata di una funzione per valori infiniti di questa o della variabile, la teoria de' massimi e minimi delle funzioni di più variabili, e quella delle forme indeterminate. Nel volume dedicato al Calcolo integrale vennero specialmente aggiunte alcune considerazioni sulla lunghezza di un arco di linea, e la teoria dell'*integrafo*, colle svariate applicazioni di questo ingegnoso istrumento.

Prima di chiudere il presente rapido cenno, debbo far rilevare che la dimostrazione — fatta in principio del Calcolo differenziale — dell'esistenza di almeno un punto limite, per un gruppo di punti tutti compresi in un intervallo finito, appare nella nuova edizione, ancora più manifestamente che nella prima, come la dimostrazione del noto postulato di *Dedekind* sull'esistenza del numero che deve sempre separare due classi contigue di numeri (sul quale postulato è basata la teoria più comunemente usata dei numeri irrazionali). Ciò si spiega col fatto che, al termine di detta dimostrazione (pag. 5) l'A. si riferisce al teorema (dimostrato in appresso) che dà la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del limite di una funzione; e quest'ultima dimostrazione è a sua volta appoggiata (pag. 25) ad un teorema precedente, che riguarda l'esistenza del limite d'una funzione non decrescente o non crescente; nel quale teorema si ammette esplicitamente (pag. 21) l'esistenza del limite superiore di ogni gruppo di numeri, tutti minori di un determinato numero finito, quando manchi il massimo; ed analogamente, quella del limite inferiore, quando manchi il minimo. In tal modo (come l'A. stesso ha comunicato gentilmente a chi scrive) si sostituirebbe il postulato di *Dedekind* coll' altro che afferma l'esistenza di quei limiti superiore ed inferiore; e dopo ciò l'A. verrebbe, in fondo a dimostrare quello di *Dedekind*. Ma allora non bisogna dimenticare che, nei suoi ragionamenti, l'A. ha inteso di riferirsi sempre a valori *reali;* e quindi — se si vuole evitare il circolo vizioso — conviene supporre anzitutto che la teoria dei numeri irrazionali sia stata svolta, non prendendo le mosse dal postulato di *Dedekind* (come si usa fare generalmente, con molto vantaggio), ma da quel nuovo postulato: riguardando cioè i numeri irrazionali come limiti superiori (od inferiori) di certe classi di numeri razionali; il che è poi, in ultima analisi, il concetto di WEIERSTRASS.

Pavia, 21 Novembre 1902.

M. CHINI.

O. STOLZ UND J. A. GMEINER. — *Theoretische Arithmetik.* II *Abtheilung. Die Lehre von den reellen und von den complexen Zahlen.* — Zweite umgearbeitete Auflage der Abschnitte V-VIII, X, XI des ersten, I, II, V des zweiten Theiles der Vorlesungen über allgemeine Arithmetik von O. Stolz. — Leipzig, Teubner, 1902. XI-304 p., 8.°

Come per la prima parte dell'opera (V. *Boll.* 1901, p. 42), così anche per questa seconda ci limiteremo ad un raffronto colle classiche *Vorlesungen* di Stolz. Ecco dunque le principali aggiunte che troviamo nella nuova edizione.

Nel C. V (*Vorlesungen* I, C. V): La dimostrazione dell'indipendenza dei postulati fondamentali (p. 101-103), e lo studio dell'insieme dei segmenti considerato come un insieme continuo di grandezze assolute (p. 107-111).

Nel C. VI (*Vorl.* I, C. VI) solo alcune illustrazioni di poco conto.

Nel C. VII (*Vorl.* I, C. VII): Alcuni teoremi elementari sui limiti (p. 141-144, 163-167), e la definizione di limite superiore e inferiore (p. 167-170).

Nel C. VIII (*Vorl.* I, C. VIII): Il calcolo numerico della radice approssimata d'un numero decimale (p. 193-199).

Nel C. IX (*Vorl.* I, C. X, N. 1-12; C. XI, N. 1-6): La dimostrazione della continuità delle serie di potenze fatta senza l'uso esplicito del concetto di continuità — concetto che gli autori hanno ritenuto estraneo alla aritmetica propriamente detta — (p. 257-258).

Nel C. X (*Vorl.* II, C. I): La teoria dei quaternioni (p. 310-317).

Nel C. XI (*Vorl.* II, C. II, N. 1-11) alcune illustrazioni di pochissimo conto.

Nel C. XII (*Vorl.* II, C. II, N. 13, 17, 18): La teoria dell'esponenziale e del logaritmo (p. 361-377), che nella prima edizione (*Vorl.* I, C. VI, N. 1-4) era trattata in modo diverso.

Nel C. XIII (*Vorl.* II, C. V, N. 1-3): L'estensione del concetto di limite alle successioni di quantità complesse (p. 381-382), e lo sviluppo di e^x, sen x, cos x in serie di potenze per x complesso (p. 390-392) fatto con metodo diverso da quello usato nella prima edizione.

Notiamo ancora la teoria dei numeri complessi a più di due unità esposta da un punto di vista molto generale (p. 293-310), ed una ricca raccolta di esercizi e di applicazioni alla fine dei varî capitoli.

Le aggiunte al primo numero del C. IV (p. 395-396) confermano ciò che dicemmo nella recensione della 1.ª parte di quest'opera, che cioè quel capitolo, malgrado il suo titolo, contiene una teoria *formale* (o *analitica*) dei numeri razionali.

Le parti delle *Vorlesungen* di Stolz omesse in questa nuova edizione sono quelle che si riferiscono più propriamente alla teoria delle funzioni; esse, come gli autori promettono, formeranno il soggetto d'una nuova opera, che ci auguriamo veda presto la luce.

G. Vivanti.

G. Frizzo. *De numeris libri duo esposti ed illustrati. Appendice.* - Verona-Padova, Drucker, 1903, 8.º p. 25.

Quest'aggiunta ad un'opera che i nostri lettori conoscono (v. *Bollettino*, T. V, 1902, p. 49-51) contiene il testo e la traduzione della prefazione allo scritto del Noviomago, del quale il Prof. Frizzo trovò un esemplare completo nella Biblioteca comunale di Mantova.

G. L.

M. Schuster. *Geometrische Aufgaben und Lehrbuch der Geometrie. Planimetrie, Stereometrie, ebene und sphärische Trigonometrie. Nach konstruktiv-analytischer Methode bearbeitet. Ausgabe A: für Vollanstalten. Zweiter Teil: Trigonometrie.* Mit einer lithographierten Tafel. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1903, 8.°, p. VII + 112 [Prezzo del vol. legato Mk. 1. 60].

Non è soltanto per la ricchezza e l'eleganza delle questioni ivi contenute che il presente libretto va segnalato con lode. È anche per alcune innovazioni che sono in esso attuate. Anzitutto in esso il *seno* cavallerescamente cede il posto d'onore alla *tangente*, per ragioni didattiche sul cui valore lasciamo giudici gl'insegnanti. In secondo luogo l'antica divisione sessagesimale è surrogata dalla centesimale, della cui adozione l'egregio autore da tempo si è fatto apostolo ed a cui favore coll'opera presente porge un nuovo argomento. Finalmente (come da qualche tempo si va con ragione facendo in Germania) i problemi artificiosamente congegnati vengono surrogati con altri, di maggiore interesse, suggeriti dalla geometria pratica, dalla geografia matematica, dall'astronomia elementare e dall'ottica, discipline di cui l'autore ricorda quanto è necessario per risolvere le questioni che propone. Non basta forse ciò a dimostrare che l'opera dello Schuster è ben lungi dall'essere una volgare compilazione scolastica? Eccone, finendo, l'ordinamento ed il contenuto:

I. Il triangolo rettangolo. II. Applicazioni del triangolo rettangolo. III. Il triangolo obliquangolo. IV. Applicazioni del triangolo obliquangolo. V. Geometria. VI. Applicazioni della geometria. VII. Il triedro ed il triangolo sferico. VIII. Applicazioni geografiche ed astronomiche del del triangolo sferico rettangolo. IX. Applicazioni geografiche ed astronomiche dei triangoli sferici obliquangoli. Tavole.

G. L.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Herausgegeben von H. Burkhardt *und* W. Franz Meyer. Leipzig, Teubner.

V. *Bollettino* IV, 1901, p. 88.

Band I. Heft 7 (1902. Prezzo Mk. 3,60). R. Mehmke, *Numerisches Rechnen* (cont. e fine). Ahrens, *Mathematische Spiele.* Pareto, *Anwendung der Mathematik auf Nationalökonomie.*

Band II_2. Heft 1 (1901. Prezzo Mk. 5,20). Osgood, *Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen* a) *einer und* b) *mehrerer komplexen Grössen.* Wirtinger, *Algebraische Funktionen und ihre Integrale.*

Band III_3. Heft 1 (1903. Prezzo Mk. 5). Dingeldey, *Kegelschnitte und Kegelschnittensysteme.*

Band III_3. Heft 1 (1902. Prezzo Mk. 5,10). Mangoldt, *Anwendungen der Differential-und Integralrechnung auf Kurven und Flächen.* v. Lilienthal, *Die auf einer Fläche gezogenen Kurven.*

Band IV_1. Heft 2 (1902. Prezzo Mk. 4,60). Timerding, *Geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers.* Schönflies, *Kinematik.*

Band IV_2. Heft 1 (1901. Prezzo Mk. 3,80). Abraham, *Geometrische Grundbegriffe der Mechanik der deformirbaren Körper.* Love, *Hydrodynamik.*

NOTIZIE

I PREMI DELL' ISTITUTO DI FRANCIA. — Nella solenne adunanza del 22 Dicembre 1902 vennero conferiti: il Gran Premio delle Scienze matematiche a E. Vessiot ed una Menzione onorevole al Le Roux; il Premio Bordin al de Tanneberg; il Premio Francoeur ad E. Lemoine; il Premio Poncelet a M. d'Ocagne; il Premio Lalande al Trépied; il Premio Valz all'Hartwig; il Premio Damoiseau al Gaillot; il Premio Janssen a Aymar de la Baume-Pluvinel; ed il Premio Saintour venne diviso fra Riquier e Minet.

Vennero poi proposti i seguenti temi di concorso:

Gran Premio delle Scienze matematiche: Perfezionare, in qualche punto importante, lo studio della convergenza delle frazioni continue algebriche (3000 fr.)

Premio Bordin: Svolgere e perfezionare la teoria delle superficie applicabili sul paraboloide di rivoluzione (3000 fr.)

Premio Vaillant: Determinare e studiare tutti gli spostamenti di una figura invariabile i cui differenti punti descrivono delle curve sferiche (4000 fr.)

***

FERDINANDO CASPARY, nato in Unruhstadt (Posnania) il 29 Dicembre 1853 e morto a Berlino il 15 Agosto 1901, forma il soggetto di una commemorazione affettuosa e profonda che E. Jahnke presentò alla Società matematica tedesca (Jahresbericht der Deutsch. Math. Ver., XII Bd., p. 42-60) e che venne pubblicata anche a parte, accompagnata dall' elenco delle pubblicazioni dell' estinto e da una lettera di Hermite. Ivi sono accuratamente descritte le vicende dell'avventurosa vita del Caspary, delineato al vivo il suo carattere e determinati il valore ed il significato delle numerose sue pubblicazioni; le quali trattano di preferenza i metodi di Grassmann e le funzioni θ, ma anche le funzioni sferiche, la geometria del triangolo, ed altre questioni di geometria e meccanica. Il rimpianto, espresso dal Jahnke, per l'immatura scomparsa del Caspary, sarà diviso da tutti i matematici.

***

UN RAPPORTO SUI PROGRESSI RECENTEMENTE FATTI DALL'ANALISI VETTORIALE venne redatto da A. Macfarlane, dietro invito dell' « American Association for the Advancement of Science » e pubblicato nel Vol. LI (1902) dei *Proceedings* di questo sodalizio. Lo segnaliamo ai nostri lettori perchè porge molti particolari, agli Italiani generalmente sconosciuti, sulle numerose ricerche fatte durante questi ultimi dieci anni in Inghilterra, America, Olanda e Germania, Austria e Giappone sulle teorie fondate da Hamilton e Grassmann e sulle loro applicazioni alla meccanica ed alla fisica. Si vedrà da esso non essere tali teorie dimenticate e stazionarie; e si apprenderanno, non solo i perfezionamenti e le applicazioni che esse di recente ricevettero, ma anche l'enunciato di parecchie fondamentali questioni che le concernono e che importerebbe risolvere.

***

NUOVI PREMI PERIODICI. — Per onorare nel modo migliore i due Bolyai, l'Accademia Ungherese ha fondato un premio internazionale di 10,000 corone, da conferirsi ogni cinque anni all'autore della migliore ricerca geometrica pubblicato durante tale periodo. Giudice sarà una commissione composta di due membri dell'Accademia e di due altri matematici ad essa estranei.

Con analogo intento Re Oscar II di Svezia e Norvegia conferirà, pure ogni cinque anni, in memoria di Abel, una medaglia d'oro di 1000 corone al più cospicuo lavoro di matematica pura; le relative proposte verranno formulate dall'Accademia delle Scienze di Cristiania.

***

PUBBLICAZIONI IN OCCASIONE DEL PRIMO CENTENARIO DELLA NASCITA DI G. BOLYAI (15 DICEMBRE 1902). — Sotto gli auspicii dell'Accademia Ungherese delle Scienze e per cura degli accademici Kürschàck, Réthy e Totössy venne fatta una nuova edizione di lusso della celebre *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens.* Dal canto suo l'Università di Klausenburg pubblicò un volume in latino, non meno bello (*Libellus post saeculum quam Johannes Bolyai de Bolya anno* MDCCCII *a. d.* XVIII *Kalendas Januarias Claudiopoli natus est ad celebrandam memoriam ejus immortalem,* Claudiopoli MCMIII), il quale, oltre al fac-simile di una lettera del grande innovatore, contiene una memoria di L. Schlesinger su alcune applicazioni della geometria non-euclidea alla teoria delle funzioni di variabili complesse, una di P. Stäckel sulla meccanica degli spazii a più dimensioni e la traduzione della *Bibliografia della geometria non-euclidea* di R. Bonola, che i nostri lettori ben conoscono.

***

PUBBLICAZIONI RECENTI SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE:

E. Bortolotti. *Influenza dell'opera matematica di Paolo Ruffini sullo svolgimento delle teorie algebriche. Discorso letto il 4 novembre 1902 in occasione della solenne apertura degli studi nella R. Università di Modena.* (Estratto dall'Annuario della R. Università di Modena 1902-1903).

L'A., avendo avuto a propria disposizione il carteggio e l'archivio lasciati dal Ruffini, potè fornire nuovi interessanti particolari sopra la vita e le opere di questo celebre scienziato; auguriamo che, mantenendo una promessa da lui fatta, completi questo lavoro d'occasione, facendo conoscere tutto ciò d'interessante per la storia della scienza che si trova in quella collezione di manoscritti (1).

E. Lebon. *Sur un manuscrit d'un cours de J. N. Delisle au Collège Royal* (Paris, Delain, 1902).

Si tratta degli *Elemens geometriques de la sphere celeste dictés au Collège Royal,* il cui manoscritto venne casualmente scoperto dall'autore e da lui regalato alla Biblioteca dell'Osservatorio astronomico di Parigi.

H. Bosmans. *Documents inédits sur Grégoire de Saint-Vincent* (Annales de la Soc. scientifique de Bruxelles, T. XXVII, 1902-1903).

Continuando le ricerche intraprese nella nota *Deux lettres inédites de Grégoire de Saint-Vincent,* pubblicata nel volume precedente delle *Annales,* l'A. offre nuovi ed interessanti particolari sul famoso gesuita, così vivamente ed acutamente combattuto da Huygens.

F. J. Studnička. *Brevissimum Planimetriae compendium sua manu exaravit Tycho Brahe, nunc primum edidit* (Pragae, MDCCCCIII). Riproduzione in litografia di un manoscritto del celebre astronomo, esistente nella Biblioteca Carlo Ferdinando di Praga. Con dolore avvertiamo che questa pubblicazione chiude la serie numerosissima dei lavori del Prof. Studnička, mancato ai vivi, sessantasettenne, il 21 febbraio 1903.

(1) Questo nostro voto è in pieno accordo con quello che manifestò il ch.^{mo} Prof. E. Pascal presentando in omaggio il lavoro del Bortolotti al R. Istituto Lombardo nella seduta del 12 Febbraio u. s.

Bestonzo Pietro, Gerente.

Genova - Tipografia R. Istituto Sordomuti - 1903.

ANNO VI. LUGLIO, AGOSTO E SETTEMBRE 1903.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. **6**, per l'estero Fr. **7.50**. Numeri separati L. **2** caduno. — Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

RECENSIONI ED ANNUNZI

E. BOREL. *Leçons sur les séries à termes positifs professées au College de France, recueillies et rédigées par* R. d'Adhémar. Paris, Gauthier-Villars, 1902. VII+93 p. 8°.

È il quarto dei fascicoli che il Borel dedica alla teoria delle funzioni, e non è meno interessante dei precedenti.

Esso si divide in 6 capitoli.

Il Cap. I tratta delle serie a termini costanti. Dopo aver ricordato che i criteri di convergenza e di divergenza si dicono di 1.ª, di 2.ª,... specie secondochè dipendono da uno, da due,... termini, l'autore deduce da un teorema di Cauchy le serie di Bertrand:

$$\sum_n \frac{1}{n \,.\, \lg n \,.\, \lg_2 n \ldots \lg_{\mu-1} n \, (\lg_\mu n)^{1+\rho}},$$

che sono convergenti per $\rho > 0$, divergenti per $\rho \leq 0$, e che danno luogo ad altrettanti criteri di 1.ª specie. Data infatti una serie $\sum_n u_n$, e posto, per un determinato valore di μ:

$$u_n = \frac{1}{n \cdot \lg n \cdot \lg_2 n \ldots \lg_{\mu-1} n \left(\lg_\mu n\right)^{1+\rho_n}},$$

se il minimo e il massimo dei valori limiti dell'insieme $\rho_1, \rho_2, \ldots$ sono ambidue positivi, la serie è convergente, se sono ambidue negativi, è divergente; negli altri casi, o bisogna passare a valori più elevati di μ, o i criteri di Bertrand sono inapplicabili. Borel mostra come si possano costruire serie convergenti o divergenti per le quali questi criteri sono sempre in difetto, e stabilisce il teorema generale che, per quanto sia lenta la divergenza (o la convergenza) d'una serie, si possono sempre moltiplicare i suoi termini per quantità indefinitamente decrescenti (o crescenti) tali che la serie risultante sia ancora divergente (o convergente). Però egli osserva che le serie per cui i criteri di Bertrand sono insufficienti non si presentano mai nei casi ordinari, sicchè questi criteri possono ritenersi sufficienti per la pratica, almeno allo stato attuale della scienza. Un'altra ricerca interessante è, se esista una condizione necessaria di convergenza della forma:

$$\lim_{n=\infty} \varphi(n)\, u_n = 0,$$

$\varphi(n)$ essendo una funzione avente limite superiore infinito. Si trova che, per una serie qualunque, non esiste altra condizione necessaria che $\lim_{n=\infty} u_n = 0$.

Nel Cap. II si trovano, per gli integrali estesi ad un intervallo infinito, risultati analoghi a quelli contenuti nel Capitolo precedente.

Il Cap. III si occupa del modo di crescere delle funzioni. Constatata l'esistenza di funzioni a crescenza irregolare, cioè che per infiniti valori di x sono prossime ad una data funzione e per altri infiniti valori ad un'altra, l'autore cerca di applicare il noto concetto di ordine d'infinito alla misura della rapidità con cui una funzione aumenta al tendere di x ad ∞. Se $\lim_{x=\infty} \frac{y}{x^\mu}$ è finito e diverso da zero, si dice che y è d'ordine μ; se per qualunque valore positivo di ε si ha:

$$\lim_{x=\infty} \frac{y}{x^{\mu-\varepsilon}} = \infty, \quad \lim_{x=\infty} \frac{y}{x^{\mu+\varepsilon}} = 0,$$

si dice che l'ordine di y è (μ). Con ω poi si denota l'ordine di e^x, con ω^2 quello di e^{e^x}, con $\frac{1}{\omega}$ quello di $\lg x$. Se n è un numero positivo qualunque, e se α, β sono due numeri interi positivi, si ha:

$$\omega + n = n + \omega\,,\quad \omega^{\alpha}\,\omega^{\beta} = \omega^{\alpha+\beta}.$$

La moltiplicazione degli ordini non è commutativa, ma è associativa; la moltiplicazione a destra è distributiva rispetto all' addizione.

Nel Cap. IV l' autore osserva, che ad ogni criterio per le serie semplici e ad ogni modo di raggruppamento dei termini d' una serie doppia corrisponde un criterio per quest' ultima serie, e dà alcune applicazioni di questo principio. Segue lo studio di qualche integrale multiplo esteso ad un campo infinito.

Il Cap. V è dedicato alle serie di potenze d' una variabile. Dopo aver ricordato il teorema di Cauchy-Hadamard, l' autore incomincia a trattare delle funzioni intere, e si propone il problema di determinare l' ordine di grandezza d' una serie convergente per ogni valore di x dato quello dei coefficienti; egli trova che, se (p) è l' ordine di $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$, quello di $\sum\limits_n a_n x^n$ è $\omega\left(\dfrac{1}{p}\right)$. Molto più difficile è il problema inverso, il quale anzi non ammette una risoluzione generale. Ancora più incompleta è la teoria delle serie di potenze aventi raggio di convergenza finito. È notevole l' osservazione di Borel che, tanto per le serie dell' uno come per quelle dell' altro tipo, il fatto che la somma della serie cresce indefinitamente al crescere di x è dovuto alla circostanza che, per ciascun valore di x, *uno* dei termini della serie diviene grandissimo; il metodo per la ricerca di questo *termine massimo* conduce a risultati assai vicini a quelli che ottiene per altra via Le Roy. Il Capitolo si chiude con un cenno sulle ricerche di Hadamard intorno al modo di comportarsi d' una serie di potenze sulla circonferenza del suo cerchio di convergenza.

Infine il Cap. VI ed ultimo tocca alcune questioni relative alle serie di potenze di più variabili.

La natura speciale degli argomenti trattati in questo opuscolo ci ha costretti a sorvolare su molti punti di grande interesse e ad astenerci da qualunque osservazione critica o comparativa. Non possiamo però terminare senza far notare come la forma viva e *parlante* usata dal Borel in questi suoi lavori ne renda la lettura, oltre che interessante, anche piacevole, come troppo di rado avviene per le opere che trattano la severa scienza delle grandezze. Tale pregio, unito all' altro della piccola mole, contribuirà senza dubbio alla maggior diffusione di questi preziosi opuscoli, che sono destinati ad attirare l' attenzione generale su alcune delle questioni più importanti e meno note dell' analisi moderna.

G. Vivanti.

Hermann von Helmholtz von LEO KONIGSBERGER. Erster Band.' Mit drei Bildnissen. Braunschweig, Vieweg, 1902, 8.° p. XII + 375. [Prezzo del vol. in broch. Mk. 8, leg. in tela Mk. 8, leg. in mezza pelle Mk. 12].

La letteratura biografica si arricchisce di un nuovo ottimo elemento (1), coll'opera — da vario tempo annunziata ed impazientemente attesa — di cui oggi segnaliamo il I Vol. ai cortesi nostri lettori.

L'uomo che ne forma il soggetto è una personalità che campeggia gigante nella coorte di scienziati che videro la luce in Germania nel corso del secolo passato. La storia della medicina, quella della fisica e quella della matematica si disputano l'onore di narrare le gesta di colui che, dal modesto ufficio di medico militare, seppe assurgere ai più alti gradi della gerarchia sociale, di chi, per meglio comprendere l'intricato meccanismo che offre il corpo umano, divenne un fisico di primo ordine ed un matematico originale e profondo.

Nessuno era più indicato del Königsberger a scrivere la biografia dell'Helmholtz: egli ebbe, infatti, con questo relazioni di amicizia; egli disponeva di competenza sufficiente per giudicarne l'immensa e variopinta produzione intellettuale; egli infine potè giovarsi del prezioso materiale biografico rappresentato dal carteggio famigliare e scientifico del sommo scienziato. Questo materiale gli ha permesso anzitutto di porre nella debita luce il di lui padre; uomo questi, come disse Fichte, « ricco di profonda dottrina e di doti intellettuali non inferiori a quelle del figlio, il quale, unicamente in causa delle malattie e delle assorbenti occupazioni ufficiali (2), non potè completamente riuscire nel mondo », e che mai cessò di essere, più che padre affettuoso, amico fedele e consigliere illuminato del figlio suo, i cui trionfi gli procuravano una gioia così completa e pura quasi fossero i suoi propri.

Ermanno Luigi Ferdinando Helmholtz nacque a Postdam il 31 Agosto 1821, primogenito di Augusto Ferdinando Giulio e di Carolina Penne, discendente dal cittadino americano William Penne, dal cui nome proviene quello di Pensilvania. Robusto più d'intelletto che di fisica costituzione egli cominciò a Postdam gli studi secondarî ed a Berlino li finì, ottenendo, addì 12 Settembre 1838, un ottimo certificato di licenza. Mediante il quale gli fu facile ottenere l'accesso, in qualità

(1) Quasi saggio di essa può considerarsi la lettura *H. von Helmholtz, Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik und Mechanik,* pubblicata sei anni fa dal Königsberger.

(2) Dopo aver preso parte alle guerre del 1813 e 1814, si dedicò all'insegnamento secondario e dal 1820 al 1856 fu professore di Liceo; nato il 21 Dicembre 1792, morì il 6 Giugno 1859.

di studente, nel R. Istituto medico-chirurgico Federico di Berlino, ove venivano istruiti gli aspiranti al posto di medico militare. Quivi rimase durante quattro anni, attendendo non solo agli studi regolamentari, ma anche ad altri, che apparentemente non avevano alcun legame colla carriera a cui egli si dedicava, ma che vanno notati perchè in alcuni si trova la più profonda radice di alcuni lavori di Helmholtz; tali sono i suoi studi di matematiche superiori e le sue occupazioni musicali. Il 2 Novembre 1842 gli venne conferito la laurea dottorale, dietro presentazione della Dissertazione dal titolo *De fabrica systematis nervosi evertebratorum*, contenente osservazioni nuove ed importanti; e dal 1.° Ottobre 1843 egli fu nominato chirurgo nel Reggimento degli Usseri della Guardia residente a Postdam. Tale ufficio egli tenne sino al 1848, alternando l'adempimento dei doveri professionali con ricerche di scienza pura, fra i prodotti delle quali ci basterà ricordare il celebre saggio *Ueber die Erhaltung der Kraft* che, non avendo potuto ottenere dal Poggendorff l'ingresso negli « Annalen der Physik », venne pubblicato a parte dal Reimer nel 1847. Come constatazione ufficiale della considerazione, cui l'Helmholtz seppe ben presto procacciarsi, sta il fatto che egli venne proposto, dal suo antico maestro di fisiologia Giov. Müller, per le cariche di professore d'anatomia nell'Accademia di Belle Arti di Berlino e di ajuto presso la Collezione anatomico-zootomica di quella città. Una bellissima lezione di prova tenuta il 19 Agosto 1848 (che il Königsberger ha giudiziosamente riprodotta) lo manifestò a tutti degno di quei posti, che gli vennero effettivamente conferiti per Decreto del 6 Ottobre del medesimo anno.

Egli però non doveva occuparli a lungo; chè, in seguito ad invito della Facoltà medica di Königsberger, con altro Decreto del 19 Maggio 1849, veniva nominato professore straordinario di Fisiologia. Poco dopo (26 Agosto) si univa in matrimonio con Olga von Velten, di cui da varii anni era il fidanzato. L'ordinariato gli venne conferito dopo due anni e mezzo, cioè con Decreto reale del 17 Dicembre 1851. Gli anni 1849-1855 che Helmholtz passò a Königsberger vanno annoverati fra i più fecondi e felici di tutta la sua esistenza. Se, ciò non ostante, egli, prima fece buon viso ad offerte di trasferimento che gli venivano da Bonn, e poi si adoperò a che questo avesse luogo, gli è che il clima troppo rigido di Königsberg minacciava di riuscire fatale a sua moglie. I negoziati, non privi di lunghezza e non scevri di difficoltà, ebbero finalmente buon esito, sicchè nell'autunno 1855 la famiglia Helmholtz potè piantare le sue tende sulle rive del Reno.

Ma l'obbligo che il nostro scienziato assunse di insegnare anche l'anatomia, e gli ostacoli che il governo prussiano continuamente frapponeva alla costruzione dei promessi nuovi locali, fecero sì che egli non rimanesse sordo agli inviti lusinghieri e reiterati che il governo badese gli faceva di andare ad occupare la cattedra di fisiologia vacante nell' Università di Heidelberg. Lunghissime e piene d'accidenti furono le relative negoziazioni; alla fine, nel Settembre del 1858, Helmholtz potè stabilirsi a Heidelberg, ove Bunsen e Kirchhoff lo attendevano; con questi egli determinò per quell' Università un periodo di splendore « raro per una Università e che forse non si riprodurrà mai più ».

Durante il soggiorno a Heidelberg avvennero per Helmholtz avvenimenti di eccezionale gravità; cioè la morte del padre, e poi la lunga malattia e la morte della moglie (28 Dicembre 1859). Riavutosi dal lungo terribile abbattimento prodotto da questi fatti dolorosissimi, Helmholtz non tardò a riconoscere che il nuovo ordinamento della sua casa (ove due figliuoletti erano completamente a carico della vecchia loro nonna) era assai imperfetto: donde la spiegazione del suo fidanzamento con Anna von Mohl ed il matrimonio (16 Maggio 1861) con la donna destinata ad essergli sino alla morte compagna ammirabile.

Con questo avvenimento si chiude il I vol. dell'opera del Königsberger.

Il desiderio di essere brevi ed il programma del *Bollettino* ci sconsigliarono di entrare, nel corso di questo riassunto, in particolari sulle ricerche molteplici che ebbero per definitivo risultato la *Physiologische Optik* e *Die Lehre von den Tonempfindungen*. Ci vietarono anche di far conoscere con precisione l'arte con cui il Königsberger seppe sfruttare il carteggio posto a sua disposizione, facendo sì che la biografia di Helmholtz risultasse in gran parte narrata da lui stesso e dai suoi corrispondenti, ed il giudizio sopra il significato ed il valore delle sue opere fosse pronunciato più spesso da altri che dal biografo. A chi poi interessa di avere un'idea sintetica del legame esistente fra la brillante serie di opere dell' Helmholtz e le vicende della sua esistenza, riuscirà gradito l'indice biografico premesso al volume, ove si trovano intercalate le date più notevoli della sua esistenza.

Nè va taciuto che il volume va adorno di tre bellissimi ritratti; uno dei quali riproduce una *daguerrotipia* del 28 Marzo 1848, un altro è tolto da un' incisione fatta in Inghilterra nel 1867, ed il terzo è la riproduzione dello splendido ritratto ad olio fatto dal Lenbach nel 1876. G. L.

P. Bachmann. *Niedere Zahlentheorie*. Erster Teil. Leipzig, Teubner, 1902. X-402 p., 8.° (Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften X 1).

Con questo lavoro l'illustre autore ha inteso in qualche modo di completare la sua grande opera sulla teoria dei numeri, dando posto in esso a varî argomenti che in questa, per ragioni sistematiche, furono lasciati da parte o toccati appena. La prima parte, che ci sta dinanzi, è dedicata, come dice l' autore, all' aritmetica *moltiplicativa*, cioè fondata sul concetto della divisibilità, mentre la seconda tratterà dell' aritmetica *additiva*. Questa prima parte, che si apre con un' interessante introduzione storica, si divide in 7 capitoli.

Il C. I (*Numeri interi ed operazioni elementari*) stabilisce la definizione di numero secondo il concetto di Dedekind, ed introduce le tre prime operazioni aritmetiche.

Il C. II (*Divisibilità dei numeri*) tratta dei numeri frazionarî, dei numeri primi, del massimo comun divisore e del minimo multiplo di più numeri; notiamo qui il calcolo della massima potenza d' un numero primo contenuta in un fattoriale, ed altre ricerche che si connettono collo studio della funzione $[x]$.

Il C. III (*Resti e congruenze*) contiene i teoremi fondamentali sulle congruenze e la teoria delle congruenze e dei sistemi di congruenze di 1.° grado, la scomposizione delle frazioni in somme di frazioni semplici, e lo studio della fuznione $\varphi(n)$ e delle sue varie generalizzazioni; come applicazione, la formola di Smith e Mansion.

Il C. IV (*L' algoritmo di Euclide*) tratta del metodo d' Euclide per la ricerca del massimo comun divisore; segue la teoria delle frazioni continue, quella dell' algoritmo d' Euclide generalizzato, e quello delle serie di Farey, che è svolto con particolare ampiezza.

Il C. V (*Teoremi di Fermat e Wilson*) dà la dimostrazione di questi teoremi e delle loro generalizzazioni, e studia poi la funzione $q(a)$ definita dalla congruenza:

$$a^{p+1} \equiv 1 + p \cdot q(a) \pmod{p^2}$$

Il C. VI (*Teoria dei resti quadratici*), che occupa circa un terzo dell' intero volume, è dedicato essenzialmente alla storia del teorema di reciprocità ed all' esposizione sistematica delle principali dimostrazioni di esso.

Infine il C. VII (*Congruenze d' ordine superiore*) tratta dapprima delle congruenze binomie e degli indici, poi delle congruenze di forma qualunque, e si chiude colla 7.ª dimostrazione di Gauss del teorema di reciprocità.

G. Vivanti.

Federico Enriques e Ugo Amaldi. *Elementi di geometria ad uso delle scuole secondarie superiori.* Bologna, Zanichelli, 1903; 8.°, pag. XXII+655 (prezzo L. 4,50).

Quest' opera di cui voglio occuparmi è di quelle che vanno prese in serio esame per ciò che riguarda l' assetto generale delle varie teorie in se stesse ed il coordinamento di queste le une con le altre, trattandosi del lavoro di due egregi scienziati che si sono occupati precedentemente di questioni relative agli elementi della geometria (1) ed uno dei quali si occupò anche dei principii della geometria nell'indirizzo projettivo, iniziato da Cayley e Klein e proseguito poi dal Pasch, dallo Schur, dal Peano e da tanti altri.

L'opera si divide in 17 capitoli (oltre ad una breve introduzione) quasi tutti seguiti da esercizi opportunamente scelti (in tutto circa 600). Otto capitoli sono dedicati alla planimetria ed in essi si tratta ordinatamente degli enti fondamentali; delle figure poligonali; del cerchio e delle figure a contorno curvilineo; della teoria delle parallele e delle sue applicazioni (parallelogrammi, punti notevoli di un triangolo, angoli nel cerchio, poligoni regolari); della teoria dell'equivalenza; di quella delle proporzioni e delle sue applicazioni (proporzioni di segmenti e poligoni, poligoni simili); della lunghezza della circonferenza e della superficie del cerchio; della teoria della misura. Nei rimanenti capitoli vengono svolti gli argomenti di stereometria nel seguente ordine: rette e piani nello spazio; angoli e poliedri: sfera; rette e piani paralleli, prisma; cilindro, cono e figure limitate da superficie curve; equivalenza delle figure poliedriche; proporzioni e similitudini; i solidi e le superficie del cilindro, del cono e della sfera; misura.

In gran parte il metodo seguito in questo libro apparisce come una fusione di quello comune coi metodi adottati negli *Elementi di geometria* del Veronese e con le varianti in essi introdotte dall'Ingrami (2), per cui non sarà possibile d'intraprendere un serio esame dell'opera di cui ci occupiamo senza entrare in convenienti raffronti specialmente con l'opera del Veronese, la quale contiene l'esposizione degli elementi della geometria con un indirizzo ben diverso da quello tenuto negli altri testi, compresi i più recenti, e fatta in seguito ad una profonda critica dei principii condotta dall'Autore stesso (3).

Riscontriamo il metodo comune, oltrechè in tutte quelle parti le quali nelle loro linee generali hanno ricevuto ormai un assetto che per il momento pare definitivo e che, all'infuori di particolarità non essenziali, vengono svolte in tutti i trattati con lo stesso indirizzo, là dove si trae dall'esperienza il concetto di retta, di piano, di spazio (a differenza di quanto si fa nel libro del Veronese, nel quale vi è una forma, la retta, che serve a determinare tutte le altre), e quando

(1) V. l'interessante volume: *Questioni riguardanti la geometria elementare ecc. raccolte e coordinate da F. Enriques*, Bologna 1900.

(2) *Elementi di geometria*, Bologna, 1899.

(3) Per quanto riguarda l'opera del Veronese si veda la mia recensione pubblicata nel *Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche*, 1902. p. 104. L'edizione a cui principalmente mi riferisco nei confronti che faccio è quella del 1901.

gli Autori non si preoccupano di dare un sistema di postulati logicamente indipendenti. A questo riguardo gli A. osservano nella prefazione che « per ridurre il numero dei postulati si andrebbe incontro ad una critica minuta, didatticamente inaccettabile..., e che a nulla varrebbe affermare l'indipendenza dei postulati senza dimostrarla, e una dimostrazione di codesto genere condurrebbe necessariamente nei campi delle matematiche superiori ». Ora a me sembra che certo non la critica ma i risultati di questa abbiano a trovar posto, per quanto le esigenze didattiche lo consentano, nei libri destinati alle scuole medie, e che quando siasi potuto stabilire un sistema di postulati di cui lo scienziato abbia la certezza che sono fra loro logicamente indipendenti, o per lo meno di uno che non molto si discosti da tale ideale, questo abbia ad aver la preferenza. Che se un sistema siffatto è tale da rendere scabrosa per le menti dei nostri giovani la deduzione di qualche proposizione, si potrà di questa tralasciare la dimostrazione, senza porla fra i veri postulati, come fa il Veronese e come consiglia (pag. VI) l'Ingrami.

Ci troviamo di fronte al metodo seguito dal Veronese anzitutto nel principio scientifico fondamentale applicato per primo da questo Autore nei suoi *Fondamenti* e negli *Elementi*, e cioè che è vano parlare di stretto rigore scientifico se dal sistema di verità geometriche, astraendo dall' intuizione (cioè dal loro significato geometrico) non rimane un sistema di verità logicamente ben determinato, come nell'aritmetica; e nel principio didattico fondamentale che i nostri A. esprimono a pag. I.ª con le frasi « Un falso concetto del rigore scientifico fa ritenere a taluni che l' ideale della scienza geometrica consista nel bandire sistematicamente l'osservazione intuitiva; onde si sarebbe condotti ad una trattazione astrusa degli elementi, inaccessibile al principiante, ed inconciliabile collo scopo educativo della geometria. La geometria è scienza d'osservazione e di ragionamento, essa deve educare nei giovani queste due qualità » e che il Veronese in più occasioni (1) esprime dicendo che: « L'insegnamento della geometria dev' essere sempre vivificato dall' intuizione, sicchè il ragionamento apparisca più come una conseguenza dell' intuizione che di una logica arida ed astratta ».

Gli A. seguono ancora il Veronese quando fanno uso del concetto di movimento soltanto nelle osservazioni empiriche che premettono all' enunciato di certi postulati o che aggiungono a giustificazione di certe definizioni, senza che esse formino parte necessaria dello svolgi-

(1) Cfr. p. e. la prefazione agli *Elementi di geometria* ed il lavoro: *Les postulats de la Géométrie dans l'enseignement*. Atti del Congresso matematico di Parigi, 1900.

mento logico della materia, metodo questo che il Veronese esprime nella prefazione dicendo « si sono premesse ai postulati e ad alcune definizioni delle osservazioni empiriche, nelle quali si fa uso di concetti acquistati già dagli alunni empiricamente, che servono a chiarirli e a giustificarli, ma senza che di quei concetti si faccia uso nel ragionamento, quando essi non siano stati logicamente stabiliti nelle proposizioni che servono di base al ragionamento stesso » e gli A. pure nella prefazione là dove dicono « cominciamo collo sviluppare una serie di osservazioni ed esprimiamo il risultato di queste con un postulato enunciato in forma precisa. Dal postulato facciamo discendere col ragionamento logico i vari teoremi che ne dipendono, e ritorniamo di continuo a spiegazioni ed osservazioni di carattere intuitivo ».

Ci troviamo ancora di fronte al metodo tenuto dal Veronese quando gli A. assumono come eguali anche le figure simmetriche nello spazio, le quali nei comuni trattati non si considerano come tali: quando definiscono l'angolo ed il diedro rispettivamente come parti di un fascio di raggi e di semipiani distinguendoli dalla regione angolare e dalla regione diedrica che hanno per elemento il punto (1): quando trovano opportuno di fermarsi con maggiori particolari che non si faccia nei libri comuni, sulla divisione in parti del piano, dello spazio, dei triangoli, dei poligoni, dei poliedri, e di dar forma logica a concetti intuitivi, come p. e. al concetto dei versi nel piano e nello spazio.

L'affinità del metodo seguito dagli A. con le varianti introdotte dall'Ingrami in quello del Veronese apparisce nel modo di trattare dell'uguaglianza, dando la definizione di figure eguali caso per caso. Anzi i nostri A. si spingono in questo metodo più in là dell'Ingrami, giacchè nel mentre questi, dopo aver posti separatamente i concetti di eguaglianza tra gli angoli, i poligoni, i diedri, gli angoloidi, i poliedri, le striscie e gli strati, ne deduce (nell'Appendice al cap. XII) una definizione generale di eguaglianza, di cui si serve nel seguito (salvo a far osservare in nota come potrebbesi anche procedere senza fondarsi sull'Appendice anzidetta), essi non vengono mai a ricavare dalle varie definizioni una che valga sempre. Come ebbi già ad esprimermi quando riferii sull'opera dell'Ingrami (2), non trovo questo metodo didatticamente buono. È troppo vivo nell'intuizione dei giovani il concetto generale di eguaglianza per poterlo sottoporre con profitto delle loro facoltà mentali ad una scomposizione in particelle, e per poter esigere che p. e. la proposizione « due archi di una stessa circonferenza o di circonferenze eguali si dicono eguali se sono compresi

(1) Non capisco come in conformità a questo gli A. non abbiano definito p. e. la *striscia* (pg. 173) come parte di un fascio di rette parallele.

(2) *Periodico di matematica*, Fascicolo di Sett.-Ott. 1899.

da angoli al centro eguali » non entri nella loro mente con la credenza loro che si tratti di un teorema che si enunci senza darne la dimostrazione, anzichè col vero spirito di una definizione, e ciò torna evidentemente anche a scapito della distinzione da parte degli scolari dell'ufficio delle varie specie di proposizioni. A me pare adunque che una volta convenuto, come fanno gli A., di accettare l'idea dell'esclusione del movimento dalle basi della geometria, idea della quale è doveroso riconoscere la priorità al prof. Veronese, convenga pure accettare la definizione generale di eguaglianza data da quest'Autore, la quale, com'ebbi ad esprimermi in un altro scritto (1), segna uno dei più rilevanti progressi fatti ai nostri giorni dalla geometria elementare. Essa presenta una grande generalità disgiunta da qualsiasi artificiosità, il che è dovuto al fatto ch'è stata dedotta dal concetto logico e primitivo dell'eguaglianza che è quello che noi adoperiamo comunemente nel discorso (2). Ed è per questo che la definizione del Veronese, quando venga convenientemente spiegata con esempi intuitivi, riesce bene accetta ai giovani, i quali tanto più l'apprezzano quando vedono nel seguito che le dimostrazioni di parecchi teoremi si riducono in fondo alle poche parole « le figure F, F′ sono eguali perchè sono figure corrispondenti in figure eguali ». Temono alcuni che torni difficile agli alunni delle nostre scuole il concetto di corrispondenza sul quale la definizione del Veronese è fondata, ma io credo che nessuno di essi abbia provato a far uso di tale concetto nella scuola, altrimenti si sarebbe accorto che i giovani con esso abbastanza facilmente si famigliarizzano, e non può essere diversamente quando si pensi che ne fanno uso spesso nella vita pratica. Del resto è così importante il concetto di corrispondenza e così utile anche in altre questioni, da valer bene la pena di affrontarlo ed insistervi fin da principio, chè il tempo in ciò impiegato si tradurrà in un notevole risparmio nel seguito.

Nel caso del testo attuale poi, in cui non si viene mai a porre una definizione veramente generale di figure eguali (diversamente da quanto fa, come dissi, l'Ingrami), si va incontro ad un altro inconveniente, che cioè se mai l'allievo si troverà di fronte a figure di quelle non considerate nel libro (p. e. a delle ellissi), non potrà decidere se siano eguali o no, non sapendo quando dovrà chiamarle eguali, almeno stando alle nozioni da lui acquistate nella scuola.

La parte più originale dell'opera è quella che si riferisce alla teoria dell'equivalenza. Gli A. dopo aver rilevato nella prefazione il

(1) V. *Osservazioni sulla Nota « Pro fusione » del prof. De Amicis* - Bollettino di Mathesis, 1898.
(2) Cfr. Veronese, *Fondamenti di geometria* ecc., Padova 1891.

ben noto inconveniente che si ha in questa teoria per il fatto che la definizione, cui ordinariamente si ricorre, fondata sulla decomponibilità in parti rispettivamente eguali, non è più sufficiente quando si passa p. e. al cerchio ed al tetraedro, per cui se ne estende allora il concetto in base alla teoria dei limiti, scindono codesta teoria in due parti: quella delle figure *equivalenti* (decomponibili in parti rispettivamente eguali), e quella delle *superficie e solidi eguali* chiamando *uguali* due superficie (o due solidi) quando l'una non sia *maggiore* dell'altra (o *prevalente* sull'altra), dopo aver posta (pg. 261) la definizione: « se due figure (piane) a contorno curvilineo sono divise in parti, per mezzo di segmenti e di archi di circonferenza, sicchè esse risultino somme di poligoni curvilinei, e se fra le parti dell'una si trovano tanti poligoni eguali a quelli in cui l'altra è divisa, e qualche parte residua, la prima figura si dice *prevalente* sull'altra, e la seconda *suvvalente* alla prima », definizione che vien poi estesa (pg. 583) alle figure solide limitate da superficie piane o curve.

Stando adunque a queste definizioni una superficie piana F si dirà uguale ad una F′ quando non è possibile eseguire nelle due figure una scomposizione in parti, mediante segmenti ed archi di cerchio, in modo che ciascuna parte dell'una, p. e. della F′, ne abbia una di corrispondente eguale nell'altra, la quale contenga inoltre qualche parte ancora. Ora dopo questo non rimane affatto giustificata l'asserzione (pg. 264) « confrontando due superficie si ha dunque che l'una di esse è maggiore, uguale o minore dell'altra », perchè nulla ci impedisce di credere (stando a quanto è esposto nel testo) che possano esser date due superficie F, F′ di cui la prima sia maggiore (nel senso intuitivo di questa parola, e si badi bene che la definizione formale di una parola in geometria elementare deve comprendere tutti i casi che quella parola comprende nel suo senso intuitivo) della seconda, e che non esista una scomposizione loro in parti tali che ognuna di quelle di F′ abbia la corrispondente eguale in F, la quale contenga qualche parte ancora; allo stesso modo che possono esser date due superficie G, G′ eguali (nel senso intuitivo della parola) senza che sia possibile una loro scomposizione in parti rispettivamente eguali: in tal caso dunque, stando alle definizioni adottate dagli A. dovrebbesi concludere che F, F′ sono due superficie eguali. Per spiegarmi ancora di più, nulla di quanto è contenuto nel libro mi vieta di estendere le anzidette definizioni a due superficie di cui una o entrambe non siano contenute in un piano, chiamando sempre una maggiore dell'altra (e questa minore di quella) quando avviene quel tal fatto che abbiamo più volte detto, e dicendole in caso contrario eguali. Allora prendo una calotta sferica e la sua base, e dico: siccome non è possibile scomporre le due superficie in modo che ecc., così una di esse non è maggiore dell'altra, cioè sono eguali.

Dopo queste osservazioni risulta dunque che, acciocchè le definizioni date dagli A. si trovino in armonia con l'intuizione, devesi ammettere che il maggiore e minore non costituiscono necessariamente l'intera negazione dell'eguale (ritenendo il maggiore, minore, eguale come son definiti nel testo), e questo fatto infirma tutte le dimostrazioni che nel libro si fanno seguendo la via tenuta per il cerchio a pg. 368-70 e per i tetraedri a pg. 585-88. Infatti nella dimostrazione p. e. della pg. 368 si dice: « Indichiamo con (C) la superficie del cerchio dato e con (T) quella del triangolo che ha per base la lunghezza della circonferenza data e per altezza il raggio di questa. Per dimostrare che (C) è uguale a (T) basta far vedere che (C) non può esser nè maggiore, nè minore di (T) ». Ora ciò non va bene; bisognerebbe dire: « basta far vedere che non è (C) non eguale a (T) »; e siccome, per quanto abbiamo osservato, non possiamo affermare che le relazioni $(C) > (T)$, $(C) < (T)$ formino l'intera negazione dell'uguale, così non basta dimostrare che non possono aver luogo queste due relazioni per poter affermare che (C), (T) non sono disuguali, e che perciò sono eguali.

I teoremi astratti della teoria delle proporzioni, svolta col metodo degli equimultipli, sono, dal punto di vista didattico, opportunamente divisi in gruppi, ognuno dei quali è seguito da tutte quelle applicazioni che ne derivano, cosicchè rimane diminuito lo sforzo che deve subire la mente dei giovani per impadronirsi di quella teoria certo scabrosa. Tuttavia si potrebbe osservare che gli A. si giovano dell'equivalenza per la dimostrazione di alcune proposizioni della teoria delle proporzioni, il che non è da approvare dal punto di vista della uniformità del metodo, essendo le due teorie affatto indipendenti, e tanto più che si può raggiungere lo stesso scopo senza ricorrere a tale intromissione e senza nulla perdere in facilità (1). Gli A. stessi mostransi contrari a fondere fra loro argomenti di natura diversa là dove (pg. VI) dichiarano che hanno introdotto il postulato delle parallele assai tardi nell'organamento della loro Geometria, « giacchè le proprietà dell'eguaglianza dei poligoni, e le prime relazioni relative al cerchio non ne dipendono affatto, e non vengono per nulla rese più facili dall'uso di quella estranea considerazione ». In questo il libro attuale discorda dagli *Elementi* del Veronese nei quali si parla di rette parallele molto per tempo, il che permette all'Autore di raggiungere il notevole vantaggio di dimostrare la proposizione fon-

(1) Cfr. la mia Nota: *La teoria detta dei segmenti proporzionali* ecc., Pitagora, anno V, n.° 4.

damentale del piano evitando il difetto rilevato da Gauss in quell'assioma. Però veramente non si può dire che gli A. si attengano scrupolosamente al criterio espresso dalle frasi poco sopra citate, il che avverrebbe se premettessero tutte le proposizioni comuni alle tre geometrie di Euclide, di Lobatschewsky e di Riemann; anzi, senza enunciarlo con un postulato, ammettono fin da principio (pg. 6, n.° 15) che la retta è divisa da un suo punto in due parti, cioè che essa è una linea aperta, escludendo così subito la geometria Riemanniana, e mentre a quest'ultima appartengono pur certi teoremi relativi ai triangoli (p. e. quelli delle pg. 62, 64, 65), essi ne vengono esclusi giacchè le loro dimostrazioni, fatte come sono secondo il metodo di Euclide, si fondano sul teorema dell'angolo esterno di un triangolo il quale a sua volta (pg. 61) è fondato sull'ipotesi della retta aperta. E siccome con ciò parrebbe che si volesse sottilizzare nella critica, così dirò che queste osservazioni feci ripensando alle notevoli modificazioni al metodo Euclideo introdotte dal Veronese nelle dimostrazioni dei teoremi sopra accennati e di alcuni altri, dimostrazioni che essendo indipendenti dall'ipotesi della retta aperta, gli permisero di offrirci quel bellissimo raffronto della geometria della stella con quella del piano di cui ho più a lungo parlato nella mia citata recensione, mentre l'avere i nostri A. seguito in quei teoremi il metodo Euclideo non permette loro di avvicinare con altrettanta intimità la geometria piana alla solida « modellando lo svolgimento di questa sopra lo svolgimento di quella », il che a pg. XI dimostrano di ritener opportuno che si faccia.

Noto ancora che, a differenza della maggior parte dei libri congeneri, trovansi in questo che esaminiamo alcuni cenni sulle figure a contorno curvilineo e su quelle limitate da superficie curve.

Quanto alla questione della fusione gli A. tengono completamente divise in tutte le loro parti la planimetria dalla stereometria, pur lasciando la possibilità di effettuare l'avvicinamento delle varie parti, a differenza del Veronese il quale tratta separatamente la geometria della retta, del piano, dello spazio per quanto riguarda le proprietà generali, trattando invece simultaneamente le teorie speciali quali quella dell'equivalenza, della similitudine, ecc. (1).

Concluderò col notare che il tentativo di dare un buon assetto alla geometria elementare da insegnarsi nelle nostre scuole secondarie

(1) A questo proposito dobbiamo rettificare l'asserzione degli A. (pg. X) che il prof. Veronese abbia accolto nei suoi *Elementi* il concetto, applicato per primo dal De Paolis e accettato poi dal Lazzeri e dal Bassani, della fusione della planimetria con la stereometria, giacchè anzi il Veronese si è dichiarato più volte contrario a tale concetto non solo per ragioni didattiche ma anche per ragioni scientifiche.

superiori, fatto con questo libro da persone così autorevoli come sono gli egregi A. di esso, e i cui risultati pur lasciano a desiderare, dimostra quante difficoltà presenti il conseguimento di siffatto assetto, e deve servir di monito a taluni che con straordinaria leggerezza e senza possedere una solida preparazione si permettono di compilare libri di geometria che non fanno onore nè a chi li ha composti, nè alla produzione scientifico-didattica del nostro paese, e ad altri che con altrettanta leggerezza giudicano sfavorevolmente e mettono quasi in ridicolo i risultati degli sforzi di tanti profondi pensatori unicamente perchè non ne comprendono la portata. Un tentativo può essere più o meno riuscito, ma ad ogni modo i lavori che siano frutto di faticose e sapienti indagini e di sincerità scientifica, vanno accolti sempre con plauso e con gratitudine verso gli autori.

Torino, aprile 1903.

FRANCESCO PALATINI.

A. SCHÜLKE. *Aufgaben-Sammlung aus der Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie und Stereometrie nebst Anwendung auf Astronomie, Feldmessung, Nautik, Physik, Technik, Volkswirthschaftslehre für die oberen Klassen höherer Schulen.* Mit 45 Figuren im Text. Leipzig und Berlin, 1902, 8.° p. X + 193 [Prezzo del Vol. leg. Mk. 2,20].

Una raccolta ben ordinata comprendente non meno di 6000 esercizì su tutti i rami della matematica elementare, la geometria analitica del piano inclusa, è degna certamente di attrarre l'attenzione di quei lettori del *Bollettino* che occupano una cattedra nell'insegnamento secondario: ad essi sia quindi per primi diretto l'annunzio della nuova pubblicazione del Prof. Schülke. Ma non ad essi soltanto; perchè la densa prefazione, in cui l'autore, per giustificare i criterì secondo cui venne fatta la scelta degli esercizì proposti, porge notizie sopra innovazioni didattiche proposte da lui e da' suoi colleghi d'oltre Alpi, desterà l'interesse di coloro che si dilettano di seguire le nuove correnti del pensiero, che di quando in quando modificano nelle sue fondamenta il piano dell'insegnamento matematico. Lo spazio di cui disponiamo non concedendo analisi particolareggiate e discussioni approfondite, basti citare fra le novità segnalate dal nostro autore gli sforzi che in Germania si vanno facendo per escludere dalle scuole i calcoli aritmetici *con più di 4 decimali* e il costume che si va diffondendo di cercare la materia per gli esercizì nelle scienze applicate — quali la geometria pratica, la navigazione, la scienza forestale, la statistica e simili —; è evidente che tale sistema merita approvazione incondizionata, come quello che è capace di destare l'amore per le matematiche pure anche in quegli scolari che rifuggono per indole dalle considerazioni esclusivamente astratte.

G. L.

G. VIVANTI — *Complementi di Matematica ad uso dei chimici e dei naturalisti* — Manuali Hoepli, Milano, 1899.

Le applicazioni sempre più numerose, che vanno facendosi dei metodi e dei resultati propri delle Matematiche superiori, in questioni di Chimica, Cristallografia, Economia politica, Statistica, Biologia, ecc. indussero già alcuni autori stranieri a pubblicare dei trattati, che servissero di guida a tutti coloro che desiderano acquistare, con relativa facilità, la conoscenza di quei metodi, e dei principali resultati a cui essi conducono.

In Italia non esisteva ancora una pubblicazione di tal genere: e quindi fu ottima l'idea del prof. Vivanti (della R. Università di Messina) di dare alla luce un testo che servisse appunto allo scopo suddetto.

Come l'A. dichiara nella prefazione, il presente trattato riproduce, con notevoli aggiunte, la materia di un Corso libero, che egli tenne nell'Università messinese nel 1898-99, per gli studenti di Chimica e Scienze naturali: a somiglianza di quanto già si faceva in qualche altro Ateneo. E poichè il nuovo Regolamento della Facoltà di Scienze ha introdotto, molto opportunamente, come materia obbligatoria per gli studenti di Chimica pura, un *Corso speciale di Matematiche*, e ne consiglia l'inscrizione a quelli di Scienze naturali, così il testo del prof. Vivanti potrà essere utile, in particolare modo, a coloro che fin da ora seguono il detto Corso.

La compilazione di un trattato, come quello di cui discorriamo, presenta senza dubbio non poche difficoltà. Giacchè esso risponderà veramente al suo scopo quando, fatta dapprima una opportuna scelta delle teorie matematiche di maggiore interesse, e di più frequente applicazione, si riesca a svolgerle in modo semplice e chiaro, senza mancare alle giuste esigenze del rigore scientifico: e ad illustrarle, volta per volta, con esempi tratti dall'una o l'altra delle varie scienze interessate (al fine di rendere più attraente lo studio di quelle teorie, e di dar subito un'idea — sia pure embrionale — del come si possano utilizzare, fuori del campo della Matematica, i concetti ed i resultati esposti). Ognuno comprende quindi, a prima vista, come tutto ciò si possa conseguire soltanto da chi accoppia una non comune abilità didattica ad una larga cultura scientifica.

Il libro del Vivanti venne compilato appunto in base ai criteri suddetti; e l'A. è riuscito, in molte parti, a renderne agevole ed interessante la lettura. Ma nello svolgimento di talune altre, mi sembra che non abbia sempre fatto uso di quella semplicità o di quegli artifizi didattici, necessari al conseguimento del fine speciale che qui si ha di mira. Come pure, mentre alcune teorie hanno avuto, a parer mio, il loro giusto sviluppo, altre invece vennero esposte o troppo largamente, o troppo in succinto. Per esempio, quella dei determinanti parmi abbia avuto un' estensione piuttosto eccessiva (ed era forse opportuno semplificarne anche la maniera solita di trattazione); mentre si omise quasi la teoria dei limiti. La Geometria analitica dello spazio credo sia pure sovrabbondante, ed il Calcolo integrale è invece un po' troppo ristretto. La Meccanica razionale si poteva alleggerirla maggiormente; mentre hanno avuto un ben proporzionato sviluppo — oltre il Calcolo differenziale — il Calcolo delle probabilità e la Termodinamica. La prima di queste ultime due parti essendo utile specialmente a chi voglia applicarsi poi agli studi di Statistica; e la seconda, a chi intenda seguire le ricerche proprie della Chimica fisica

I molteplici argomenti del testo furono esposti quasi sempre con forma chiara e precisa; rimanendo osservato, in generale, il rigore delle dimostrazioni. Però, nei programmi di Algebra e Geometria analitica, che vengono per primi, è da lamentarsi la mancanza di opportuni esempi illustrativi, o di un cenno immediato delle applicazioni che possono farsi dei resultati ottenuti. Credo quindi che la lettura di queste due parti non riuscirà molto attraente per coloro a cui il libro è destinato. Invece tutte le parti successive, cioè: il Calcolo infinitesimale, il Calcolo delle probabilità (colla teoria degli errori), la Meccanica razionale e la Termodinamica (seguita da alcune semplici questioni di Meccanica chimica) contengono frequenti applicazioni dei principî svolti, nel campo delle Scienze d'osservazione. Con ciò è reso interessante, anche pei non matematici, lo studio di quelle teorie; essendo indicato assai efficacemente come si possano impiegare, fuori del campo astratto, i numerosi concetti che vengono mano mano sviluppati.

In conclusione, il libro del prof. Vivanti costituisce un testo pregevole, per l'uso a cui è destinato; ed essendo in Italia la prima pubblicazione del genere, dobbiamo compiacerci della sua comparsa. È poi da augurarsi che esso giovi alla diffusione, e quindi alla applicazione, di quei potenti mezzi di Calcolo, che hanno ormai larga parte nel progresso di molte Scienze.

Genova, 29 Aprile 1903.

MINEO CHINI.

C. ALASIA. *Saggio terminologico-bibliografico sulla recente geometria del triangolo.* Bergamo, F. e P. Bolis, 1902, 8.° gr. p. IV+43.

La geometria del triangolo rappresenta il più considerevole ampliamento che i moderni seppero arrecare alla *parte dottrinale* (1) della geometria di Euclide. Coltivata con zelo e perseveranza da molti geometri, essa raggiunse ben presto uno sviluppo insperato; vantata forse eccessivamente da alcuni suoi cultori, essa trovò, in conseguenza gagliardi detrattori, i quali, spaventati dalla selva di figure che veniva ad addensarsi attorno al triangolo rettilineo, proclamarono la necessità di abbatterla, di sfrondarla od almeno di interromperne la coltivazione. E tale consiglio sembra sia stato ben accolto, giacchè in questi ultimi tempi apparvero più spesso scritti dedicati a riordinare il materiale già adunato che memorie contenenti risultati veramente originali. A siffatta categoria appartiene l'opuscolo che annunciamo. Nel quale sono raccolti in ordine alfabetico i nomi delle singole figure che vennero sino ad ora aggregate ad ogni triangolo, accompagnati dalle loro definizioni ed equazioni e da compendiose notizie bibliografiche (2). Chiunque conosca quanto estesa e complicata sia la nomenclatura della geometria del triangolo riconoscerà l'utilità dell'ingrato lavoro compiuto dal Prof. Alasia e tributerà gratitudine a chi se lo è addossato e lo ha lodevolmente recato a compimento.

G. L.

Niels Henrik Abel. Memorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance. Kristiania, J. Dybwad, 1902.

Questo splendido volume, di circa 400 pagine in 4.°, ornato delle riproduzioni in litografia dei due quadri ove sono nell'uno eternate le fattezze del celebre matematico e nell'altro l'aspetto del luogo ove egli nacque, nonchè di sei *fac-similes* di sue scritture, venne pubblicato per ordine del Consiglio accademico dell'Università di Cristiania, in occasione del primo centenario della nascita di Abel (cfr. questo *Bollettino*, T. V, 1902, p. 96). Il nocciolo di questa pubblicazione è formato da quanto si potè ancora trovare del carteggio di Abel (le lettere scritte in norvegese vennero pubblicate nell'originale ed in traduzione francese); molto ne era noto, ma il resto non è privo di interesse; vennero aggiunte alcune lettere, più recenti, relative ad

(1) Ci esprimiamo così perchè per quanto concerne le costruzioni va ricordata la *geometrografia* del Lemoine (cfr. *Bollettino*, T. V, 1901, p. 85-86).

(2) Riguardo a queste ci sia permesso sollevare qualche dubbio intorno alla esattezza dei richiami ad Archimede e Pappo fatti a pag. 5.

Abel, fra cui il lettore noterà quelle recanti la firma del Weierstrass (1). Tali lettere sono precedute da una lunga *Introduzione* scritta da E. Holst e costituente un prezioso complemento alla biografia del Bjerkness; poichè ivi è fatto cenno dell'essere stato Abel, durante il suo soggiorno a Parigi, collaboratore del *Bulletin* del Ferrussac, ci sia lecito esprimere il desiderio che degli articoli da lui scritti venga, se è possibile, redatto un elenco completo, chè è del massimo interesse che nulla passi inosservato di ciò che ha scritto un uomo qual è Abel. Le lettere stesse sono seguite da una collezione di documenti concernenti il grande scienziato, i quali, nella loro durezza e freddezza producono impressione immensa su chi rifletta come essi abbiano determinato od almeno corrispondano a momenti decisivi nella sua esistenza. Chiude il volume uno studio particolareggiato e profondo compiuto da L. Sylow sopra il genio e le scoperte di Abel; il dotto editore delle *Oeuvres complètes* sfruttando tutto il materiale, edito ed inedito, concernente quel genio, compulsando persino i registri dei prestiti della pubblica biblioteca di Cristiania, per sorprendere Abel mentre dissetavasi alle fonti scientifiche che la patria sua gli offriva, potè chiarire molti punti interessanti nello svolgimento delle sue idee e additarne altri che esigono nuovi studi e nuovi documenti.

Emerge da ciò che il volume discorso dovrà essere consultato da chiunque in avvenire vorrà occuparsi del brillante periodo di storia scientifica caratterizzata dalla fondazione della teoria delle funzioni ellittiche. G. L.

BERNHARD RIEMANN'*s Gesammelte mathematische Werke. Nachträge herausgegeben von* M. NÖTHER *und* W. WIRTINGER. Mit 9 Figuren im Text. 8.° gr. p. VIII + 116. Leipzig, Teubner, 1902 [Prezzo Mk. 6].

« Nei dieci anni ormai trascorsi dalla pubblicazione della II ed. delle Opere di Riemann, è stato scoperto nuovo materiale concernente il

(1) Ci sia lecito riprodurre qui un brano di una lettera scritta al Lie dal Weierstrass addì 10 Aprile 1882 e contenente un particolare interessante su questo. È ivi parola di una lettera di Abel a Legendre: « Questa lettera è indubbiamente di Abel, fu scritta pochi mesi prima della sua morte, e possiede un interesse particolare in quantochè contiene, in forma estremamente concisa, un riassunto di una gran parte dei suoi più importanti lavori. Per me poi questa lettera, che la conobbi da studente nel Giornale di Crelle, ebbe conseguenze della massima importanza. Dedurre la rappresentazione analitica data da Abel per la funzione, da lui chiamata $\lambda(x)$ dalla equazione differenziale che definisce tale funzione, fu il primo importante problema matematico che io mi sono proposto, e la cui soluzione decise me, che da principio coltivavo le scienze sociali, nel settimo semestre di studio universitario, a dedicarmi totalmente alla matematica. Inoltre, del problema di integrare una data equazione differenziale mediante trascendenti ellittici, in tutti i casi ove ciò è possibile io mi sono occupato eccitatovi da Abel ed ho stabiliti almeno i principî su cui riposa tale integrazione e spero di aggiungervi ancora qualcosa in seguito ».

campo più importante in cui si svolse la sua attività, cioè la teoria delle funzioni abeliane e quella delle equazioni differenziali del secondo ordine, materiale consegnato principalmente in trascrizioni di sue *Lezioni* e che fa vedere o prova come Riemann nelle sue lezioni sia giunto assai più in là che nelle sue pubblicazioni. Portare nel dominio del pubblico siffatto materiale, ecco lo scopo dei *Nachträge zu Riemann's Ges. Math. Werke* ».

Dimostrare l'opportunità e l'importanza di tale appendice è completamente inutile; essa è un prodotto naturale della tendenza moderna di ricercare con scrupolosa cura tutte le estrinsecazioni del pensiero dei genî creatori, per determinare, senza lacune e senza esuberanza, tutto ciò che ad essi è debitrice l'umanità. « È chiaro che stabilendo una serie di idee che Riemann svolse o per conto proprio o dinnanzi una piccola cerchia di ascoltatori, non risultano in alcun modo menomate le benemerenze, anzi vengono poste in più chiara luce, di coloro che più tardi indipendentemente da lui concepirono i medesimi problemi e, risolvendoli in modo originale, assicurarono loro il posto che meritano nella matematica moderna. Ma il fatto che tali questioni e tali metodi appartengono al ciclo d'idee riemanniano offre un interesse storico non dissimile da quello che possiede l'altra che Gauss era in possesso della teoria delle funzioni ellittiche assai prima di Abel e Jacobi ».

Il volumetto che annunciamo si divide in cinque parti. La I contiene sunti delle lezioni di Riemann sulla teoria degli integrali di differenziali algebrici, la II si riferisce al contegno in un punto di diramazione degli integrali di un'equazione differenziale del second'ordine, la III tratta delle serie ipergeometriche, la IV è formata da note sopra soggetti sparsi e la V di notizie sopra manoscritti di Riemann. Numerose note fanno conoscere la provenienza degli scritti pubblicati e le relazioni fra essi e lavori già noti di lui o di altri.

G. L.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung von Emanuel Czuber. I Hälfte. — Leipzig, Teubner, 1902, pag. 304. [Prezzo Mk. 12].

In Italia gli studî sulla teoria delle probabilità e sulle sue applicazioni non hanno generalmente avuto fortuna; e a noi è occorso di sentire qualche persona di merito parlare di queste dottrine come di cose che *hanno fatto il loro tempo.* Ciò è da attribuirsi, in parte forse, a quella giusta diffidenza che l'ingegno italiano, di natura sua equilibrato, ha verso talune applicazioni arbitrarie delle teorie in discorso; ma, in maggior parte, a una non giusta indifferenza che molti dei nostri cultori di scienze positive provano verso quegli studi che hanno indole filosofica e che imprendono, per dir così, a scrutare il ragionamento scientifico nelle sue basi fondamentali. Ma non avviene lo stesso fuori d'Italia, dove molte e non poco apprezzate furono le pubblicazioni che videro la luce negli ultimi decennï sia sulle *probabilità* in generale, sia su talune applicazioni di esse e principalmente sui metodi di *combinazione delle osservazioni.*

Le idee fondamentali che servono di base alla teoria delle probabilità e che trovano in essa il loro sviluppo e una limpida illustrazione, sono troppo connesse coi problemi della ricerca sperimentale; d'altra parte talune applicazioni, quale è quella or ora accennata, sono troppo necessarie, perchè non si debba considerare come opportuno un seguito di trattazioni matematiche colle quali quegli sviluppi e quelle applicazioni siano logicamente ottenuti; non foss'altro, per mettere in guardia gli studi, e gli osservatori specialmente, contro l'erronea applicazione di formole divenute di uso comune. E d'altra parte, se giova una prudente limitazione nell'ammettere principï e metodi che hanno una base in parte convenzionale, non è men vero che molti dei risultati della teoria delle probabilità hanno nei fatti sperimentali molte luminose conferme, che gli scettici assolutamente trascurano. Pertanto con vero piacere abbiamo letto attentamente il libro del quale qui riferiamo. L'Autore, ben noto per molti importanti lavori (1), ha qui esposto la teoria delle probabilità e delle sue applicazioni in quel modo che allo spirito critico dei nostri tempi deve apparire come il più ragionevole, vogliamo dire preoccupandosi, da principio non solo, ma in tutto il seguito dell'opera, di ben chiarire e discutere i principï sui quali i calcoli son basati. In pari tempo Egli non trascura quella parte che sta all'estremità opposta del procedimento didattico, vogliamo dire la opportuna esemplificazione numerica, con problemi tratti da cose di diversissima indole.

La definizione della *probabilità* nel senso puramente logico, quale essa nasce dal *giudizio ipotetico disgiuntivo,* la definizione del *fatto accidentale,* della probabilità *matematica,* la discussione intorno alla questione, tanto vitale, della *uguale possibilità* dei casi elementari, occupano parecchie pagine, gradite a leggersi a chi è versato nella materia, utilissime ai principianti. Non mancano le citazioni e i riferimenti a recenti lavori sulle basi logiche del concetto di probabilità.

Il richiamo delle formole di Analisi combinatoria e della formola di Stirling pel calcolo approssimato di $n!$ dànno occasione a trattare molti esempi importanti, i quali si risolvono in base alla sola defini-

(1) Citeremo in particolare la bella opera: « Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihre Anwendungen » Leipzig, 1899.

zione della probabilità matematica. Alcuni di questi presentano già a priori una discreta difficoltà. Molti altri notevoli esempì seguono alla dimostrazione dei teoremi sulla *probabilità composta* e sulla *probabilità totale.* Non mancano il classico problema *des partis*, e quello di Moivre (probabilità che la somma di r numeri, eguali o diversi, scelti a caso fra i primi n interi, assuma un dato valore). Nè mancano qui, e prima, le notizie storiche intorno alla origine dei problemi trattati. Un capitolo è di poi dedicato alla *probabilita geometrica* e al *valor medio,* argomento al quale l'A. dedicò già un suo libro ben conosciuto. A questo ente, il *valor medio,* si attaccano più innanzi i teoremi di Cebysceff, in seguito ai quali il concetto stesso del valor medio, dapprima puramente analitico, vien ad avere un significato, diremo così *di fatto*, in quanto appare come risultato limite in un numero illimitato di esperimenti.

Segue lo studio della probabilità dei risultati di un gran numero di *prove ripetute,* nel caso, dapprima, che l'avvenimento atteso, in ogni prova, abbia probabilità *costante* (teorema di G. Bernoulli), e della deviazione media del risultato effettivo di tali prove dal risultato a priori più probabili. Le osservazioni fatte sovra un gran numero di estrazioni del lotto servono come esempì e come prove sperimentali. Il caso della *probabilità variabile* si scinde in due: quello in cui dell'avvenimento atteso si conosca la probabilità p in ogni prova (teorema di Poisson, e di Bernoulli generalizzato), e quello in cui della p non si conoscano i singoli valori, ma soltanto il valor medio μ fra quelli che la p può assumere nelle varie prove (*legge dei grandi numeri*). Con acuto esame l'A. stabilisce il raffronto fra questi due casi e mostra come la legge dei grandi numeri non dica in realtà nulla di più che il teorema di Bernoulli, dove alla pròbabilità data e costante si sostituisce un ente ipotetico, ma pur costante: il valor medio μ sopra definito.

Un altro Capitolo è dedicato allo studio della probabilità relativa delle varie ipotesi che si possono pensare a spiegazione di un fatto già avvenuto (teorema di Bayes, inversione del teorema di Bernoulli, ecc.). Un tal genere di ricerca è reso, in pratica, difficile, spesso illusorio, dal fatto che, per trar partito delle formole, occorre, o conoscere la probabilità a *priori* delle varie cause, ovvero, per difetto di ragione sufficiente, assumere le cause come a priori egualmente probabili. Tale è il caso dell'*urna* che contenga palle bianche e nere senza che si sappia alcunchè intorno al modo tenuto nel riempire l'urna. Si estraggono s palle, delle quali m riescono bianche: la ipotesi più probabile, dopo ciò, è che il rapporto r del numero delle bianche al numero totale delle palle nell'urna sia $m : s$. Per giungere a questo risultato bisogna ammettere che, a *priori,* ogni ipotesi sulla composizione dell'urna sia ugualmente giustificata. In migliori condizioni si trova la ricerca in quest'altro caso. La composizione dell'urna è stata regolata nel seguente modo: si è lanciata c volta una moneta; ogni volta che si è avuto *testa* si è posta una palla bianca nell'urna; per ogni *croce* una nera, sicchè per ogni palla contenuta nell'urna la probabilità di esser bianca è $\frac{1}{2}$. Dopo ciò si son fatte s estrazioni ottenendo m bianche; si domanda anche qui il valor più probabile del rapporto r. Qui la prob.[à] a priori dei varii possibili valori di r è nota; ha quindi luogo una esatta applicazione del teorema di Bayes, in base al quale si dimostra che l'ipotesi più probabile, a posteriori, sul valore di r è, non più $\frac{m}{s}$, ma $\frac{c+2m}{2(c+s)}$, il che può esprimersi così: il modo tenuto nel riempire l'urna e il risultato dell'estrazione ci danno due diverse informazioni sul valore di r $\left(\frac{1}{2} \text{ e } \frac{m}{s}\right)$; il valor più probabile è una *media* fra questi due, ai quali si attribuiscano i *pesi* rispettivi c ed s. Risultato interessante e che corrisponde ad una logica aspettazione.

Interessa pure la discussione che l'A. fa (seguendo in ciò Poisson e Bertrand) intorno al risultato della nota esperienza di Buffon, vogliamo dire dell'essersi ottenuto 2048 volte *croce* col gettare 4040 volte una moneta. Qual è la probabilità che vi sia nella moneta un grado di eterogeneità il quale tenda a dare sistematicamente piuttosto *croce* che *testa?* Il risultato della discussione analitica è che l'eccesso osservato (28) non ha nulla di così impossibile a priori, da render necessario l'attribuirlo ad una intima proprietà della moneta, la quale dia a priori una probabilità superiore a $\frac{1}{2}$ al presentarsi della *croce*. Questo problema dà un'idea del modo da tenersi nel cercare, in base all'esperienza, la probabilità che esistano *cause sistematiche di deviazione* da una *legge* ammessa a priori; ricerche da eseguirsi, naturalmente, con somma cautela, e i cui risultati debbono accettarsi con molta riserva.

Dopo aver trattato, come seguito alla teoria precedente, della probabilità degli avvenimenti futuri in base all'esperienza, l'A. passa ad occuparsi dei vantaggi e degli svantaggi che son allegati ad avvenimenti fortuiti, e così della *speranza matematica* e del *rischio*, delle *assicurazioni* di vario grado contro i rischi, del rapporto fra le poste nei giuochi d'azzardo. In questa sezione cade in acconcio la dimostrazione dei bei teoremi di Cebysceff sulla probabilità che la somma dei valori accidentali di n quantità variabili, presenti deviazioni, entro dati limiti, rispetto alla somma dei singoli valori medii di quelle quantità. Da questi teoremi segue una nuova semplice dimostrazione del teorema di Bernoulli intorno al risultato limite di un numero grandissimo di prove ripetute.

Segue un capitolo sull' argomento della *aspettazione* o della *speranza morale* (secondo Daniele Bernoulli). La definizione di questa riposa sul postulato che il vantaggio (positivo o negativo) che un individuo ha da un aumento infinitesimo $d\,R$ della propria ricchezza R, sia proporzionale al rapporto $d\,R : R$. Questo principio, molto arbitrario e soggetto a non piccole obbiezioni, fu proposto dal Bernoulli per dar ragione di un risultato che a lui pareva assurdo, e che in realtà non è; vogliamo dire della soluzione del *problema di Pietroburgo*, problema e risultato troppo noti perchè se n' abbia qui a discorrere. Non è senza interesse, in ogni modo, la giustificazione matematica, che, in base al principio della speranza morale, può darsi di talune massime che il buon senso e la pratica hanno consacrato, e così: il danno del giuoco d'azzardo, il vantaggio delle assicurazioni contro i rischi, il vantaggio del dividere i guadagni aleatorî sopra più imprese indipendenti (1). L'A. osserva come il principio di Bernoulli abbia avuto influenza sul moderno indirizzo matematico della scienza delle finanze, e delle ricerche fisio-psicologiche di Fechner (e Weber). Ma quanto al valore di queste applicazioni, crediamo sia per ora immaturo il pronunciarsi.

La seconda parte, che occupa circa un terzo del volume che ci sta innanzi, è dedicata alla teoria della compensazione degli errori: e così: nozioni fondamentali sulla legge di frequenza degli errori accidentali, combinazione di osservazioni dirette o indirette, compensazione di osservazioni condizionate, calcolo, a posteriori, del grado di precisione; tutto ciò è esposto in modo logico, limpido e sobrio. Vedendo con piacere citato e seguito da vicino un nostro modesto lavoro (2), nelle questioni fondamentali intorno al *vero valore* di una quantità fisica, al *rischio matematico d' errore*, alla combinazione delle osservazioni in base al principio del *minimo rischio d' errore*, ci rallegriamo che quello che a noi parve il modo più semplice e logico d' esporre la non facile teoria, appaia tale anche a persona di noi più competente. La dimostrazione che l'A. dà della *legge di frequenza* della forma $y = Ce^{-h^2(x-a)^2}$ è quella di Crofton (Philos. Trans. Vol. 159) modificata e migliorata. Per quanto, a nostro avviso, sia sempre preferibile la dimostrazione di Bessel (3), generalizzata opportunamente, tuttavia, per la sua maggiore semplicità, anche questa è assai pregevole. Solo ci permettiamo osservare una cosa: la equazione stabilita in fondo alla pag. 213 è una semplice conseguenza del fatto che il prodotto $f(x)\,dx$, il quale esprime il numero degli errori attuali

(1) Osserveremo che in entrambe le formole nelle linee 5 e 11 della pag. 201 va aggiunto il termine — *$\log a$;* il che non altera del resto il ragionamento successivo, nè il risultato.

(2) Atti della R. Università di Genova, 1892.

(3) Untersuch. über die Warsch. der Beobachtungsfehler (Astr. Nachr. 1838).

compresi nell'intervallo $(x + dx)$, deve essere *indipendente dall'unità* di misura addottata; e, così espressa, la cosa non dà luogo ad alcuna obbiezione; mentre il postulato dell'A., che, quando gli errori *elementari* (della cui somma si compone l'errore attuale) mutino nel rapporto $1:r$, il numero degli errori nell'intervallo $(rx, rx + rdx)$ sia uguale a quello che era prima nell'intervallo $(x, x + dx)$, non ci sembra egualmente evidente a priori. Ma si tratta piuttosto di modo d'espressione che di sostanza.

Sarebbero state desiderabili le formole che dànno l'errore medio di una funzione di quantità dedotte da un sistema di equazioni normali, ovvero di quantità compensate. E avremmo pur visto con piacere qualche cenno intorno alla questione, così importante, degli errori sistematici, la quale ha stretto legame colle questioni trattate dall'A. nella 3.ª sezione della parte prima.

Nella 3.ª parte (della quale solo le prime tre pagine figurano nel volume pubblicato) e nella quarta, l'A. tratterà delle applicazioni alla *statistica* e alle *assicurazioni sulla vita,* e noi attendiamo con desiderio questo importante complemento di un libro, la cui lettura raccomandiamo vivamente agli studiosi di filosofia naturale.

Pisa, 24 dicembre 1902.

P. PIZZETTI.

HERMANN GRASSMANN 's *Gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der math.-phys. Klasse der kgl. Sächs. Gesell. der Wiss., und unter Mitwirkung der Herren:* J. LÜROTH, E. STUDY, J. GRASSMANN, H. GRASSMANN DER JÜNGERE, G. SCHEFFERS *herausgegeben von* F. ENGEL. II Bd., II Th. *Die Abhandlungen zur Mechanik und zur mathematischen Physik.* Mit 51 Figuren im Text. Leipzig, Teubner, 1902, 8.° gr. p. VIII+266 [Prezzo Mk. 14].

Per cagioni indipendenti dalla volontà del Prof. Engel il II vol. delle *Opere complete* del Grassmann segue il primo ad un lungo intervallo di tempo e la seconda parte di esso (la quale contiene gli scritti di meccanica o di fisica matematica) vien fuori avanti la prima (destinata ad accogliere le memorie di geometria ed analisi).

La pubblicazione dei lavori di Meccanica analitica inseriti nella prima sezione del volume in discorso venne curata dal Prof. Lüroth. Due fra essi erano usciti per le stampe durante la vita dell'autore; sono i *Grundriss der Mechanik* (1867) e la nota memoria *Die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre* (1877). Una seconda parte di questa, finora inedita, appare ora per la prima volta, assieme ad altri undici brevi lavori, trovati fra le carte dell'estinto o composti con materiali sparsi da lui lasciati; essi porgono nuove applicazioni dei metodi del Grassmann, ma non sembrano capaci di accrescerne la rinomanza.

Alla fisica matematica appartengono i sette lavori pubblicati dall'Engel nella seconda sezione dello stesso volume; alcuni, essendo stati inseriti in diffuse raccolte, raggiunsero già considerevole notorietà, mentre altri riusciranno nuovi alla maggioranza degli studiosi; eccone i titoli: *Ableitung der Krystallgestalten aus den allgemeinen Gesetzen der Kristallbildung* (1839); *Neue Theorie der Elektrodynamik* (1845); *Zur Theorie der Farbenmischung* (1853); *Uebersicht der Akustik und der niederen Optik* (1854); *Zur Elektrodynamik* (1877); *Bemerkung zur Theorie der Farbenempfindungen* (1877); *Ueber die physikalische Natur der Sprachlaute*. Aggiunte, dilucidazioni e commenti a questi scritti si trovano nelle accuratissime note, redatte dall'Engel colla scorta di manoscritti del Gussmann, le quali servono sia a determinare le date di nascita delle idee di questo, sia a stabilirne le relazioni con lavori di altri. Esse poi fanno fare la conoscenza con Justus Günther Grassmann, padre di Hermann, ed autore di un importante scritto di cristalligrafia ove è per la prima volta (1829) insegnato quel metodo per designare con simboli le facce dei cristalli, che il Miller ha fatto poi generalmente adottare. Il padre dell'autore dell'*Ausdehnungslehre* appare quindi come il capostipite di una dinastia di pensatori, che comprende oggi tre generazioni e auguriamo possa, per benemerenze scientifiche, gareggiare con quelle dei Cassini, dei Bernoulli e degli Struve.

G. L.

E. A. Fouët. *Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques*. Première Partie (Chapitres I à V). Paris, Gauthier-Villars, 1902, 330 p. 8.°.

Se è sempre difficile dare un giudizio sopra un'opera di cui è pubblicata solo una parte, lo è assai più nel caso attuale, in cui ci troviamo dinanzi un primo volume dove manca qualunque schiarimento sul piano generale dell'opera e perfino sulla estensione materiale che essa dovrà avere. L'unica parola che potrebbe darci una vaga idea delle intenzioni dell'autore è l'aggettivo: *elementari* che figura nel titolo; senonchè a smentire tale epiteto troviamo esposte in questo volume ricerche di ordine abbastanza elevato, come quelle di Painlevé, Borel, Fabry, ecc. Di più l'abitudine, poco lodevole a nostro avviso, di distribuire la materia in modo arbitrario fra il testo e le note a pie' di pagina, alternando continuamente l'uno alle altre, concorre ad accrescere la confusione nella mente di chi legge; non sappiamo quali cognizioni esiga l'autore nei suoi lettori, quali cose intenda semplicemente richiamare, quali invece insegnare *ex novo*. In questa completa ignoranza di *ciò che debba essere* il libro nel pensiero dell'autore, non ci resta che a considerarlo in *ciò che è*, indicandone brevemente il contenuto.

Il volume si apre con una lunga *Introduzione* divisa in 2 sezioni.

La Sez. I — *Le funzioni in generale* — espone il concetto generale di funzione, dà un rapido riassunto della teoria degli aggregati, ed accenna ai diversi tipi di funzioni.

La Sez. II — *Le funzioni analitiche* — studia la continuità delle funzioni di una e di più variabili reali e delle funzioni d'una variabile complessa, poi le funzioni monogene, e infine le funzioni uniformi e le loro singolarità.

Alla Introduzione segue, non sappiamo se completo o no, il *Libro Primo;* esso s'intitola: *Metodi generali di definizione e di rappresentazione delle funzioni,* e contiene 5 Capitoli.

Nel Cap. I — *Funzioni algebriche* — dopo alcuni esempi di rappresentazioni conformi generate da funzioni algebriche, razionali o no, si stabiliscono i principali teoremi della teoria delle funzioni algebriche, e si espongono alcune nozioni sulle superficie di Riemann.

Il Cap. II — *Funzioni definite da serie* — comprende la teoria delle serie a termini costanti o variabili e in particolare delle serie di potenze, quella dei prodotti infiniti, quella delle serie trigonometriche, le ricerche moderne sulle serie divergenti, e lo studio delle funzioni trascendenti elementari, compreso l'integrale euleriano di 2.ª specie e la serie ipergeometrica.

Il Cap. III tratta delle *Funzioni definite da serie multiple*, con applicazione alle funzioni ellittiche di Jacobi e di Weierstrass.

Il Cap. IV — *Funzioni definite da integrali* — parte dalla nozione di integrale ordinario, per passare agli integrali multipli e curvilinei, ed ai teoremi di Cauchy relativi a questi ultimi.

Infine il Cap. V espone la teoria della *Continuazione analitica secondo Weierstrass,* accenna alle funzioni lacunari, alle ricerche di Painlevé e d'altri sulla continuazione d'una funzione al di là d'una linea singolare, allo sviluppo delle funzioni in serie di polinomi, ed alla estensione del concetto di continuazione analitica tentata da Fabry.

Quale sia il principio informatore di questo volume, non ci riesce di ben comprenderlo; nè ci sforziamo a questo lavoro di divinazione, lasciando all'autore la cura di illuminarci come e quando lo crederà opportuno. Non possiamo pertanto apprezzare i motivi che hanno consigliato a trattare alcune parti (come la rappresentazione conforme) con grande larghezza ed altre (come la teoria degli aggregati) con estrema concisione, ad esporre alcune teorie per esteso e a dare di altre i soli risultati. Ci limitiamo dunque a registrare alcune inesattezze incontrate nella lettura del presente volume.

Nella Nota 1.ª a pag. 14 sembra — benchè non sia chiaro — che l'autore voglia attribuire alle potenze carattere di grandezza, ciò che sinora non è provato. — Nella Nota 2.ª a pag. 16 si legge che può esistere una corrispondenza (biunivoca) continua fra due spazi di un numero diverso di dimensioni, mentre fu dimostrato che ciò è impossibile. Così pure non è giusto il dire (Nota 2.ª a pag. 18) che i simboli composti con ω e con numeri finiti rappresentano i numeri trasfiniti di Cantor; essi non costituiscono che una classe particolare di numeri trasfiniti. — L'enunciato della Nota 2.ª a pag. 38 è inesatto; basta confrontarlo col teorema a pag. 260.

Dovremmo ancora osservare qualche difetto d'ordine (p. es. a pagina 165 si parla della continuazione analitica senza aver detto prima in che cosa consiste); ma ciò rientrerebbe in una critica generale dell'opera, dalla quale, per i motivi già esposti, crediamo dovere per ora astenerci.

G. Vivanti.

NOTIZIE

Congresso internazionale di scienze storiche. — Nel Congresso internazionale di Scienze storiche tenutosi a Roma nei giorni 2-9 del decorso Aprile una sezione speciale fu consacrata alla *Storia delle scienze matematiche, fisiche, naturali e mediche.* Era la seconda volta che un congresso internazionale storico contenesse un siffatto riparto: il numero considerevole d'intervenuti (italiani e stranieri), le importanti comunicazioni fatte, le serene discussioni che vi ebbero luogo ed i ponderati voti emessi danno sicuro affidamento che tale sistema verrà conservato nei congressi futuri.

Limitandoci a quanto si riferisce alle matematiche rileveremo che M. Cantor, A. von Braunmühl e G. Eneström, impossibilitati di assistere personalmente al Congresso, inviarono loro scritti destinati a venire inseriti negli *Atti*. Presentarono invece lavori originali il Darvai (sopra Giovanni Bolyai), il Vacca (sulla storia della numerazione binaria), il Tonni-Bazza (sopra N. Tartaglia e B. Castelli), F. Müller, E. Lampe, A. Mori (sul carteggio inedito dello Ximenes), il Lebon, (sul piano di una bibliografia analitica dei lavori contemporanei sulla storia dell'astronomia) (1), il Günther (sul *Jakobstab*), il Pittarelli

(1) Cfr. *Bulletin de la Société astronomique de France*, Mai 1903, p. 235-238.

(sopra un trattato di prospettiva di Pier della Francesca), P. Tannery (sopra la storia dei termini analisi e sintesi), il Vailati sopra una dimostrazione di Archimede), ecc.

Oltre ad un voto emesso, dietro proposta del Prof. Somigliana, per la pubblicazione delle opere di A. Volta, in seguito ad una particolareggiata relazione del Prof. Loria, venne deliberato ad unanimità quanto segue:

La Sezione VIII del Congresso internazionale di Scienze storiche radunato in Roma nell' Aprile 1903 fa voti che il Governo di S. M. il Re d' Italia affidi alla R. Accademia dei Lincei il compito; 1.° di esaminare le opere manoscritte di Evangelista Torricelli nell' intento di determinare quali fra esse siano meritevoli di stampa; 2.° di presiedere alla pubblicazione completa di tutte le di lui opere già edite e di quelle inedite giudicatene degne, senza escludere il suo carteggio scientifico, completando così il suo lavoro iniziato con l' edizione nazionale delle opere di Galileo.

Nè venne trascurato il lato didattico che offrono le questioni relative alla storia delle scienze. Lo provano i seguenti ordini del giorno, che pure raccolsero l' unanimità dei suffragi.

La Sezione VIII del Congresso di scienze storiche considerando essere di eccezionale importanza che alla storia delle scienze venga accordato nell' insegnamento il posto che le spetta di diritto e tenendo conto della deliberazione presa dalla V Sezione del « Congrès d'histoire comparée » tenutosi a Parigi nel Giugno 1900, emette il voto che tale insegnamento venga istituito con la creazione di corsi universitari divisi in quattro serie: 1.ª Scienze matematiche ed astronomiche; 2.ª Scienze fisiche e chimiche; 3.ª Scienze naturali; 4.ª Medicina. La Sezione stessa fa inoltre voti che dei rudimenti di storia delle scienze vengano introdotti nei programmi dei singoli insegnamenti delle Scuole medie.

In particolare riguardo all' Italia venne formulato il voto che *1.° gli insegnamenti della storia delle scienze vengano annoverati fra i corsi complementari; 2.° che l' abilitazione alla libera docenza possa essere concessa anche per la storia delle scienze* (1).

Inoltre la Sezione VIII del Congresso, per assicurare la continuazione in avvenire della propria opera, nominò un Comitato internazionale avente un nucleo costituito dai signori Benedikt (Vienna), Blanchard (Parigi), Giacosa (Torino), Günther (Monaco), Loria (Genova), Sudhoff (Berlino) e Tannery (Parigi). Compito precipuo di tale Comitato è di proporre, raccogliere e coordinare le questioni concernenti

(1) Questi voti furono conseguenza di una Relazione che scrissero i Prof.ri Barduzzi, Giacosa e Loria, e che venne integralmente pubblicata nel fascicolo di Maggio 1903 della Rivista *L' università italiana.*

la storia delle scienze da trattarsi nel venturo Congresso internazionale di scienze storiche, che sarà tenuto a Berlino alla fine di Settembre del 1906; venne così almeno in parte soddisfatto il desiderio di coloro che ritengono opportuna un' associazione mondiale di tutti i cultori della storia delle scienze.

Finalmente dietro proposta del Prof. Giacosa venne votato il seguente ordine del giorno:

La Sezione VIII del Congresso internazionale di scienze storiche fa voti, che si inizii al più presto il lavoro per la pubblicazione di un Catalogo completo per materie dei manoscritti scientifici conservati nelle Biblioteche e negli Archivi, catalogo che è desiderabile sia seguito dalla pubblicazione di quei testi che saranno riconosciuti di maggiore importanza.

Gli *Atti* del Congresso sono attualmente in corso di stampa.

***

DUE TEMI DI CONCORSO. — L' Accademia ungherese delle scienze ha proposti due premi di 2000 corone ciascuno, il primo per un trattato di geometria assoluta di circa 25 fogli (scadenza 31 Dicembre 1904), il secondo per un lavoro sopra qualche classe d' invarianti differenziali (scadenza 31 Dicembre 1903).

***

CONCORSO AL PREMIO TENORE. — L' Accademia Ponteniana propone al concorso pel premio di L. 510 il tema seguente: *Importante contributo alla teoria intrinseca generale delle curve piane.* Il concorso è aperto a tutti gl' italiani, esclusi i soci residenti dell' Accademia Ponteniana; i lavori dei concorrenti dovranno essere inviati anonimi, con le norme consuete, al Prof. L. Pinto, Segretario generale dell' Accademia, non più tardi del 31 Marzo 1904.

***

TEMA DI MATEMATICA PROPOSTO DALLA R. ACCADEMIA DI SCIENZE E LETTERE DELLA DANIMARCA. — La determinazione del volume di un poliedro (e specialmente di una piramide) senza far uso del principio di esaustione, è un problema già antico sul quale l' Hilbert attirò nuovamente l' attenzione dei matematici in una ben nota lettura fatta al Congresso dei Matematici (Parigi 1900). Rispondendo a tale appello il Dehn ed il Vahlen trovarono (*Math. Annalen* T. LV, p. 465, e T. LVI, p. 507) una condizione per tale determinazione dalla quale risulta essere in generale impossibile decomporre due poliedri equivalenti in uno stesso numero finito di parti a due a due congruenti. Però, nelle indagini testè citate non si è giunti che a determinare una condizione per siffatta decomposizione, e, mediante esempi, è facile dimostrare che essa non è sufficiente. .

Per conseguenza l'Accademia propone la seguente questione:

Indicare le condizioni necessarie e sufficienti per la decomposizione di due poliedri in un numero finito di parti a due a due congruenti, ovvero recare un contributo alla soluzione di tale problema generale assegnando almeno quelle condizioni pel caso in cui uno dei due solidi è un poliedro convesso e l'altro è un cubo. Si dovranno anche indicare espressamente quali siano le piramidi soddisfacenti alle condizioni trovate.

Premio: medaglia d'oro (320 corone); scadenza: 31 Ottobre 1904. Le memorie dei concorrenti devono venire inviate anonime al Prof. H. P. Zeuthen ed essere scritte in una delle lingue: danese, svedese, inglese, tedesco, francese, latino.

***

MATEMATICI NAPOLETANI. — Sotto il titolo *Dai fratelli Di Martino a Vito Caravelli*, il Prof. F. Amodeo ha pubblicata una memoria, estratta dal T. VII, 2.ª Serie, degli Atti dell'Accademia Pontaniana, facente seguito alle altre intitolate *Stato nelle matematiche a Napoli dal 1650 al 1732* (Atti Vol. VI e VII) e *Le riforme universitarie di Carlo III e Ferdinando IV di Borbone*. Quella come queste attestano lo zelo e la diligenza spiegate dall'autore per rievocare la memoria dei matematici che videro la luce nella terra in cui egli ebbe i natali; quella come queste verranno consultate anche in avvenire da coloro che vorranno sapere in qual modo ed in quale misura venissero coltivate ed insegnate le scienze esatte nel Regno di Napoli sotto il dominio dei Borboni. Forza è però constatare come gli sforzi dall'A. fatti per porre in luce le benemerenze scientifiche dei matematici napoletani di quel tempo non sortirono risultati di entità considerevoli, ma la colpa non è certo sua.

Una questione interessante che egli non trattò è di sapere come mai siffatta scarsità di opere originali abbia avuto luogo a Napoli in un'epoca in cui nel resto d'Italia fiorivano i Riccati ed i Fagnano, i Manfredi ed un Guido Grandi; i confini del bel Reame erano dessi così gelosamente guardati che i concetti ed i metodi in allora escogitati, non potevano penetrarvi ed esercitarvi influenza benefica? E come mai le scoperte e le opere didattiche di Eulero e dei Bernoulli, ammirate ed imitate in tutta Europa (non esclusa l'Italia settentrionale) poterono restare ignote o infeconde nel Mezzogiorno della penisola? Tali problemi s'impongono a qualunque storico, il quale comprenda come sia impossibile fare una pittura espressiva dello stato scientifico di un paese in un dato periodo, senza tener conto di quello che nello stesso tempo operavano e scrivevano gli altri scienzati dello stesso paese. Di essi l'autore nostro non giudicò opportuno occuparsi, preferendo raccogliere i titoli anche delle opere minori dei matematici che fiorirono, o soltanto nacquero, ma non vissero, nel Regno di Napoli. Sopra uno però egli è di un laconismo che, trattandosi forse del più eminente è deplorevole: alludiamo a Giulio Mozzi, autore di quel *Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi* (Napoli 1763), ove è stabilita una proposizione fondamentale di cinematica, che venne nel dominio del pubblico soltanto quando, nel 1830, M. Chasles la riscoperse. Se l'A. vorrà ritornare sopra questo punto del suo lavoro e fornirci dati sicuri su quell'egregio scienziato, colmerà una deplorevole e deplorata lacuna esistente nella storia della matematica italiana (1).

*
* *

NICOLA CHUQUET. — La pubblicazione fatta nel 1880 di A. Marre del *Triparty en la science des nombres* (v. *Bullettino* del Boncompagni, T. XIII) mise in luce i meriti, sino allora misconosciuti, del Chuquet; ora un erudito belga, il P. Ch. Lambo, ha dedicato a questo ed alle sue opere un diligentissimo lavoro (*Une algèbre française de 1484. Nicolas Chuquet* nella *Revue des questions scientifiques* dell'Ottobre 1902), il quale varrà certo a diffondere la conoscenza dell'uno e delle altre. Esso però, come le ricerche anteriori di M. Cantor, non ha il potere, nè la pretesa, di risolvere tutte le questioni collegate alle origini dell'Algebra francese, questioni fra cui primeggia quella di sapere in qual misura questa debba considerarsi per una derivazione dell'Algebra italiana. E tali questioni, di così vitale interesse, rimarranno insolute fino a che i manoscritti di Guglielmo de Lunis, di Filippo Frescobaldi e d'altri, conservati (o per meglio dire sepolti) nelle Biblioteche di Firenze e di altre sedi importanti, verranno lasciati indisturbati a continuare nel loro sonno secolare. Quando dunque, gli eruditi italiani si decideranno a occuparsi delle loro glorie più care, a rispondere alle domande che da ogni parte del mondo vengono loro rivolte?

(1) Aggiungiamo che l'incompleta considerazione delle opere straniere contemporanee a quelle studiate dall'A. gli vietò di avvertire qualche fatto, che pure avrebbe meritato di essere riferito. Ad esempio, nel §. 5 della prima memoria dell'Amodeo è citato un problema proposto da Ruggiero di Ventimiglia; ma non andava notato che di esso diede una completa soluzione il marchese de l'Hôpital, il quale la diffuse in tutto il mondo col suo celebre *Traité analytique des sections coniques*?

Bestonzo Pietro, Gerente.

Genova - Tipografia R. Istituto Sordomuti - 1903.

ANNO VI. OTTOBRE, NOVEMBRE E DICEMBRE 1903.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. 6, per l'estero Fr. 7. 50. Numeri separati L. 2 caduno. — Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

Con l'improvvisa e deplorata morte di **Luigi Cremona**, avvenuta in Roma addì 10 Giugno, i geometri italiani perdono Colui che unanimi salutavano loro capo e che gli stranieri da un trentennio consideravano come il più eminente rappresentante di un indirizzo di studio caratteristico per l'Italia. Delle Sue numerose opere matematiche — su cui la storia ha già pronunziato il suo inappellabile giudizio, collocandole fra i classici delle scienze esatte — il nostro *Bollettino* terrà parola al più presto possibile. Ma nel momento in cui ci abbandona il Discepolo prediletto di Francesco Brioschi, l'Amico fedele di Eugenio Beltrami, il cordoglio che produce la Sua scomparsa altro non ci consente che spargere lacrime e fiori sulla Sua tomba troppo presto dischiusa.

Luglio 1903.

LEONARDO FIBONACCI,

LE SUE OPERE E LA SUA FAMIGLIA

DI

MARIO LAZZARINI

1. Gli antenati di Leonardo.

La famiglia Pisana dei *Bonacci* o *Fibonacci*, da cui poi le altre dei *Bonagi dell'Abbaco* e *dell'Abbaco*, o *dell'Ambacu*, esisteva in Pisa fino dal Secolo XI, e traeva forse origine da un tale *Bonito*, morto, come risulta da una carta di vendita dell' 11 gennaio 1109, nei primi del 1100, e padre di *Giovanni* e di *Bonaccio* (1). Quest'ultimo fu padre di *Alberto*, e, con assai verosimiglianza, anche di *Guglielmo* (padre di Leonardo), e di quel *Mattheus de Bonaccis*, che fu uno dei mille cittadini pisani, che conclusero la pace coi Genovesi per ordine del papa Clemente III, mediatore ed arbitro di essa, il 13 febbraio 1188 (2).

2. Leonardo.

Di Leonardo ci rimangono due sole memorie sincrone, l'una del 1241 pubblicata da F. Bonaini, l'altra del 28 agosto 1226 pubblicata da G. Milanesi: l'una e l'altra di queste memorie però, della massima importanza per la vita del grande Pisano, se sono conosciute dagli studiosi di araldica e di storia pisana, sono, per quante ricerche abbia fatte, completamente sconosciute agli storici della matematica, che di Leonardo si sono occupati.

Principierò dalla seconda, come quella che ci dà notizia del padre e del fratello di Leonardo. Essa è un istrumento di compra, in data del 28 agosto 1226, dal quale risulta che *Guglielmo*, padre di Leonardo, ebbe un altro figlio di nome *Bonaccingo*, e che Leonardo *Bigollo* comprò, come procuratore di questo suo fratello, da Bartolomeo di Alberto di Bonaccio la dodicesima parte di un pezzo di terra, con

(1) Questa carta di vendita è stata pubblicata dai Padri Mittarelli e Costadoni nell'Appendice N.° CXLVI dei loro *Annales Camaldulenses* (Tomo III, Venezia 1755-1760). — Essa termina con le seguenti parole: « Signum de manibus Raineri filio quondam Bernardi, Johannes filio quondam Boniti, Bonaccio quondam Boniti testes ».

(2) V. *Raccolta di scelti diplomi Pisani*, fatta dal Cav. F. Dal Borgo, Pisa MDCCLXV.

torre ed ogni suo edificio e pertinenza, posto in Pisa, fuori della città, nella cappella di S. Pietro in Vincoli.

Questo documento, importante anche perchè in esso si trova già unita al nome di Leonardo la parola *Bigollo,* ci mostra chiaramente che tutti coloro, i quali scrissero di Leonardo, andarono errati in ciò che affermarono intorno al padre di lui.

Leonardo dunque nacque in Pisa, nel Quartiere di mezzo, da Guglielmo di Bonaccio, uomo dedito al commercio e ricoprente la carica di *publicus Scriba* nelle dogane dello Stato Pisano. Si ignora quali esattamente fossero le attribuzioni di tale ufficio; così, mentre il Tiraboschi e il Guglielmini lo dicono corrispondente a cancelliere e il Targioni a notarius, il P. Grimaldi invece dice che « il publicus scriba era quel personaggio che, nei porti di maggiore commercio, promuoveva i nazionali vantaggi, rappresentava il supremo potere, e presiedeva al maneggio di tutti gli affari »: in ogni modo, in quei tempi, tale ufficio era certo dei più ragguardevoli.

Non si sa con precisione l'anno della nascita di Leonardo, ma dalle date delle sue opere e dalle vaghe indicazioni che in esse egli ci dà della sua vita, risulta manifesto che egli nacque verso il 1170, e che per conseguenza, al tempo della conclusione della pace fra Pisa e Genova, era poco più che giovinetto. Verso questo tempo appunto suo padre fu mandato, nella sua qualità di publicus scriba, nella dogana pisana di Bugia, città di Barberia, situata, come ci dice il Grimaldi, alle coste dell'Africa, fra il Bastione di Francia e Algeri. Per le relazioni continue che il publicus scriba aveva coi commercianti che lì affluivano da ogni parte dell'Africa, Guglielmo di Bonaccio venne a cognizione del modo di contare degli Arabi, e considerando l'utilità e il vantaggio di tal metodo in confronto degli altri allora usati in Europa, chiamò a sè Leonardo fanciullo (in pueritia) (1) e volle che attendesse allo studio dell'Abbaco. A Bugia Leonardo non si trattenne lungo tempo (per aliquot dies), ma abbastanza perchè, introdotto, come egli ci dice, nel mirabile magistero dell'arte per mezzo delle cifre arabe (per novem figuras indorum), se ne innamorasse, e ne facesse lo scopo dei suoi studi e delle sue ricerche. A ciò aiutavanlo le condizioni sue e dei suoi tempi, giacchè dovendosi, per ragioni di commercio (negotiationis causa), recarsi in paesi lontani e diversi, poteva più facilmente venire a conoscenza di quanto allora si sapeva di matematica. Recatosi così in Egitto, Siria, Grecia, Sicilia e Provenza, vale a dire in tutti quei luoghi che erano allora il centro degli studi e della cultura, pur non trascurando i commerci, scopo

(1) Queste indicazioni sulla prima parte della vita di Leonardo ci sono fornite da Leonardo stesso, nel prologo del suo *Liber Abbaci.*

precipuo dei suoi viaggi, dopo lunghi studi, fatti con gran diligenza e fatica, potè dire di conoscere tutto quanto di matematica si sapeva in quelle diverse scuole. Tutto questo però non bastava a lui, che aveva già intraveduto gli immensi vantaggi che si potevano recare alle matematiche coll' introduzione del metodo degli Arabi, così eccellente, come egli ci afferma, da riputare tutto il resto un errore; per cui, approfonditosi sempre più nello studio di detto metodo (amplectens strictius ipsum modum indorum et attentius studens in eo), ed aggiuntevi ricerche proprie e di Euclide, potè finalmente riassumere, nel 1202 (1), i suoi lavori in quell'opera meravigliosa, considerando specialmente i tempi in cui è stata composta, che è il *Liber Abbaci*. Niente si sa di questa prima edizione dell'Abbaco: è certo però che essa dovette sommamente interessare i matematici del tempo, se, molti anni più tardi, e precisamente verso il 1225, Michele Scott gliene richiese copia. Per soddisfare al desiderio dell'amico, Leonardo riprese il suo lavoro, e, valendosi delle nuove ricerche che aveva già pubblicate nella *Practica geometriae* (1220), nel *Flos* e nel *Liber Quadratorum* (1225), potè aggiungervi nuovi teoremi e problemi, togliendovene altri da lui forse ritenuti ormai superflui, in modo da compiere il *Liber Abbaci* come è a noi pervenuto. Quando ciò sia avvenuto è incerto; ma, osservando che nell'Abbaco si cita più volte la *Practica Geometriae*, e questa porta, come abbiamo detto, la data del 1220, è evidente che questo rifacimento deve essere posteriore a detto anno, e compreso fra il 1220 e il '50: il Libri e il Cantor, appoggiandosi specialmente all'intestazione di un codice riportata dal Libri (2), inclinano a credere che questa seconda edizione fosse compiuta nel 1228.

Ora, chi era questo Michele Scott, al quale Leonardo dedicò il suo lavoro? Diverse sono le persone di questo nome: secondo il Toppi e il Mazza, uno fu astrologo salernitano; un secondo è fiorentino, come si rileva da un passo del Lami (3); di un terzo si dice da Giovanni Baleo (de Script. Anglis) e dal Pitseo (de rebus Anglis) che era inglese: un quarto finalmente, e questi è, colla maggior probabilità, quegli cui Leonardo dedicò il suo Abbaco, fu veramente scozzese. Questi nacque verso il 1190 in Balwearie in Scozia, e fu astrologo alla corte dell'imperatore Federico II. Egli soggiornò per studi in Parigi e

(1) Si noti che tutte le date riportate qui ed in seguito, relative alle opere di Leonardo, sono, come dimostro più avanti, computate secondo il calendario Pisano, vale a dire posticipate di un anno, due mesi e 25 giorni rispetto al computo comune.

(2) Libri II, 24 Nota 2: « Incipit liber Abaci a Leonardo filio Bonacci compositus anno 1202 et correctus ab eodem anno 1228 ».

(3) « .... in quorum fine versus quidam Magistri Michaelis Scoti de Florentia leguntur ».

nella Spagna, e verso il 1217 era in Toledo, dove si occupava di Astronomia. Verso questo tempo appunto fu coll'imperatore, e con lui venne in Italia. Tradusse in latino alcuni degli scritti di Aristotile e pubblicò l'*Almagesto.* Alla morte dell'imperatore, nel 1250, si recò poi in Inghilterra alla corte di Edoardo I, dove restò fino alla morte (1).

Il *Liber Abbaci*, nella sua seconda edizione, è diviso in quindici capitoli.

Senza entrare qui in una minuta analisi dell'*Abbaco,* ne darò un piccolo cenno, specialmente riguardo all'ultimo capitolo, che è, senza dubbio, il più importante di tutta l'opera.

Premessa dunque un'esposizione dell'Aritmetica Indiana od Araba, e la risoluzione di un gran numero di questioni commerciali, Leonardo espone, nell'ultimo capitolo, il suo trattato di Algebra. È questo diviso in tre parti: la prima è relativa alle proporzioni, la seconda alla geometria, la terza all'algebra propriamente detta. In quest'ultima Leonardo dà, sul principio, denominazioni e definizioni prese dagli Arabi: il quadrato dell'incognita vi è chiamato *census*, traduzione dell'arabo *Mal;* così, la prima potenza dell'incognita è chiamata *cosa,* versione pure di un vocabolo arabo, da cui i Tedeschi derivarono *die Coss,* nome col quale in origine designarono l'Algebra.

Leonardo considera quindi sei questioni, di cui tre semplici e tre composte, e successivamente le risolve, ed è così condotto all'equazione di 2.° grado. Egli comincia sempre col dare esempi numerici e quindi enuncia le regole generali, senza dimostrazione. In tutti i casi che esamina, egli, seguendo l'esempio degli Arabi, suppone tutti i termini positivi in ambo i membri, giacchè, a quel tempo, non si eguagliava ancora a zero il primo membro dell'equazione. La dimostrazione viene in ultimo: è una costruzione geometrica, con la quale si aggiunge ai due membri dell'equazione il quadrato della metà della prima potenza dell'incognita.

Altro merito di Leonardo è quello di avere, per il primo, adoperato nella notazione algebrica le lettere dell'alfabeto nel modo moderno.

Nell'Algebra degli Arabi non si considera d'ordinario che una sola fra le radici dell'equazione di 2.° grado, sebbene Mohammed-ben-Musa indichi l'esistenza delle due radici, nel caso che siano ambedue positive. Leonardo imitò Mohammed, spingendosi però meno innanzi di lui: dice infatti che, se non si risolve una certa equazione di 2.° grado aggiungendo il radicale alla quantità razionale, essa si risolverà togliendo il radicale stesso.

La seconda delle opere maggiori di Leonardo, e dico seconda

---

(1) V. Cantor: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* Zweiter Band, Kap. XII, XIII.

tanto rapporto al tempo quanto all'importanza, è la *Practica geometriae*, composta, come egli ci dice (1), nell'anno 1220 ad istanza dell'amico *Maestro Domenico* ed a lui dedicata.

Di questo M.° Domenico si sa che fu un astrologo amico e contemporaneo di Guido Bonatti, conosciuto comunemente sotto il nome di *Dominicus Hispanus*. A preghiera di lui dunque, Leonardo compì e pubblicò quest'opera, già cominciata molto tempo innanzi, perchè, come dice egli stesso nel prologo, « coloro che vogliono trovare le dimensioni dei corpi secondo dimostrazioni geometriche, e coloro che le vogliono trovare secondo l'uso volgare (quasi laicali more), abbiano in essa un ammaestramento perfetto ».

Detta opera è divisa, oltre l'introduzione, in otto parti, nelle quali Leonardo si occupa specialmente della misura dei corpi, inserendovi pure ricerche algebriche. Fra i teoremi in essa contenuti merita menzione quello di trovare l'area di un triangolo, dati i tre lati, i diversi metodi pratici usati dagli agrimensori per trovare la superficie di qualunque poligono e la lunghezza di un arco, la semplificazione del metodo di Archimede pel calcolo di π, e le misure delle altezze e delle profondità per mezzo del quadrante. Alcuni manoscritti della *Practica geometriae* contengono poi dei saggi di analisi indeterminata, e tanto quest'opera come l'*Abacus* racchiudono gran numero di problemi curiosi e rapporti di misure e monete dei diversi popoli coi quali commerciavano in quei tempi i Pisani; vi si vedono, fra altro, indicate poi chiaramente le lettere di cambio.

(*continua*).

RECENSIONI ED ANNUNZI

F. Klein - *Anwendung der Differential - und Integralrechnung auf Geometrie; eine Revision der Principien.* Vorlesung, gehalten während des Sommersemesters 1901. Ausgearbeitet von C. Müller. Leipzig, Teubner, 1902. 468 p. litogr.; copertina, prefazione ed indice a stampa (8 p.) 8°.

Questo corso di lezioni non ha, crediamo, alcun riscontro nella letteratura matematica antica o moderna. Con esso l'autore, come dice egli medesimo, ha voluto fare un nuovo passo nell'opera da lui intrapresa di attenuare i danni della odierna eccessiva specializzazione

(1) Incipit practica geometriae composita a Leonardo Pisano de filiis Bonacci, anno M°.CC°.XX°.

cercando di abbattere le barriere che dividono la matematica teorica da quella applicata. Purtroppo anche in Italia tali barriere sono più alte e più insormontabili che mai; ed è perciò che noi applaudiremmo all' editore coraggioso che pensasse a pubblicare per la stampa, tradotte in italiano, le interessantissime lezioni di Klein. Tornando alle quali, diremo che esse tendono essenzialmente a porre in luce le differenze e i rapporti reciproci esistenti tra la *matematica di precisione* e la *matematica d'approssimazione*. Più particolarmente, Klein si occupa di stabilire un confronto tra gli enti matematici, e specialmente geometrici, quali risultano dalle definizioni della teoria, e gli enti che si ottengono mediante *idealizzazione* degli oggetti del mondo reale. Ciò che segue farà meglio comprendere questo concetto.

*
* *

Ogni operazione materiale di natura matematica — disegno, misura, calcolo numerico, ecc. — ammette un grado determinato, più o meno elevato secondo i casi, di precisione. Al contrario l' aritmetica teorica definisce il numero (p. es. in forma di frazione decimale) con un grado d' approssimazione indefinito, e chiama eguali due numeri quando la loro differenza può dimostrarsi minore di qualunque grandezza assegnata; e parimenti la geometria definisce le sue figure con assoluta esattezza. Così, mentre un cerchio tracciato effettivamente è un anello di spessore più o meno grande, i cui punti si trovano, press'a poco, alla stessa distanza da una piccola macchietta o da un piccolo foro che chiamiamo centro, il cerchio della geometria è una linea, cioè un ente ad una sola dimensione, i cui punti hanno, rigorosamente, egual distanza da un certo punto, cioè da un ente privo come essi di alcuna estensione. V' ha luogo perciò a distinguere la matematica di precisione e quella d' approssimazione; la prima opera su enti rigorosamente definiti, cioè perfettamente individuati mediante un certo numero di proprietà ad essi caratteristiche, la seconda su enti conosciuti solo con una certa approssimazione. Così, quando dimostriamo un teorema di aritmetica o di geometria, noi facciamo della matematica di precisione; quando eseguiamo un calcolo numerico, noi facciamo della matematica di approssimazione, o, più esattamente, se p. es. operiamo su un numero x conosciuto sino alla r-esima cifra decimale, noi applichiamo i metodi della matematica di precisione al numero $\frac{E(10^r \cdot x)}{10^r}$, dove $E(t)$ rappresenta il massimo intero contenuto in t. Sicchè, in sostanza la matematica di approssimazione non è una scienza approssimata, ma una scienza che opera esattamente su grandezze conosciute soltanto con una data approssimazione. Parimenti abbiamo la geometria di precisione, dove — come osservavamo poc' anzi — il punto è inesteso, la linea ha una dimensione sola, due rette si tagliano al più in un solo punto; ed abbiamo quella d' approssimazione, dove un punto è un corpo di dimensioni trascurabili, le linee sono strisce di larghezza trascurabile, due rette in un piano determinano un punto tanto meno inesattamente quanto maggiore è la loro reciproca inclinazione, e così via. Qual è pertanto il vero significato dell'applicazione, che tacitamente da tutti si ritiene lecita, dei risultati della geometria esatta ai problemi della geometria pratica? Definire un ente in modo approssimativo vuol dire assegnare un determinato campo entro il quale esso è certamente compreso; eseguire una operazione matematica su di esso significa determinare esattamente i limiti entro i quali starà corrispondentemente il risultato dell'operazione stessa. Gli enti su cui opera la matematica astratta sono dunque, in qualche modo, i limiti di quelli che ci sono forniti dall' osservazione; hanno origine da un processo di idealizzazione operato su di questi. È perciò che le definizioni e i postulati della matematica, per quanto, in senso stretto, non abbiano alcun rapporto colla realtà, sono però suggeriti da questa. Così il postulato di Dedekind, il quale stabilisce che ad ogni punto d' una retta (fissata l' origine e l' unità di misura) corrisponde uno ed un solo numero reale, ci è suggerito dal fatto che noi, con quell' approssimazione che ci è concessa dai nostri mezzi, possiamo misurare qualunque dato segmento. Naturalmente la matematica astratta si serve dell' intuizione soltanto come di un aiuto e di un mezzo euristico, procedendo del resto per via rigorosamente logica; sicchè le sue definizioni e i suoi risultati trascendono sovente il nostro potere d'osservazione. Così noi non possiamo figurarci come un insieme di punti denso in tutto un intervallo non comprenda tutti i punti di esso. Così la distinzione fra commensurabile e incommensurabile non ha alcun significato nel campo pratico; sicchè, quando, per esempio, gli astronomi dicono che due grandezze sono commensurabili, deve intendersi soltanto che il loro rapporto è esprimibile, nei limiti d'approssimazione ordinarì, mediante una frazione a termini abbastanza piccoli. Così la questione, se un dato problema sia risolubile colla riga e col compasso, non ha ragione di esistere nella geometria operativa, giacchè colla riga e col compasso può risolversi *approssimativamente* qualunque problema.

Conviene ora esaminare che cosa significhi la parola *funzione* nella matematica astratta e in quella empirica. Funzione in senso astratto è un insieme di valori y assegnati come corrispondenti rispettivamente ai valori x di un certo intervallo. In pratica invece una funzione è rappresentata da una linea, o da una serie più o meno discontinua di punti, riferite ad una coppia d' assi coordinati; ed è a considerarsi che, anche quando ci sembra di aver dinanzi una linea continua, non abbiamo che una serie discontinua di punti, come potremmo accertarcene col microscopio. Di più i valori di y non sono dati che con una certa approssimazione, ossia fra certi limiti, onde può dirsi che non è già data una *linea,* ma piuttosto una *striscia.* Le proprietà che noi attribuiamo alle curve empiriche sono: di essere continue; di racchiudere colle ordinate estreme e coll'asse delle ascisse un'area determinata; di avere in ogni intervallo finito un numero finito di massimi e di minimi; di avere direzione e curvatura determinate in ogni punto. Ora la matematica astratta attribuisce appunto queste qualità, dopo averle definite in modo rigoroso, alle sue curve ideali; con ciò restano escluse tutte le curve che sono prive di tutte o di parte di queste proprietà (quale p. es. quella che rappresenta la funzione di Weierstrass), e vien delimitato un campo speciale di funzioni, quello delle funzioni *ragionevoli* (*vernünftige Functionen*).

Ed ora si domanda: Data una curva empirica, come si può trovare una curva astratta che le si approssimi il più possibile? Per ottenere una funzione astratta, continua e due volte derivabile, che rappresenti una curva empirica data L, segniamo, coll'approssimazione concessaci dai mezzi di cui disponiamo, la linea L_1, le cui ordinate rappresentano i valori di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nei varì punti della curva data, poi una seconda linea L_2 avente con L_1 lo stesso rapporto che ha L_1 con L. Inscriviamo in L_2 una spezzata, integriamo due volte la funzione che la rappresenta; otterremo la funzione cercata.

Talvolta interessa avere la rappresentazione d'una curva empirica sotto una forma analitica determinata. Le forme di uso più frequente sono i polinomi e gli sviluppi trigonometrici. Per semplificare il problema, l'autore imagina di avere, non già una curva empirica, ma una curva astratta che imagina sin da principio sostituita a quella e scelta in modo da rappresentarla il meglio possibile.

Per la rappresentazione mediante polinomi si ha anzitutto la formola di Lagrange; l'autore calcola l'errore di questa formola, quello del suo integrale e quello della sua derivata. Passa poi agli sviluppi trigonometrici finiti ed infiniti, insistendo sull'importanza della valutazione del resto, ed accennando agli apparecchi denominati *analizzatori armonici.*

Le cose dette si estendono, con pochi mutamenti, alle funzioni di due variabili; per queste si ottengono sviluppi in serie di funzioni sferiche. Fra le molte interessanti osservazioni che si trovano intorno alle funzioni di due variabili, ricordiamo la seguente. Ognuno sa che non sempre è lecita l'inversione dell'ordine delle derivazioni, e che furono costruiti esempi di funzioni per le quali tale inversione non può farsi. Orbene, è degno di nota che fra le superficie considerate nell' architettura ve n' ha una tale, che la superficie astratta a cui essa conduce per idealizzazione rappresenta appunto una funzione di due variabili della natura accennata. Tale è la superficie d' una volta a crociera; riferita a 3 assi ortogonali x, y, z, di cui i due primi orizzontali e non simmetricamente disposti rispetto alla volta, essa è l' imagine d' una funzione z di due variabili x, y, le cui derivate miste di 2.° ordine pei valori di x, y corrispondenti al vertice della volta non sono tra loro eguali.

Dobbiamo ora far cenno di un' importante digressione filosofica.

Da molti si è ripetuto e si ripete che in natura esistono soltanto funzioni analitiche. Questa asserzione trova la sua origine essenzialmente nella presunzione della regolarità e della continuità dei processi naturali. Ma in realtà l' osservazione non può decidere se le funzioni che rappresentano i fenomeni naturali sieno o no analitiche; giacchè essa non determina tali funzioni con esattezza, ma solo con una certa approssimazione. Una curva effettiva, come già si disse, non è una linea, ma bensì una striscia; ogni linea tracciata entro tale striscia può egualmente rappresentarci il fenomeno, e sta nell'arbitrio di chi vuole studiarlo matematicamente di scegliere la linea in modo che abbia o non abbia determinate proprietà (continuità, esistenza della tangente, ecc.). La questione, se i processi naturali sieno analitici, esce dal campo dell' osservazione, ed appartiene alla metafisica, in seno alla quale si trova strettamente legata ad una questione fondamentale. Consideriamo p. es. il moto d' un punto materiale, definito mediante l' espressione delle coordinate del punto come funzioni del tempo. Se tali funzioni sono analitiche, la conoscenza d' un elemento della traiettoria basta a determinare l' intera traiettoria; e così si è condotti al più completo *determinismo*. Volendo evitare questa conclusione, che molti non sono disposti ad accettare, si può supporre che il moto sia definito da equazioni differenziali a coefficienti analitici. Allora, benchè le condizioni iniziali determinino, sino ad un certo punto, la curva integrale, tuttavia, se questa ha un punto comune con un' altra curva integrale — come avviene p. es. tra ogni integrale particolare e l' integrale singolare —, le leggi meccaniche non sono sufficienti a stabilire quale delle due curve seguirà il mobile da quel punto in avanti. Ma tutta questa discussione evidentemente è fondata sull' arbitrario, giacchè con egual ragione si potrebbero supporre le x, y, z funzioni discontinue, non derivabili, ecc. del tempo, purchè atte a rappresentare con sufficiente approssimazione il fenomeno reale.

*
* *

Fin qui il nostro autore ha fatto dipendere i concetti geometrici dall' idea di funzione, riferendosi naturalmente ad un determinato sistema di coordinate.

Nella seconda parte egli tratta della *geometria libera* (*freie Geometrie*), cioè di quelle questioni geometriche che sono indipendenti da qualunque sistema di riferimento. Merita di essere ricordata innanzi tutto in questo rapporto la teoria degli aggregati, teoria assai più geometrica che aritmetica, giacchè gli aggregati di punti si presentano spontaneamente in varie ed importanti questioni geometriche. Basti citare la teoria dell' inversione, che ha una parte principalissima nello studio delle questioni automorfe, e che si applica pure nella elettrostatica; il problema della definizione del continuo geometrico; quello della determinazione del concetto di curva. A proposito di quest' ultimo concetto è interessante osservare che, definendo semplicemente i punti d'una curva piana in funzione d'un parametro, si possono ottenere risultati che ci portano assai lontano dall' idea comune di curva. P. es., se i raggi dei due cerchi generatori di una epicicloide sono incommensurabili, la curva, continuata indefinitamente, finisce per contenere un insieme di punti denso in tutto in certo spazio anulare. Così la curva di Peano contiene tutti i punti d' un quadrato. Pertanto, per ottenere una curva teorica che possa considerarsi come l' idealizzazione di una ordinaria curva reale, conviene assoggettare il concetto di curva a qualche limitazione; si giunge così alla definizione di Jordan di *curva regolare*, e per ogni curva empirica si può assegnare una curva astratta regolare che coincida con essa in tutte le proprietà fondamentali in quei limiti d' approssimazioni che sono possibili. I tipi più semplici di curve regolari sono le curve *analitiche;* fra queste sono da distinguersi le *algebriche;* fra queste ultime le *razionali*. Però anche certe questioni di pura geometria conducono a curve regolari non analitiche; e l' autore mostra con lunghi sviluppi come curve di questa natura si presentino nella teoria dell' inversione.

« Le questioni della teoria degli aggregati », conclude l' autore, » si presentano sempre, quando si studino abbastanza a fondo problemi » di matematica astratta ».

Ciò prova che, nella matematica astratta, conviene spingere innanzi quanto è possibile l' idealizzazione — e l' autore cita come esempio i numeri trasfiniti di Veronese —, ma prova anche che, in mezzo alla grande libertà concessa al matematico, egli, nelle sue idealizzazioni, deve lasciarsi guidare dal senso d'opportunità. Chi è libero, dice Klein, è nello stesso tempo responsabile.

Di fronte alla geometria astratta stanno, nel campo della matematica di approssimazione, da una parte la geodesia, dall'altra il disegno geometrico.

Nella geodesia si hanno basi ed inclinazioni misurate con una certa approssimazione, e da esse si deducono, col sussidio della geometria pura, altre grandezze, di cui si può determinare l'errore massimo. Quanto al grado d'approssimazione delle misure ottenute ed alla scelta tra risultati discordanti, dobbiamo ricorrere al calcolo delle probabilità ed al metodo dei minimi quadrati. — Nell'alta geodesia si considera la terra come un ellissoide. Ciò è abbastanza esatto per una grande estensione di superficie terrestre; ma lo è tanto meno quanto più piccola è l'estensione considerata. Così, se si volesse ottenere il piano tangente in un punto della superficie della terra come luogo delle congiungenti quel punto coi punti contigui della superficie, non si arriverebbe a nessun risultato; tutte quelle congiungenti sarebbero ben lungi dal giacere in un piano, e le loro posizioni non tenderebbero, in generale, ad alcun limite all'avvicinarsi dei punti contigui al punto che si considera. Per avere un piano che possa riguardarsi, con una certa approssimazione, come il piano tangente, bisogna prendere il luogo delle congiungenti del punto coi punti che distano da esso di un tratto non troppo piccolo, p. es. di 10 chilometri. Così pure, invece di cercare di tracciare sulla superficie terrestre una *linea geodetica,* si deve costruire un *poligono geodetico,* cioè una spezzata rettilinea, di lati, p. es., di 10 chilometri, iscritta nella superficie terrestre, e tale che il piano di due lati successivi contenga la normale alla superficie nel vertice comune. È questo ciò che fanno effettivamente i geodeti. — Generalizzando alquanto queste ultime considerazioni, può dirsi che l'anello di congiunzione tra l'analisi infinitesimale e le sue applicazioni al mondo reale deve essere il calcolo delle differenze finite ragionevolmente sviluppato.

Nel disegno geometrico, che si distingue in *geometria descrittiva* e *calcolo grafico,* manca sinora una teoria degli errori, se pure non si voglia considerare come un avviamento ad essa la *geometrografia* di Lemoine. Per dare un'idea del modo in cui dovrebbero trattarsi teoricamente le questioni di geometria empirica, prendiamo il teorema di Pascal. La dimostrazione che si dà di esso nella geometria astratta non giustifica punto il fatto che, se noi disegniamo con una certa esattezza una conica ed iscriviamo in essa un esagono, i punti di concorso dei lati opposti cadono sensibilmente in linea retta. Questo fatto costituisce un teorema della geometria empirica, che deve essere dimostrato; e non è difficile far vedere che, se le coordinate dei 6 punti soddisfanno, con una certa approssimazione, all'equazione d'una conica, l'area del triangolo avente per vertici i tre punti di concorso accennati differisce di poco da zero. Vediamo qui un nuovo esempio del fatto che la matematica di approssimazione opera con metodi esatti su elementi approssimati. — Le cose dette fin qui spiegano come, e con quali precauzioni, si possa trar partito dalla considerazione intuitiva delle curve empiriche per stabilire proprietà delle curve ideali; e l'autore applica diffusamente questo processo allo studio delle singolarità delle curve algebriche ed alla dimostrazione delle formole di Plücker.

Per le curve nello spazio e le superficie si può far uso, nello stesso senso, di modelli, come l'autore spiega su varî esempi.

*
* *

Non crederemmo di poter meglio finire questa rivista che riportando le belle parole con cui Klein chiude il suo corso, tanto più che le idee in quelle vivacemente espresse sono le medesime a cui ci siamo sempre ispirati nell'insegnamento dell'Analisi infinitesimale: « Io ho esposto in questo corso ciò che di solito non si trova nei » trattati, ma che si presuppone tacitamente negli sviluppi ordinari. » Con ciò io ho voluto mettervi in grado di considerare le cose stesse » con occhio proprio e con giudizio indipendente. Riflettete p. es. a » ciò che io dissi sulle curve e superficie empiriche, e sull'arbitraria » limitazione ad enti analitici. — Nella matematica avviene come » nelle arti belle. È non solo utile ma assolutamente necessario ap- » prendere dai propri predecessori. Però, limitandoci *esclusivamente* » allo studio di ciò che fu fatto, fondandoci soltanto su ciò che leg- » giamo nei libri, ci riduciamo a ciò che io chiamo *sistema scola-* » *stico*. Torniamo dunque all'osservazione propria sul vivo, torniamo » alla natura, che rimane sempre la prima maestra! ».

G. VIVANTI.

E. WÖLFFING. *Mathematischer Bücherschatz. Systematisches Verzeichniss der wichtigasten deutschen und ausländischen Lehrbücher und Monographien des 19. Jahruhnderts auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. In zwei Teilen.* I *Teil: Reine Mathematik.* 8.° pag, XXXVI + 416 [Prezzo del vol. leg. Mk. 15].

L'enorme produzione scientifica moderna, mentre da un lato rende sempre più pungente il bisogno di conoscere esattamente la somma di cognizioni che adunarono i nostri predecessori, rende dall'altro estremamente difficile il raggiungere tale intento, od anche solo avvicinarlo. Perciò qualunque nuovo ajuto ci sia per ciò fornito dev'essere salutato con gratitudine o gioia, specialmente quando provenga da persona nota per vasta e profonda cultura. In tali condizioni è appunto l'opera la cui *I Parte* oggi segnaliamo ai lettori nostri, i quali conoscono l'autore, oltrechè per altri scritti scientifici e bibliografici, per essere egli stato una volta collaboratore del *Bollettino* (1). Tale opera - lo dice il titolo -

(1) V. T. III, 1899, p. 97.

consta di un indice metodico dei lavori di matematica pura ed applicita che vennero pubblicati separatamente nel corso del Sec. XIX; la parte che ci sta sott' occhio abbraccia gli scritti di matematica pura; quella ventura conterrà i titoli delle opere sopra la teoria delle probabilità, il calcolo numerico, grafico e geometrico, la geometria descrittiva, la cristallografia, la mecannica, la fisica matematica, la geodesia, l' astronomia, la geofisica, la chimica, la biologia e la tecnica.

Come introduzione e per mostrare l' utilità della propria opera, l' A. fa una rassegna di tutte le pubblicazioni congeneri alla sua o che gli furono di maggiore ajuto nel suo lavoro, additando per ciascuna, sinceramente e serenamente, le qualità ed i difetti, non senza citare quelle a lui note, ma inaccessibili. I titoli registrati raggiungono il cospicuo numero di circa 13000, e sono ordinati per materie sotto 313 rubriche; opportuni richiami fanno conoscere quelle opere che con eguale diritto potrebbero entrare in due o più rubriche differenti. Chiudono l' opera un indice analitico ed un indice dei nomi (quest' ultimo comprendente quasi otto mila voci). Nulla dunque manca per rendere facile e comoda la consultazione di tale opera.

Un lavoro del genere di quello del Wolffing aspetta il suo giudizio dal tempo. Esso, per quanto redatto con cura, non può essere esente da errori e lacune; l' A. nè è perfettamente conscio e chiede a tutti di segnalargli le correzioni ed aggiunte che reputano necessarie, di cui egli terrà conto nel pubblicare la seconda parte. Senza arrestarci ad appunti minuti, due sole osservazioni faremo. Anzitutto molti degli scritti registrati dal Wölffing sono estratti da raccolte accademiche o da giornali, onde, per uniformità di metodo dovevano essere taciuti. In secondo luogo, perchè tener nota delle vane fatiche degli innumerevoli trisecatori dell' angolo o quadratori del circolo o dimostratori del postulato di Euclide? In tesi generale esse rappresentano per la scienza un' ingombrante zavorra, che sarebbe opportuno di eliminare; non potendola distruggere, la si lasci almeno cadere in dimenticanza!

G. L.

K. Hensel und G. Landsberg. *Theorie der algebraischen Functionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale* — Leipzig - Teubner - 1902, p. 707 + XVI. [Prezzo del vol. leg. Mk. 28].

Il confronto fra i corpi di numeri algebrici e quelli di funzioni algebriche d' una variabile condusse Kronecker per una parte, Dedekind e Weber per altra a trasportare a questi i metodi e i concetti che già s' erano mostrati fecondi nello studio di quelli. E particolarmente i due ultimi autori mostrarono in una memoria celebre come ne uscisse nuova luce per tutta la teoria delle funzioni algebriche d'una variabile.

Nel volume di cui ci occupiamo gli A. allargano per quanto possibile il campo d'applicazione dei concetti contenuti in quella memoria; e dànno loro nuovo fondamento, abbandonando il metodo razionale che di quella memoria pare costituire la ragione determinante, e poggiando la teoria sugli sviluppi delle funzioni del corpo in serie di potenze della variabile. E a vero dire la condotta « puramente formale e colle sole regole del calcolo letterale » (1) era necessariamente in questa teoria solo apparente, dacchè elemento essenziale n'è la *risoluzione* di equazioni algebriche.

A conservare la forma puramente aritmetica anche all'introduzione degli sviluppi in serie, gli autori si valgono della nozione di congruenza di due funzioni, mod. una potenza della variabile. — Sia $f(u, z)$ un polinomio in u e z e sia n il suo ordine rispetto alla u. Mediante una generalizzazione del procedimento di Newton e della decomposizione in fattori lineari d'un polinomio in una variabile, si mostra che la congruenza $f(u, z) \equiv 0$ (*mod.* $(z - a)^M$) ha n radici; le quali, crescendo M indefinitamente, dànno le n serie radici formali della $f(u, z) = 0$. Tosto però gli A. si occupano anche della convergenza di queste serie, con che si connettono alla teoria delle funzioni analitiche, alla loro continuazione, e son condotti alla costruzione della superficie di Riemann R_z su cui si distende la $u = u(z)$ definita da $f(u, z) = 0$ e le altre funzioni del corpo $K(u\ z)$, considerate come funzioni di z.

Si faccia ora corrispondere ad ogni punto P della R_z un simbolo $\mathfrak{P}$ (*divisore primo*) e si dica divisibile per $\mathfrak{P}^\rho$ una funzione che nel punto P abbia l'ordine ρ (positivo, negativo o nullo): ogni funzione del corpo si potrà allora, a meno di un fattor costante, rappresentare come prodotto dei suoi divisori primi di esponente $\neq 0$ (divisori corrispondenti ai zeri e ai poli della funzione), al qual prodotto conviene generalmente dar forma di frazione portando a denominatore i fattori d'esponente negativo. Questa rappresentazione simbolica (che ritrova la sua radice nella memoria di D. e W.) forma il nocciolo della teoria a partire da questo punto. Ma essa non sarebbe nulla più che una notazione abbreviata se il confronto di R_z colla superficie di Riemann corrispondente ad un'altra qualunque funzione del corpo, assunta come variabile indipendente, non assegnasse al concetto di divisore primo carattere invariantivo rispetto ad ogni cambiamento di variabile nel corpo. Perchè: si faccia corrispondere lo stesso divisore primo a punti di superficie di Riemann diverse in cui ciascuna funzione

(1) Dedekind u. Weber. Crelle's Journal 92 p. 235.

del corpo assuma lo stesso valore; poichè ogni funzione assume un valore ben determinato in ogni punto d'una superficie di Riemann del corpo, e viceversa fissati comunque due punti di questa esistono funzioni che in essi hanno valori differenti, non potrà mai appartenere indifferentemente a due diversi punti d'una superficie di Riemann uno stesso divisore primo, onde ne risulta pel divisore una definizione per astrazione, indipendente dalla scelta della variabile. Il divisore primo viene così a coincidere col *punto* di D. e W., a rispecchiare il *ramo* della geometria. Un prodotto di divisori primi si chiama *divisore* (¹) (Divisor). I divisori si aggruppano in *classi*, appartenendo ad una stessa classe i divisori che divisi l'uno per l'altro producono divisori di funzioni del corpo: in particolare i divisori delle funzioni del corpo formano una classe, la *classe principale* o *classe unità*.

Ma accanto al concetto invariante di divisore, è pur necessario un elemento analogo, che si presti a caratterizzare quei fatti che sono intimamente connessi colla scelta della variabile indipendente (moduli, ideali, diramazioni). Perciò in ogni punto $z = \alpha$ del piano o sfera semplice su cui si distende la variabile si attribuisce a ciascuna funzione un *divisore* (²) (Teiler) ch'è la massima potenza di $z - \alpha$ per cui sono divisibili tutti gli sviluppi coniugati della funzione in quel punto.

I due concetti riuniti mostrano tosto la loro fecondità nello studio della diramazione di R_z e nella determinazione delle funzioni del corpo multiple di un dato divisore (cioè aventi dati zeri e i poli fra dati punti); onde è spianata la via alla determinazione e allo studio degli integrali abeliani ed al teorema di Riemann-Roch.

Sia $\mathfrak{P}_i$ il divisore primo corrispondente a un punto di diramazione di R_z e sia l_i il numero dei fogli di R_z che vi si rannodano. Si indichi con $\mathfrak{Z}_z$ il prodotto $\Pi_i\, \mathfrak{P}_i^{l_i - 1}$ esteso a tutti i punti di diramazione di R_z (o, se si vuole, a tutti i punti della superficie, poichè nei punti ordinari è $l_i - 1 = 0$). $\mathfrak{Z}_z$ si chiamerà *divisore di diramazione* relativo alla variabile z. Si indichi inoltre con $\mathfrak{n}_z$ il denominatore del divisore di z, cioè il prodotto dei divisori primi corrispondenti ai punti della superficie di Riemann nei quali $z = \infty$ (e si ricordi che la variabile z può essere una qualunque funzione del corpo).

Sia $d\omega = \zeta_\xi\, d\xi = \zeta_\eta\, d\eta$ un differenziale abeliano espresso rispettivamente nelle variabili ξ, η: la relazione $\zeta_\xi\, d\xi = \zeta_\eta \dfrac{d\eta}{d\xi}\, d\xi$ si

(¹) *Poligono* di D. e W.: il divisore differisce dal poligono in ciò che quello e non questo ammette fattori con esponente negativo.

(²) Si rilevi il dupplice significato in cui qui usiamo il termine « divisore »; nel seguito questo termine ricorrerà soltanto nel primo significato.

esprime in $\zeta_\xi \dfrac{\mathfrak{z}_\xi}{\mathfrak{n}^2_\xi} = \zeta_\eta \dfrac{\mathfrak{z}_\eta}{\mathfrak{n}^2_\eta} = \mathfrak{w}_\omega$, ove si indichino ancora con ζ_ξ, ζ_η i divisori delle funzioni ζ_ξ, ζ_η; e, come mostra l'espressione medesima di $\mathfrak{w}_\omega$, fra i divisori $\mathfrak{w}_\omega$ e i differenziali $d\,\omega$ esiste una corrispondenza biunivoca. I divisori $\mathfrak{w}_\omega$ forniscono così una rappresentazione dei differenziali abeliani invariante per cambiamenti di variabile nel corpo: i loro divisori primi del numeratore e del denominatore rappresentano i punti d'ordine > 1 (¹) e gli infiniti del corrispondente integrale. Essi diconsi *divisori differenziali* e costituiscono una classe: fra essi i divisori interi (multipli del divisore $\mathfrak{q} = 1$) rappresentano gli integrali di 1.ª specie, mentre più generalmente la ricerca di quelli che sono multipli di un divisore qualunque $\mathfrak{q}$ — equivalente a quella delle funzioni del corpo multiple di $\mathfrak{q} \dfrac{\mathfrak{n}^2_z}{\mathfrak{z}_z}$ — dà luogo al teorema di Riemann-Roch nella sua forma più generale, come una relazione fra i sistemi delle funzioni multiple dei divisori $\mathfrak{q} \dfrac{\mathfrak{n}^2_z}{\mathfrak{z}_z}$ e $\dfrac{1}{\mathfrak{q}\,\mathfrak{n}^2_z}$ (il cui prodotto è $\dfrac{1}{\mathfrak{z}_z}$: *sistemi complementari*). E al teorema di R. - R. si ritorna ancora dopo aver stabilite col metodo del Riemann le proprietà dei periodi degli integrali abeliani.

Siano x ed y due funzioni del corpo $K\,(u\;z)$ tali che $K\,(x\;y) = K\,(u\;z)$. Assumendo i loro valori associati come coordinate di un punto del piano, si definisce una curva algebrica. Il punto (a, b) si dice k-plo per essa se i numeratori dei divisori di $x - a$, $y - b$ hanno un divisor comune d'ordine k. Se $F\,(x\;y) = 0$ è l'equazione della curva ed m, n sono i suoi ordini in x e y, i divisori di $\dfrac{d\,F}{d\,x}$ e $\dfrac{d\,F}{d\,y}$ sono $\dfrac{\mathfrak{D}\,\mathfrak{z}_x}{\mathfrak{n}^{m-2}_x\,\mathfrak{n}^n_y}$, $\dfrac{\mathfrak{D}\,\mathfrak{z}_y}{\mathfrak{n}^m_x\,\mathfrak{n}^{n-2}_y}$ dove fan parte del divisore $\mathfrak{D}$ tutti e soli i divisori primi dei punti multipli di F. $\mathfrak{D}$ si dice appunto *divisore dei punti multipli.* Ma questa nozione di punto multiplo differisce da quella projettiva: i punti della retta comune ai due fasci coordinati vi si riuniscono in un punto multiplo, mentre vi compaiono come punti distinti i vari rami con tangenti distinte, uscenti dai centri dei fasci:

(¹) Vale a dire i punti in cui l'integrale, per conveniente determinazione della costante d'integrazione, ha zero d'ordine > 1.

alle nozioni projettive si giunge mediante l' introduzione di coordinate omogenee. Siano $x_0\ x_1\ x_2$ tre funzioni del corpo tali che il corpo $K\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$ sia identico al corpo $K(x\ y)$ — più generalmente siano $x_0\ x_1 \ldots x_s$ $s+1$ funzioni del corpo tali che $K\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_s}{x_0}\right) = K(x\ y)$. L' insieme dei punti di uno spazio ad s dimensioni che hanno come coordinate omogenee valori corrispondenti di queste funzioni è una curva algebrica. I divisori delle x_i, ridotti allo stesso denominatore, potranno scriversi nella forma $\mathfrak{M}\ \mathfrak{X}_i$ dove gli $\mathfrak{X}_i$ sono divisori interi primi fra loro. L' insieme dei divisori della forma $\Sigma\ c_i\ \mathfrak{X}_i$ (divisori delle funzioni $\Sigma\ c_i\ x_i$, liberati dal fattore $\mathfrak{M}$) si dice una *schiera* di divisori. La schiera si trasforma in se stessa per sostituzioni lineari intere; essa rispecchia così le proprietà projettive della curva. Dalla schiera individuata dalle funzioni x_i altre se ne deducono — i rapporti dei cui divisori rappresentano ancora funzioni le cui combinazioni razionali ricoprono il corpo — considerando le funzioni (differenziali) rappresentate dai determinanti estratti dalle matrici $/\ x_i\ d\,x_i \ldots d^k\,x_i\ /$. » Sono queste le coordinate tangenziali (omogenee) della curva considerata come inviluppo degli spazi di k dimensioni a contatto k-plo colla curva: il calcolo dei loro divisori mostra come vi entrino come fattori comuni i divisori i cui fattori primi corrispondono ai punti in cui spazi tangenti minori hanno contatto maggiore dell'ordinario e dal calcolo degli ordini di questi divisori seguono le formole di Plücker, di Cayley, di Veronese.

In una schiera possono sempre trovarsi, ed in infiniti modi, tre divisori tali che i rapporti di due di essi al terzo definiscono un corpo identico a $K(x, y)$ (proiezione semplice della curva sul piano). Il M C D dei divisori $\mathfrak{D}$ relativi a tali coppie di funzioni, sufficientemente generiche, costituisce il *divisore dei punti doppi della curva in senso projettivo,* mediante il quale si esprimono e si dimostrano in modo semplice ed elegante i teoremi del Noether circa la completezza delle serie segate su una curva da curve e superficie aggiunte (1), e la formola di postulazione senza portare in considerazione (per la curva spaziale) la residua intersezione di due superficie per essa e quindi indipendentemente dalla irreduttibilità di questa: non così nelle dimostrazioni note di Noether e Picard (2).

(1) Superficie passanti pei punti multipli della curva e d'ordine sufficientemente elevato. Mi permetto la denominazione di superficie aggiunte in senso un po' diverso dall'ordinario: ordinariamente la superficie aggiunta è obbligata a passare per la residua intersezione di cui si parla più sotto nel testo: ma questa curva medesima non è determinata.

(2) Gli A. non trattano in generale il caso della curva iperspaziale, ma solo quello della curva gobba e della curva canonica. Osservano però che la trattazione

L' applicazione di queste considerazioni geometriche alla curva principale (canonica) conduce notoriamente alle nozioni di punti di Weierstrass e di moduli del corpo, al Lückensatz e al teorema di Schwarz sulle trasformazioni birazionali d'una curva in sè. Ai metodi seguiti dal Weierstrass nelle sue Lezioni sono destinate le ultime lezioni. E in tal modo si riconosce sotto un' altra veduta la strada fatta, ripercorrendola per così dire in senso opposto. Perchè le proprietà della curva canonica, il Lückensatz erano derivati dalle proprietà degli integrandi abeliani, dal teorema di Riemann-Roch: si assume ora come variabile una funzione con un unico polo d' ordine n e si ricalcolano con essa gli integrandi di 1.ª e 2.ª specie, onde deriva una corrispondenza biunivoca fra questi integrandi e gli ordini mancanti delle funzioni aventi quell' unico polo. Ed ancora seguendo il Weierstrass (¹), la doppia integrazione di un differenziale di seconda specie che ammette lo scambio della variabile e del parametro (polo mobile) rispetto all' uno e all' altro, e lungo due linee, chiuse provvede una relazione bilineare fra i periodi degli integrali fondamentali di 1.ª e di 2.ª specie lungo le due linee, (donde deriva la forma di Weierstrass delle relazioni fra periodi); la qual relazione è il punto di partenza per definire i tagli canonici sulla superficie di Riemann e distinguere i sistemi di tagli che spezzano la superficie, indipendentemente dalle nozioni della connessione.

Il volume si chiude con un cenno alle funzioni prime del Weierstrass e col teorema di Abel (al quale conduce il problema di determinare una funzione del corpo come prodotto di funzioni prime); con uno sguardo storico e un indice alfabetico.

L' ampiezza e la varietà delle vedute, la novità della trattazione dànno a questo libro un vivo interesse. Solo qua e là io oserei desiderare maggior densità e maggior efficacia: ed anche la divisione in lezioni, con lunghi sommari (solo nell' indice è indicata una divisione in capitoli) non pare la più adatta a raccogliere l' attenzione del lettore.

Nè totalmente opportuni sono la forma e il posto che si vuol dare ai metodi del Weierstrass; chè, se il rigore e la purezza del metodo fanno desiderare di eliminare o ridurre le considerazioni proprie all' analysis situs, l' uso di funzioni del Weierstrass con unico polo

---

sarebbe analoga. Recentemente per via geometrica e colle stesse restrizioni del Noether e del Picard fu trattato questo caso dal Severi (Rendiconti del Circolo mat. di Palermo 1903).

(¹) Solo contemporaneamente alla pubblicazione del presente volume hanno veduta la luce le lezioni del Weierstrass sulle funzioni abeliane (Werke IV Bd.) onde gli autori hanno dovuto ricostruire questa parte sulle notizie sommarie che si avevano delle sue lezioni orali (Cfr. p. 645).

non rappresenta in ciò elemento essenziale e diminuisce quindi l'efficacia. Ma il ricorso della teoria riemanniana all'analysis situs è realmente essenziale? Certo proprio di questa è il discorso; ma ugualmente sarebbe a dire in ogni teoria d'integrazione lungo linee qualsiansi, anche nella presente degli autori; onde il Weierstrass limita sempre i suoi contorni a forme poligonali. Ma superata questa obbiezione, si elimina quasi da sè ogni difficoltà a ricondurre nel campo algebrico le poche nozioni sulla connessione cui ricorrono gli A. medesimi nell'esposizione della teoria del Riemann. E la distribuzione dei circuiti sulla superficie di Riemann, le loro intersezioni, sono d'altronde fatti algebrici, indipendenti anche dalla nozione d'integrale (1).

BEPPO LEVI.

J. W. MELLOR. *Higher mathematics for students of Chemistry and Physics. With special reference to practical work.* London; Longmans, Green and Co. 1902. 8.° pag. XXI + 543 [Prezzo del vol. leg. 12 sh. 6 d.].

L'opportunità che i naturalisti e la necessità che i chimici conoscano i fondamenti, almeno, delle parti superiori delle matematiche vennero in Italia constate ufficialmente da una legge che entra attualmente in vigore. Che esse corrispondano ad un'opinione, la quale si fa strada in tutto il mondo, è attestata da una serie di pubblicazioni speciali, di alcune delle quali il *Bollettino* nostro si è già occupato; tali sono quella del Nernst e Schönflies (2), che di recente raggiunse una terza edizione (3), e quella del Vivanti (4); altri congeneri, di cui nessun nostro collaboratore tenne finora parola, sono un libro di H. Vogt (5) ed uno di H. A. Lorentz, al quale una traduzione dall'olandese in tedesco ha assicurato più larga diffusione (6). Ora, a questi tentativi fatti dalla Germania, dalla Francia, dall'Italia e dall'Olanda, se ne aggiunge uno proveniente dall'Inghilterra e del quale vogliamo oggi occuparci. Ne è autore, non già un matematico, erudito anche nelle dottrine chimiche, ma un distinto cultore della fisico-chimica, il

(1) E sotto tale aspetto si leggono infatti nel Traité d'Analyse del Picard (T. II), quantunque nella forma del discorso restino anche qui le parole proprie all'analysis situs, e particolarmente a quella delle superficie uniconnesse.

(2) *Bolettino*, T. I, 1898, p. 48-51, e T. II, 1899, p. 101.

(3) NERNST UND SCHÖNFLIES, *Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften*, 3ª Aufl. (München und Berlin, Oldenbourg, 1902).

(4) *Bollettino*, T. VI, 1903, p.

(5) *Éléments de mathématiques supérieures à l'usage des physiciens, des chimistes et ingenieurs et des élèves des facultés des sciences* (Paris, Nony, 1901).

(6) *Lehrbuch der Differential-und Integralrechnung und der Anfangsgründe der Geometrie* (Leipzig, Barth, 1901).

quale espone tutto quello che di matematica dovette apprendere per potere coltivare quell'importante ramo della filosofia naturale. Nessuna meraviglia quindi se, secondo lui, « la matematica superiore è l'arte di ragionare sopra le relazioni numeriche esistenti tra fenomeni naturali, e le varie parti di essa rappresentano altrettanti modi di considerare siffatte relazioni ».

Tutta l'opera del Mellor comprende tredici capitoli distribuiti in tre sezioni: una *elementare*, una *superiore* ed una contenente un *compendio di alcuni utili risultati dell' algebra e della trigonometria.*

Cinque capitoli compongono la I sezione e trattano risp.: Calcolo differenziale, Geometria analitica, Funzioni con proprietà singolari, Serie infinite e loro uso. Caratteristiche dell'esposizione sono a straordinaria ricchezza nelle applicazioni e gli esempi attinti dalle scienze naturali e l'uso costante di considerazioni chimiche per illustrare, quasi per giustificare, certe definizioni totalmente astratte. [Ad es. per giungere al concetto di *derivata*, l'A. parte dalla reazione mediante cui l'acido cloridrico nasce dalla combinazione dell'idrogeno col cloro e considera (pag. 4) la velocità con cui essa avviene; e per stabilire quello di *integrale* prende le mosse dalla reazione chimica che nasce aggiungendo una molecola d'acqua ad una di zucchero (p. 150)]. Con criteri analoghi sono scritti i tre capitoli raccolti nella II Sez. ed aventi i titoli seguenti: Funzioni iperboliche, Metodi per integrare le equazioni differenziali, Teorema di Fourier.

L'ultima sezione comprende i cinque Capitoli seguenti: Risoluzione delle equazioni numeriche, Determinanti, Probabilità e teoria degli errori, Collezione di formole e Tavole numeriche.

Ci è impossibile addentrarci in una descrizione minuta e completa di tutto quanto il Mellor espone; se lo facessimo il lettore si meraviglierebbe (come si meravigliò chi scrive queste linee) di quante importanti questioni chimiche esigano l'uso del calcolo infinitesimale e della geometria analitica, e di quanto estese nozioni matematiche siano oggi richieste da uno seguace di Lavoisier. Nè intendiamo addentrarci in una discussione sull'ordinamento della materia, il quale è diverso da quello di consueto adottato; su di esso potrà giudicare soltanto chi avrà preso l'opera del Mellor come base di un corso di lezioni. A noi bastò di segnalare agli italiani, studiosi di un argomento attualmente di moda, un'opera che si raccomanda alla loro attenzione, sia per la ricchezza di illustrazioni extramatematiche, sia perchè, essendo scritta da un naturalista, fa conoscere da un nuovo punto di vista, l'insegnamento della matematica pei chimici.

G. L.

E. Study. — *Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung der Kräfte und verwandte Gegenstände der Geometrie.* — Leipzig, Teubner, 1901-03; pp. XIII-603. [Prezzo Mk. 21].

Col titolo messo in testa al suo libro il sig. Study fa comprendere com'egli intenda rivolgersi di preferenza al geometra che allo studioso di meccanica. E se anche l'intenzione dell'A. non riuscisse da ciò manifesta, non rimarrebbe che sfogliare, anche solo rapidamente, il libro, per convincersi che questo è un compendio e nello stesso tempo un ampio complemento di ricerche, di carattere essenzialmente geometrico, proseguite da varii anni dall'A. in un duplice indirizzo: studiare, cioè, da un lato se la geometria del moto istantaneo d'un corpo rigido o, che fa lo stesso, la geometria dei sistemi di forze applicate ad un tale corpo (dinami) si possa svolgere in modo diverso e, per certi riguardi, più semplice di quello con cui si studiò finora, ove si pose a base la rappresentazione e la composizione dei movimenti e delle forze che tutti sanno, — e, dall'altro lato, valersi delle relazioni che intercedono fra la geometria delle dinami e la teoria dei complessi di rette, nonchè utilizzare le nuove rappresentazioni delle dinami e le nuove regole per la loro composizione, onde sviluppare, parallelamente ed in analogia, tutta una nuova geometria della retta.

Il primo dei due indirizzi di ricerca informa la prima e la seconda parte della « Geometrie der Dynamen », condotte rispettivamente con metodo geometrico e analitico; mentre al secondo indirizzo è ispirata la terza ed ultima parte, dove la geometria dei movimenti o delle dinami ritorna solo verso la fine a guisa di applicazione o di appendice.

Noterò subito una particolarità che salta immediatamente all'occhio: la grande abbondanza di termini e di locuzioni nuove, che a primo aspetto indispone e confonde; tanto più che spesso due figure, designate con due nomi diversi, hanno fra loro grandissima analogia, anzi talora coincidono addiritura in generale, non distinguendosi che nei casi limiti. Lo Study per il primo riconosce quest'inconveniente, e dichiara di essersi limitato, nell'introdurre nuove denominazioni, al puro necessario: in realtà non si può negare che ai nuovi termini corrispondano sempre enti di importanza fondamentale per la teoria; e allora val bene la pena di superare la prima difficoltà e farci l'abitudine.

*
* *

Nella prima parte l'A. si occupa sostanzialmente di rappresentare una dinàme altrimenti che coll'ordinario sistema di un *segmento* (1)

(1) Con *segmento* intenderò sempre di indicare la *linea* (forma di 2.ª specie) del Calcolo geometrico; il segmento non si può adunque, a differenza del vettore, trasportare da una retta su un'altra parallela.

e di un *vettore*, e di dedurre le relative regole di composizione. Accanto a questo tema principale, si svolge poi uno studio delle proprietà degli enti che s' incontrano per via, delle relazioni fra di loro e colla geometria del movimento dei sistemi invariabili. Il metodo impiegato è puramente geometrico, e in generale elementare, tale cioè da non richiedere cognizioni matematiche di natura elevata. Le nuove soluzioni che dà il sig. Study per il problema della rappresentazione delle dinami e della loro composizione sono tre, e in ciascuna di esse la figura rappresentativa della diname è un sistema di due rette. Esaminiamo brevemente queste tre soluzioni.

Dapprima vien definita una figura che è, in certo modo, duale del *segmento*, e che può, nella geometria delle dinami (o dei movimenti), sostituirlo; questa figura si chiama *Keil*, ed è l' insieme di due piani φ, φ' *non* ortogonali, presi in un determinato ordine. *Apertura* del Keil è la tg (φ, φ'). Il Keil si dirà proprio od improprio secondochè la retta (φ, φ') è propria od impropria; quando questa retta è propria si chiamerà senz' altro la *retta* del Keil: su di essa è fissato un senso positivo. Si *associano* fra loro un segmento ed un Keil proprio aventi la medesima retta, quando la lunghezza del segmento è uguale all' apertura del Keil. Ricorrendo ai segmenti associati potremo definire la somma di due Keile le cui rette s' incontrano; la costruzione geometrica corrispondente si può tuttavia eseguire senza passare attraverso ai segmenti, ed è l' analoga della costruzione col parallelogrammo dei segmenti; questo vien sostituito da una figura solida: il *Keiltrapez*. Però una tale costruzione si potrà applicare solo a Keile di apertura non nulla le cui rette si tagliano in un punto proprio. Il passaggio agli altri casi è ovvio; basterà pensare ai segmenti associati ai Keile proprii, e convenire di associare ad un Keil improprio un vettore: il vettore AA' perpendicolare ai piani φ, φ' del Keil ed i cui estremi A ed A' sono rispettivamente nei piani φ e φ'. Altrimenti si può anche dire che ad un Keil improprio si associa non un segmento, ma una coppia di segmenti. Una volta constatato che quell' operazione sui Keile, definita come addizione, gode in ogni caso delle proprietà associativa, commutativa, distributiva, si potrà parlare di *somma formale* di due o più Keile colle rette disposte comunque; si arriva così alla riduzione di un sistema di Keile ad una forma che si può chiamare *normale*, analoga a quella cui dà luogo la riduzione di più segmenti non aventi la stessa origine. Si ha cioè: la somma geometrica di un numero qualunque (finito) di Keile si può sempre, ed in infiniti modi, ridurre ad un Keil proprio e ad uno improprio; in particolare può mancare l' uno o l' altro dei due Keile od anche posson mancare tutti e due. Quando poi i due Keile esistono entrambi, si può sempre, ed in un solo modo, fare sì che il Keil improprio abbia i suoi piani perpendicolari alla retta del Keil proprio.

Dopo ciò si capisce che alla rappresentazione d' una diname mediante un segmento ed un vettore se ne possa sostituire un' altra con due Keile, uno proprio ed uno improprio. Ma non è questa ancora la rappresentazione a cui si vuole arrivare. Viene introdotto un nuovo ente, il *motore*, che è l' insieme di due rette X e Y *non* ortogonali prese in un determinato ordine. Il motore si riduce ad un *rotore* quando le rette s' incontrano (al finito), oppure ad un *traslatore* quando sono parallele. Si chiama *apertura* del motore la tg (X, Y), *lunghezza* del motore la minima distanza di X e Y, *asse principale* la perpendicolare comune alle due rette (od una qualunque di queste perpendicolari nel caso del traslatore). Ad una somma di Keile qualunque si potrà sempre *associare* un motore; basta ridurre la somma di Keile a forma normale: $K' + K''$ (con K' intendiamo il Keil proprio); il motore associato sarà allora quello che ha per asse la retta di K', per lunghezza la distanza fra i due piani paralleli di K'', e per apertura l' apertura di K'. Non occorre altro per comprendere come il motore, questa figura costituita di due rette, valga a rappresentare una diname in luogo del sistema di un segmento e di un vettore, oppure di un Keil proprio ed uno improprio.

I motori hanno una loro geometria: due motori $(O\,X)$, $(O\,Y)$ colla stessa retta O d' origine si possono comporre in un unico motore $(O\,Z)$, e ciò secondo due diverse costruzioni che sono, per così dire, duali una dell' altra: la prima fondata sulla costruzione del parallelogrammo dei segmenti, l' altra su quella del Keiltrapez. Alla composizione di due tali motori corrisponde la composizione dei Keile associati, e quindi di due dinami. Si comprende poi che in luogo di una diname possiamo considerare un sistema di movimenti istantanei elementari (traslazioni e rotazioni), e occuparci della loro sovrapposizione. Il movimento risultante (un movimento a vite) si potrà rappresentare o col sistema di un segmento e di un vettore, o con una somma di Keile ridotta a forma normale, o infine con un motore. Si comporranno più movimenti a vite sommando i corrispondenti motori, che si potranno sempre supporre colla retta d' origine comune.

Il secondo modo di rappresentare la diname mediante due rette si ottiene introducendo un' altra figura ausiliaria, che tiene il posto del Keil della rappresentazione precedente; quest' altra figura è il *Quirl*, cioè l' insieme di un punto e di un piano che non s' appartengono, presi in un dato ordine. Il Quirl si dice proprio, se il punto ed il piano sono entrambi proprii; improprio, se tale è uno dei suoi elementi. *Retta* di un Quirl proprio è la perpendicolare condotta dal punto sul piano, sua *lunghezza* la distanza del punto dal piano. Al Quirl si *associa* un segmento, la cui retta coincide colla retta del Quirl, e la cui lunghezza è la *reciproca* della lunghezza di questo. Naturalmente ad un Quirl risulta associato anche un Keil. Si può definire ed eseguire la somma di due Quirle aventi il medesimo punto ricorrendo ai segmenti associati; ma anche qui vi è una costruzione che permette la composizione dei Quirle senza ricorrere ai segmenti. La costruzione è di natura elementare e si semplifica quando i Quirle componenti hanno posizioni speciali, ovvero quando sono improprii; in quest'ultimo caso al Quirl andrà associato un vettore, e non più un segmento. Infine si giunge alla somma formale di un sistema qualunque di Quirle, che sarà riducibile ad una forma *normale*, cioè al sistema di un Quirl proprio e di uno improprio, i cui piani siano paralleli. Questo sistema di Quirle si potrà assumere come rappresentante di una diname. Accanto al Quirl porremo allora una figura, che si compone di due rette, e si comporta rispetto ad una somma di Quirle come il motore rispetto ad una somma di Keile. Essa si chiama *impulsore*, ed è il sistema di due rette, prese in un certo ordine, che *non* stanno in un medesimo piano; si dirà poi più particolarmente *torsore* quando le due rette sono ortogonali, *eiettore* quando una delle due è impropria. Si vede che l'impulsore non è proprio la stessa cosa del motore. Senza entrare in altri particolari, poichè vi è stretta analogia colla rappresentazione precedente, dirò soltanto che ad una somma di Quirle viene associato un impulsore, il quale risulta ben definito quando il Quirl sia ridotto a forma normale. Due impulsori con una retta comune ammettono una composizione geometrica, alla quale sta a base una costruzione col *Quirltrapez* (una figura analoga al parallelogrammo dei segmenti e al Keiltrapez), e che rappresenta una composizione di dinami ovvero di movimenti istantanei di un sistema rigido.

Delle tre rappresentazioni, che il sig. Study propone per la diname, l'ultima coincide colla prima di cui abbiamo parlato, in quanto in essa si prende ancora per figura rappresentativa il motore; ma se ne discosta per il modo di addizionare due motori aventi in comune la retta origine. La nuova composizione dei motori si chiamerà *stereometrica*, per distinguerla da quella precedente, che vien detta *geometrica*; essa possiede ancora tutte le proprietà della somma. Tanto per dare un'idea dei metodi costruttivi dell'A., descriveremo la somma stereometrica di due motori, che si può esporre in breve. Se indichiamo con $\overline{OX}$ la perpendicolare comune alle rette del motore (OX), e se (OY) è un altro motore avente in comune con (OX) la prima retta O, si dice somma stereometrica dei due dati quel motore (OZ) la cui seconda retta Z è definita dal seguente schema:

$$\begin{array}{ll} X_1 = \overline{OX} \;, & Y_1 = \overline{OY} \;, \\ X_2 = \overline{OX_1} \;, & Y_2 = \overline{OY_1} \;, \\ X_3 = \overline{X_2 Y} \;, & Y_3 = \overline{Y_2 X} \;, \end{array}$$
$$Z = \overline{X_3 Y_3} \;.$$

Non è mio proposito di dare un giudizio sulla maggiore o minore semplicità assoluta di questa e delle altre costruzioni che fanno parte dei metodi del sig. Study. Dirò che quella ora descritta schematicamente è un po' meno semplice che le due precedenti relative all'addizione geometrica dei motori e degli impulsori; d'altra parte si semplifica, ed anche notevolmente, quando i due motori sommandi siano in posizioni speciali o si riducano a rotori o a traslatori. Certo, i metodi dello Study hanno il vantaggio teorico che permettono di sommare due dinami come si comporrebbero due vettori. Quanto ai vantaggi pratici, quantunque si possa a priori asserire che difficilmente contribuisce ad aiutare l'intuizione una figura dove, in luogo di punti e di segmenti, compaiono piani e rette variamente intrecciantisi, pure non sarebbe inutile sottoporre le costruzioni dell'A., per ciò che riguarda la composizione delle dinami, alla prova della loro esecuzione effettiva: i metodi della geometria descrittiva porgerebbero il mezzo migliore per questa prova.

I tre diversi modi di rappresentare e di comporre le dinami offrono materia, come dissi sul principio, a notevoli sviluppi geometrici, i quali, anzichè comparire come accessorii, sono parte integrante della trattazione. Accennerò alle corrispondenze spaziali che nascono dalla considerazione di quelle tre rappresentazioni, e che si riducono poi a movimenti (finiti); inoltre ad ognuna delle tre composizioni di dinami corrisponde una particolare sovrapposizione di movimenti. Anzi è appunto ricorrendo alle due prime sovrapposizioni che l'A. riesce alla composizione geometrica dei motori ed a quella degli impulsori, considerando sia la relazione fra una coppia x, x' di punti corrispondenti nel movimento e il loro punto medio y, sia la relazione fra la stessa coppia di punti e il piano perpendicolare alla loro retta in y. Si ottengono in tal modo dei legami fra la geometria delle dinami ed i movimenti finiti, che sono una estensione della nota relazione fra le dinami ed i movimenti infinitesimi. Quanto poi alle sovrapposizioni dei movimenti, quelle che corrispondono all'addizione geometrica e stereometrica dei motori danno luogo, nel caso di movimenti infinitesimi, con un passaggio al limite, all'ordinaria composizione col parallelogrammo dei segmenti.

Una cosa che va rilevata è la parte che ha in queste ricerche la geometria non euclidea. L'A. non volle, per conservare alla sua esposizione un carattere possibilmente elementare, fare uso esplicitamente di considerazioni uscenti dal campo della geometria d'Euclide; però fa notare come lo spirito di questa geometria gli abbia servito continuamente di guida. Se difatti, com'egli osserva, si tenta di estendere agli spazi non euclidei le costruzioni da lui esposte, si trova un sistema costruttivo unico: il che spiega sia le analogie formali, sia le divergenze fra le tre classi di costruzioni a cui si giunge quando si passa allo spazio ordinario.

E. Daniele (*continua*).

G. Holzmüller. *Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik. Dritter Teil: Lehr- und Uebungsstoff zur freien Auswahl für die Oberklassen realistischer Vollanstalten und höheren Fachschulen, nebst Vorbereitigungen auf die Hochschulmathematik.* II. Aufl. Mit 223 Figuren im Text. Leipzig und Berlin, G. B. Teubner. 1902. 8.° p. xiv + 370 [Prezzo del vol. leg. Mk. 4. 40]

Il lungo titolo di questa opera del ben noto professore di Hagen contiene alcune frasi che, probabilmente, riusciranno un po' oscure a molti dei nostri lettori. A chiarirne il significato diremo che, secondo le disposizioni di legge, che andarono in vigore in Germania a partire dal 1901, per le scuole tecniche superiori, al professore di matematiche venne concessa una grande libertà nella scelta degli argomenti da svolgere. Ad esempio venne lasciato in suo arbitrio o di approfondire l'insegnamento dell'algebra, spingendolo fino a raggiungere la risoluzione delle equazioni algebriche o delle equazioni numeriche trascendenti, oppure di spaziare nel campo della geometria analitica, sintetica o descrittiva. In tal modo venne reso possibile al docente di dare al proprio insegnamento un'impronta personale e a certi istituti di conservare la fisonomia speciale da essi posseduta. A nessuno dei nostri lettori sfuggirà la straordinaria importanza che possiede siffatta radicale innovazione, e molti converanno con noi che essa potrebbe essere trapiantata in Italia, almeno per quanto concerne il 2.° biennio degli Istituti tecnici, il cui programma potrebbe essere composto da ciascun insegnante, scegliendone gli ingredienti fra un certo numero di temi, di cui il legislatore darebbe l'enumerazione. È chiaro che un libro di testo, informato all'indicato criterio didattico, dev'essere scritto in modo *sui generis;* cioè non presentarsi come una catena di verità saldamente connesse le une alle altre, ma piuttosto come un florilegio di teorie differenti, poste a disposizione più dell'insegnante che dello studente. Tale si presenta appunto il volume che ora annunciamo; ciò è evidente dalla semplice ispezione dell'indice che ne presentiamo:

Parte I. *Geometria.*

I. Esercizi sulla teoria dei circoli e sui quadrangoli e quadrilateri completi. II. Costruzione lineare delle coniche. III. Prospettiva, problemi di chiusura, costruzioni con la sola retta, ecc. IV. Punteggiate proiettive. V. Fasci proiettivi. VI. Il rapporto anarmonico. VII. Esempi di fasci proiettivi e punteggiate proiettive. VIII. Proprietà metriche delle coniche. IX. Cerchio di curvatura delle coniche. X. Aree delle coniche; rettificazione della parabola. XI. Punteggiate involutorie. XII. Fascio di raggi involutori. XIII. Esercizi di geometria analitica. XIV. Applicazione delle coniche alla fisica matematica.

Parte II. *Stereometria.*

I. Preliminari sopra i momenti d'inerzia. II. Tronchi di prismi e cilindri; solidi di risoluzione. III. Quadriche. IV. Applicazioni del teorema di Cavalieri. V. Misura di alcune volte. VI. Fondamenti dell'assonometria ortogonale. VII. Projezione di una sfera. VIII. Problemi varii.

Parte III. *Trigonometria sferica.*

I. Preliminari. II. Triangoli sferici rettangoli. III. Triangoli sferici obliquangoli. IV. Calcoli numerici. V. Costruzione di triangoli sferici. VI. Conseguenze del « teorema del coseno ». VII. Circoli più importanti di un triangolo sferico. VIII. Risoluzione numerica di triangoli sferici. IX. Esercizi. X. Cenno sopra la reciprocità sferica.

Parte IV. *Analisi algebrica con applicazioni alla geometria ed alla meccanica.*

I. Le funzioni intere razionali. II. Generalità sulle serie infinite. III. Teorema del binomio. IV. Applicazioni alle funzioni algebriche. V. Sviluppo in serie di alcune funzioni trascendenti.

Parte V. *Equazioni di grado superiore.*

I. Equazioni di 3.° grado. II. Equazioni di 4.° grado. III. Cenni sulle equazioni di grado *n*.

Benchè il nostro ordinamento scolastico sia informato a concetti ben differenti da quell' « akademische Freiheit », che in Germania accenna ad diffondersi dalle Università alle Scuole secondarie, pure un libro qual è quello dell'Holzmüller potrà essere consultato con profitto dai professori italiani, molti dei quali sono animati dalla nobile aspirazione di estendere la propria azione oltre gli angusti limiti imposti dai rigídi programmi ufficiali

G. L.

NOTIZIE

ANTONIO ARNAUD, IL GRANDE ARNAUD, COME MATEMATICO: ecco il titolo di un'interessante memoria, inserita nel XIV Fascicolo delle *Abhandl. zur Gesch. der Math.* (1). L'autore di essa (Karl Bopp) si è proposto, ed è riuscito, a mostrare come al suo eroe spettasse nella storia delle scienze esatte un posto non meno importante di quello che da tempo egli occupa nella storia della filosofia.

(1) Lo stesso fascicolo contiene molti complementi al lavoro dello Suter sopra *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke* (Abh. zur Gesch. der Math. X, 1890) e un importante scritto del Björnbo sopra Menelao.

Arnaud nacque a Parigi il 6 Febbraio 1612 e morì a Bruxelles l'8 Agosto 1694; è nota la parte che egli ebbe nelle dispute filosofico-religiose, il cui più celebre risultato è la collezione di *Lettres provinciales* di Pascal; il Bopp vi accenna, dilungandosi poi sulle relazioni che l'Arnaud ebbe con questo, con Descartes e con Leibniz. La produzione matematica dell'Arnaud comincia con alcune tesi di logica sostenute dinanzi alla Sorbona il 25 Luglio 1641, e si svolge in alcune pagine di *La Logique ou l'Art de penser*. Ma il suo elemento precipuo è formato dagli anonimi *Nouveaux Eléments de Géométrie*, pubblicati per la prima volta nel 1667 e ristampati poi nel 1683, nel 1680 e nel 1711. Giudicati assai favorevolmente dai contemporanei, essi servirono di base alla diffusissima opera analoga del P. Lamy; inoltre vennero nel 1696 dal Malezieux scelti per educare al sano geometrizzare il Duca di Borgogna, onde si trovano in sostanza riprodotti negli *Eléments de géometrie pour Monseigneur le Duc de Bourgogne*; finalmente gli *Eléments de Mathématiques de Monsieur Varignon* ebbero origine dal desiderio di completare l'opera dell'Arnaud, col trattare la stereometria in base al metodo da lui proposto por la planimetria. Riguardo alla natura di tale metodo noteremo soltanto che esso conferma l'attitudine di opposizione ad Euclide che la Francia manifestò con Ramus e Legendre; riguardo ai particolari noteremo i cenni del « metodo degli indivisibili » e la scoperta fatta dall'Arnaud, indipendentemente da Maurolico e Pascal, del procedimento logico noto sotto il nome di « induzione completa ». Le qualità d'inventore dell'Arnaud sono poi attestate dalla sua *Solution d'un des plus celèbres et des plus difficiles problèmes d'arithmétique, appelé communement les quarrez magiques*. Se tutto ciò basti a far ritenere meritevole l'Arnaud del nome di « Euclide del Secolo XVII », proposto dal Bopp, lasciamo giudice il lettore.

*
* *

TEMA PROPOSTO PEL 1906 DALL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI BERLINO. — Non essendo stato risoluto in alcun modo il problema proposto pel 1902 (v. *Bollettino*, T. III, 1900, p. 126), esso viene nuovamente suggerito sotto la seguente forma più semplice e generale: « L'Accademia desidera che venga arrecato qualche perfezionamento notevole alla teoria delle funzioni a più variabili che ammettono trasformazioni lineari in sè stesse ». Premio 5000 Marchi.

*
* *

UN PROGETTO BIBLIOGRAFICO. — La Società Bibliografica Italiana nell'intendimento di rendere sempre più cordiali e saldi i vincoli fra i raccoglitori italiani ed anche allo scopo di far nota agli studiosi l'esistenza di molte raccolte che possono offrire prezioso materiale di studio, ha deliberato di pubblicare una *Guida delle biblioteche e raccolte bibliografiche private italiane*, affidandone la compilazione al Prof. G. Fumagalli e al Dott. A. Bertarelli. In questa *Guida* saranno indicati tutti coloro, Italiani o Stranieri residenti in Italia, i quali si occupano di riunire: I. Libri opuscoli o fogli volanti, II. Stampe, III. Autografi, IV. Archivi. Vennero invece escluse tutte le Biblioteche, Musei e Archivi appartenenti ad istituti, ad opere pie, ad associazioni o ad altri enti, le biblioteche circolanti ed i gabinetti di lettura anche se di proprietà privata. La società — la quale, come è noto, ha per sede la Biblioteca Braidense di Milano — si rivolge a tutti gli studiosi per avere notizie in proposito.

*
* *

PROGETTO D' UN' EDIZIONE INTERNAZIONALE DELLE OPERE DI LEIBNIZ. Una delle proposte presentate alla prima assemblea generale dell' Associazione internazionale delle Accademie, tenuta il 16 Aprile 1901, fu la pubblicazione di un' edizione completa delle opere di Leibniz. Tale proposta incontrò il plauso generale e venne all' unanimità votato il seguente ordine del giorno.

« In vista di una pubblicazione progettata delle opere di Leibniz, la cui esecuzione sarà sottoposta alla prossima sessione dell' Associazione delle Accademie, si confida all' Accademia delle Scienze morali e politiche, all' Accademia delle Scienze di Berlino ed all' Accademia delle Scienze di Parigi di delegare ciascuno un direttore. Questi direttori avranno per compito:

1.° Di fare appello a tutte le biblioteche e depositi pubblici e privati, chiedendo l' indicazione di tutti i documenti utili alla pubblicazione;

2.° Di redigerne un catalogo descrittivo o razionato;

3.° Di preparare un piano metodico da adottarsi per l' edizione progettata.

Dagli studi fatti da tale Commissione (composta di Diels, Poincaré, Bourtroux) risulta che solo ad Hannover esistono 60 mila manoscritti, di cui 35 mila sono lettere. Per redigere il desiderato catalogo la Commissione stessa si è rivolta a tutti i capi delle biblioteche ed archivi e ha fatto una prima classificazione del materiale ad essa noto; il risultato di tale lavoro verrà sottoposto nel 1904 all' assemblea generale dell' Associazione.

I voti di tutti gli studiosi, plaudendo all' impresa deliberata, accompagnano i benemeriti che si occupano di eseguirla.

*
* *

ACCADEMIA REALE DEL BELGIO. — Per l' anno venturo quest' Accademia pose a concorso il tema seguente: *Recare qualche contributo* *allo studio algebrico e geometrico delle forme* n-*lineari, per* n > 3. Premio 600 fr.; scadenza 1.° Agosto 1904; i lavori dei concorrenti devono essere scritti in francese od in fiammingo e inviati anonimi al Segretario perpetuo di quella Società.

La stessa Accademia è poi chiamata a conferire il Premio quadriennale C. Lagrange di 1200 fr. all'autore del migliore lavoro matematico-sperimentale apportatore di qualche reale progresso alla conoscenza matematica della figura della terra. I lavori dei concorrenti devono essere presentati, stampati o manoscritti, avanti il 1.° Gennajo 1905; quelli stampati devono portare una data posteriore al 31 Dicembre 1894.

*
* *

F. SCHWEINS E O. HESSE. — È noto che l'analisi combinatoria ha acquistato posto stabile ed importante nella matematica a partire da Leibniz, la cui dissertazione di laurea tratta appunto *De arte combinatoria*. Circa un secolo dopo C. F. Hindeburg seguiva le orme del suo grande compatriota, ma, esagerando il valore di quella teoria, fondava la famigerata sterile « Scuola combinatoria ». Ad opporsi alle tendenze da essa sostenute si adoperò un celebre professore di Gottinga, B. F. Thibaut, contemporaneamente a cui insegnava, come libero docente, F. F. Schweins. Questi, chiamato poi ad Heidelberg vi insegnò per 93 semestri ed ebbe come discepolo, fra gli altri, J. Steiner. Suo successore fu O. Hesse, il quale in quell'Università insegnò dal semestre invernale 1857 sino al 1884; a lui succedettero il Königsberger, il Fuchs e poi nuovamente il Königsberger. Di tutti questi uomini che, in Heidelberg vissero ed operarono, tratta un'ottima memoria di M. Cantor inserita nel II vol. (Heidelberg, 1903) della « Festschrift » *Heidelberger Professoren aus dem neunzehnten Jahrhundert*.

*
* *

INFLUENZA DELLA TECNICA SOPRA LO SVILUPPO DELLA MECCANICA TEORICA, ecco il tema della bella prolusione al corso di meccanica razionale nel Politecnico di Karlsruhe tenuto dal Prof. F. Heun il 2 Dicembre 1902; chi desidera conoscerlo lo troverà inserita nel XII vol. (1903) del *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*.

*
* *

TEMI DI CONCORSO. — La sezione scientifica del Politecnico di Charlottenburg ha posto a concorso (con scadenza il 1.° Maggio 1904) il tema seguente: *Runge ed Heun hanno insegnati metodi generali pel calcolo numerico di qualsia soluzione di un'assegnata equazione* *differenziale. Applicandoli s' integrino numericamente alcune speciali equazioni differenziali, di cui si conoscano già le soluzioni analitiche, e servendosi di queste si determini il grado di esattezza delle anzidette soluzioni numeriche.*

Per l' anno 1906 la Società Jablonowski ha assegnato un premio di 1000 Mk. al risolutore della seguente questione: *Ricerca di numeri analoghi ai numeri di Bernoulli, specialmente nel campo delle funzioni ellittiche, i quali ammettano moltiplicazione complessa.* I lavori dei concorrenti devono essere presentati anonimi prima del 30 Novembre 1906 ed essere scritti in tedesco, francese o latino.

La Facoltà filosofica dell' Università di Rostock ha proposto per l' anno 1903-04 il seguente problema: *Determinare in modo esauriente tutte le posizioni scambievoli di due coniche concentriche* (cfr. Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie,* I, p. 141) *e quelle di due quadriche pure concentriche.*

***

PUBBLICAZIONI RECENTI SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE.

A. FAVARO - *Amici e corrispondenti di Galileo Galilei.* VII. *Giovanni Ciampoli.* (Atti del R. Istituto Veneto, T. XLII, 1902-1903); VIII. *Giovanni Sagredo.* (Nuovo Archivio Veneto, T. IV, Parte II, 1903).

A. FAVARO - *Per la storia dei manoscritti galileiani concernenti i pianeti medicei.* (Atti del R. Istituto Veneto, T. XLII, 1902-1903).

F. ENGEL - *S. Lie.* Traduzione di Ugo Amaldi. (Giornale di Matematiche, T. XL, 1902).

***

NOMOGRAFIA. — Ai lettori che s' interessano a questo nuovo verso della matematica applicata, del quale già due volte il *Bollettino* si è occupato (v. T. II, 1899, p. 126-127 e T. III, 1900, p. 117), segnaliamo l'*Exposé synthétique des principes fondamentaux de la nomographie* di M. d'Ocagne, inserito nell' 8.° Cah. della 2.ª Serie del *Journal de l'Ecole polytechnique* e pubblicato anche a parte dal Gauthier-Villars. Fra i nuovi risultati ivi stabiliti va rilevata la classificazione di tutti i nomogrammi in venti tipi, uno ad un piano e gli altri a due, tutti gli altri potendo ottenersi mediante opportune combinazioni di quelli.

Bestonzo Pietro, Gerente.

Genova - Tipografia R. Istituto Sordomuti - 1903.

INDICE DEI NOMI